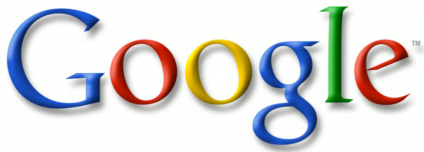
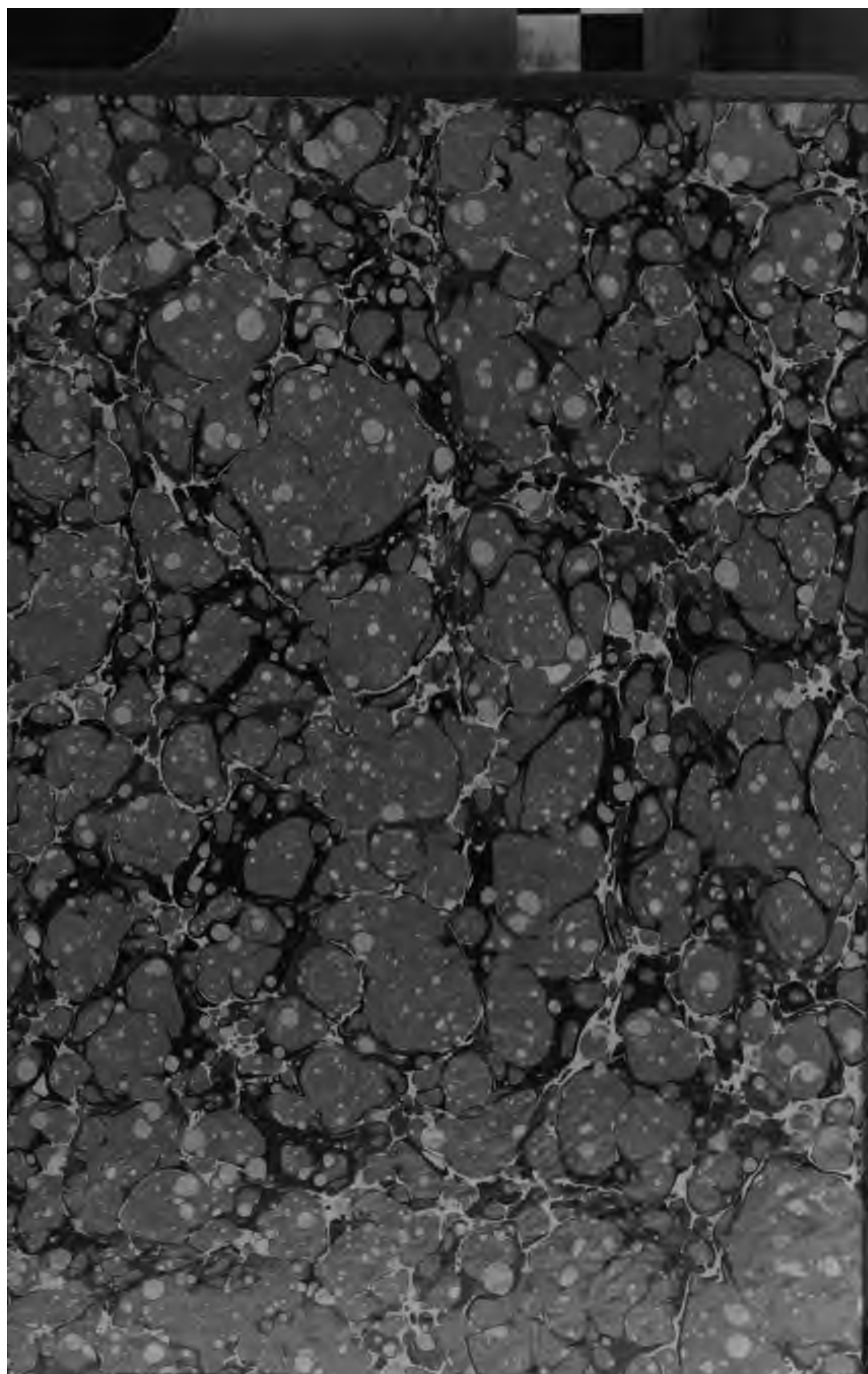
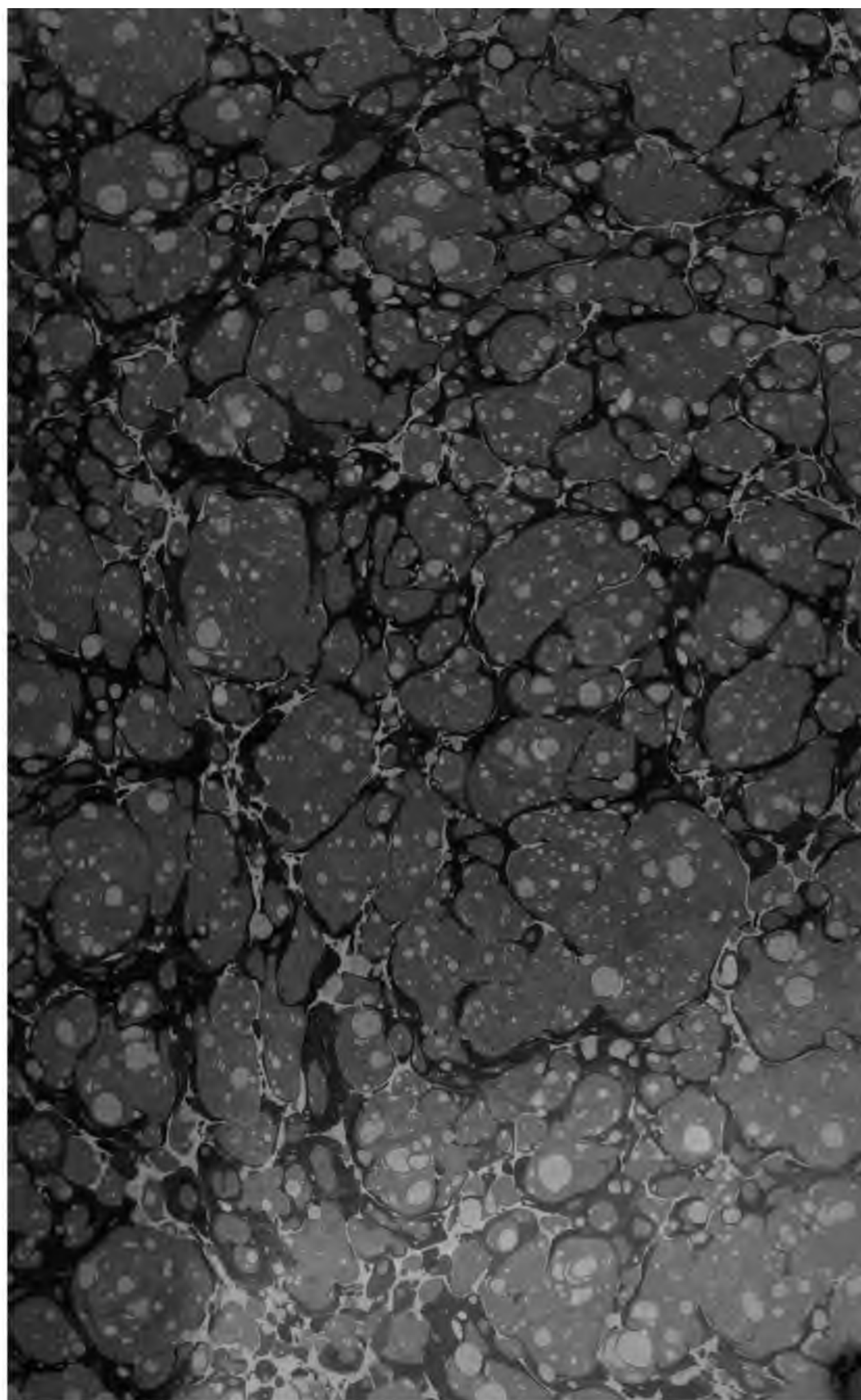

Google







JAHRESBERICHT DER
DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG
DER ERGÄNZUNGSBÄNDE II. BAND

DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DEN
PUNKTMANNIGFALTIGKEITEN

BERICHT
ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

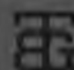
VON

ARTHUR SCHOENFLIES
O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT IN KÖNIGSBERG I. PR.

ZWEITER TEIL

MIT 26 FIGUREN IM TEXT

(DER ERSTE TEIL DIESER ARBEIT IST UNTER DEMSELBEN TITEL ERSCHIENEN
IM JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG, BAND VIII)



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



DER ERGÄNZUNGSBÄNDE II. BAND

ENTHALTEND:

ARTHUR SCHOENFLIES, DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DEN PUNKTMANNIGFALTIGKEITEN. ZWEITER TEIL



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DEN PUNKTMANNIGFALTIGKEITEN

BERICHT
ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

ARTHUR SCHOENFLIES
O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT IN KÖNIGSBERG I. PR.

ZWEITER TEIL

MIT 26 FIGUREN IM TEXT

DER ERSTE TEIL DIESER ARBEIT IST UNTER DEMSELBEN TITEL ERSCHIENEN
IM JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG, BAND VIII



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Vorwort.

Den zweiten Teil meines mengentheoretischen Berichts übergebe ich heute der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und zugleich der Öffentlichkeit. Er enthält wesentlich die geometrischen Anwendungen. Außerdem bringt er einige Nachträge zu den im ersten Kapitel behandelten Gegenständen. Eingehender habe ich von ihnen nur die abstrakteren Probleme der Mengentheorie erörtert, besonders Hausdorffs neuere Arbeiten über lineare Ordnungstypen.

Die Vollendung des Berichts hat sich länger hingezogen, als ich annahm; denn seit dem Erscheinen des ersten Teils sind sieben Jahre verflossen. Der Grund ist der, daß ich gern warten wollte, bis ich wenigstens diejenigen mengentheoretischen Fragen, die die ebenen geometrischen Gebilde betreffen, in einer gewissen abgeschlossenen Form darstellen konnte. Hierzu waren nur wenige Vorarbeiten vorhanden; den größeren Teil mußte ich daher selbst zu erledigen suchen. Aus diesem Grunde ist die eigene Arbeit am zweiten Teil des Berichts erheblich größer als am ersten.

Leider war der erste Teil nicht frei von Mängeln; von verschiedenen Seiten ist auf sie hingewiesen worden. Eine gewisse Erklärung liegt in der Tatsache, daß die Abfassung eines solchen Berichts mit Schwierigkeiten eigener Art verbunden ist; Arbeiten, auf die man erst während des Druckes aufmerksam wird, müssen berücksichtigt und mehr oder weniger eilig in den Bericht hineingearbeitet werden. So kommt es, daß dies zuweilen nicht immer mit der genügenden Sorgfalt geschehen kann. Gibt es doch auch, um mit den Worten eines mir befreundeten Mengentheoretikers zu sprechen, für jede Arbeit eine physische Schranke. Sie verschuldet es auch, wenn manche wichtigen Anwendungen der Mengentheorie in diesem zweiten Teil ebenfalls unberücksichtigt geblieben sind. Aber doch haben die verschiedenen kritischen Bemerkungen, die der erste Teil nötig machte, eine auch für den Verfasser erfreuliche Seite. Sie zeigen ihm, daß der Bericht reichlich gelesen worden ist, und daß somit die Erwartung, die die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hegte, als sie den Gedanken faßte, einen mengentheoretischen Bericht anfertigen zu lassen, sich erfüllt haben dürfte.

Dies bestimmt mich, die allgemeine Anlage, die ich dem ersten Teil gegeben habe, beim zweiten beizubehalten. Ich hoffe, daß es mir gelungen ist, auch im zweiten Teil in möglichst knapper und doch lesbarer Weise den Suchenden über Probleme und Resultate zu orientieren, und daß deshalb dem zweiten Teil das gleiche Los beschieden sein mag, wie dem ersten.

Von verschiedenen Seiten bin ich diesmal bei meiner Arbeit mit wissenschaftlichem Rat freundlichst und bereitwilligst unterstützt worden; allen sage ich hiermit vielen Dank. Mein besonderer Dank gebührt auch der Verlagsbuchhandlung, die diesmal ihre gewohnte Nachsicht gegen den Autor, seine Wünsche und seine Korrekturen in ganz besonderem Maße geübt hat.

Königsberg i. Pr., im Oktober 1907.

A. Schoenflies.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel III.

Kapitel IV.

Kapitel V.

Seite

Kapitel VIII.

Einleitung.

Die Mengenlehre besteht seit dem dritten Teil eines Jahrhunderts; ihre Existenz erfüllt also ungefähr den Zeitraum einer Generation. Sie hat in dieser kurzen Frist Erstaunliches geleistet. Sie hat die verschiedensten Gebiete befruchtet und überall Spuren erfolgreichsten Wirkens hinterlassen.

Die Geometrie hat ihren Einfluß wohl am spätesten erfahren. Dies wird befremden; ist doch die Mengenlehre wesentlich auf geometrischem Boden erwachsen. In der Tat haben sich ihre ersten Begriffe und Sätze fast ausschließlich auf die Theorie der Punktmengen bezogen. Aber die Geometrie mußte erst wieder lernen, sich auf sich selbst und auf ihre Ebenbürtigkeit mit der Arithmetik zu besinnen. Dieser Prozeß hat erst unlängst begonnen; wir danken ihn der axiomatischen Wendung, die durch Hilbert methodisch eingeleitet wurde. Sein Ziel kann kein anderes sein, als die Geometrie, soweit sie Gestaltenlehre ist, an der Hand geometrischer, anschaulicher Axiome auf mengentheoretischer Basis aufzubauen.

Zwischen Intellekt und Anschauung besteht ein unüberbrückbarer Gegensatz. Es ist der Gegensatz, der in alter Zeit schon Heraklit bekannt war, und der unlängst in du Bois' allgemeiner Funktionentheorie eine geistvolle Erörterung gefunden hat; er kommt in den Kleinschen Worten Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik methodisch zur Geltung.[1]) Auf den gleichen Gegensatz hat kürzlich auch Poincaré hingewiesen, indem er dem analytisch operierenden Verstand die *Intuition* als gleichberechtigte Quelle mathematischen Wissens zur Seite stellte.[2]) Ich möchte hinzufügen, daß die Mathematik vielleicht in erheblich geringerem Maße eine deduktive Wissenschaft ist, als man gemeinhin glaubt. Gerade die axiomatische Richtung, die den deduktiven Charakter scheinbar am treffendsten bestätigt,

1) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (Vorlesung), Leipzig, 1902.

2) Der Wert der Wissenschaft, übersetzt von E. und H. Weber, Leipzig 1906, S. 15. Man vgl. auch M. Bôcher, The Fundamental conceptions and methods in mathematics, Am. Math. Soc. Bull. (2) 11 (1904) p. 115.

kann ich für meine Auffassung anrufen. Denn die fortschreitende Vertiefung und Erweiterung des mathematischen Wissens ist nur so möglich, daß von Zeit zu Zeit Ideen und Begriffe auftreten, die über den vorhandenen Gedankenkreis hinausgehen und damit *neue* axiomatische Grundlagen in die Mathematik einführen. Sie aber kommen wesentlich auf intuitiver Basis zustande, sind sie doch den verallgemeinernden Trieben des Intellekts, sowie der von der Anschauung geleiteten Phantasie in bevorzugtem Maße zu danken.[1]) Daß der kritische Verstand erst ihre Prüfung und Durcharbeitung zu leisten hat, ehe sie mathematisches Bürgerrecht erhalten können, liegt auf der Hand.

Wo aber könnte der Hinweis auf diese Quelle mathematischen Erkennens größere Berechtigung haben, als in der Geometrie, die doch in letzter Linie im anschaulichen Vorstellen wurzelt? Freilich kann die bloße Berufung auf die Elemente der Anschauung niemals einen mathematischen Beweisgrund abgeben. Andererseits kommen aber Sätze gestaltlicher Art nur dann zur vollen Perzeption, wenn die Anschauung ihren Inhalt zu erfassen und ihren Beweisen zu folgen vermag. Man darf verlangen, daß die Behandlung geometrischer Sätze wiederum geometrische Ideen auslöst; dies wird sie umsomehr tun, je mehr sie versteht, die anschauliche Kraft des Vorstellens zu stärken. Hierfür leistet die molekulare Methode der Mengentheorie die besten Dienste. Sie hat die Anschauung gereinigt und gekräftigt, sie hat ihr sogar eine Fülle gestaltlicher Möglichkeiten erschlossen, zu denen sie von sich aus kaum gelangt wäre. Sie hat sie dadurch zugleich in den Stand gesetzt, immer tiefer in das Innere der begrifflichen Strenge einzudringen und den Gegensatz zum intellektuellen Begreifen zu mildern.

Freilich befinde ich mich damit in einem gewissen Gegensatz zu der herrschenden arithmetisierenden Methode. Vielfach pflegt man Beweise geometrischer Sätze nur dann als exakt zu betrachten, wenn sie in arithmetischer Form unter möglichstem Ausschluß geometrischer Begriffe und Hilfsmittel abgeleitet werden und sich von anschaulichen Elementen rein halten. Die Gründe sind allgemein bekannt. Sie ruhen auf den großen Erfolgen, deren sich die analytische Methode in ihrem eigenen Gebiet erfreut und auf der klassischen Präzision und Strenge ihrer Begriffe.

Niemand wird den ungeheuren Nutzen, den die arithmetisierenden Tendenzen im Gebiet der Geometrie erzielt haben, verkennen; die mengen-

---

1) Man gestatte mir noch die triviale Bemerkung, daß selbst innerhalb eines durch Axiome festgelegten Gebietes der Fortschritt des mathematischen Wissens nicht auf dem Ziehen des syllogistischen Schlußsatzes beruht, sondern auf dem *Erfinden* geeigneter Ober- und Untersätze und der aus ihnen gebildeten Kette.

theoretische Methode ist in gewissem Sinne selbst ein Kind der Arithmetisierung. Ihre Begriffe und Methoden spiegeln all die Präzision und Strenge wieder, die das Zeichen arithmetisierender Behandlung ist. Aber die Forderung, sich auch innerhalb der Geometrie ausschließlich analytischer Sprech- und Denkweise zu bedienen, würde über das Ziel schießen. Sie schließt überdies die Gefahr ein, daß man vergißt, die räumliche und gestaltliche Bedeutung der analytischen Symbole näher in Untersuchung zu ziehen, und dadurch nur zu einem teilweisen Erkennen gelangt.

In der Tat ist dies die Entwickelung, die uns mehrfach entgegentritt. Wir besitzen zwar eine sehr reinliche analytische, aber eine viel weniger reine und präzise geometrische Sprache. Begriffe gestaltlicher Natur lassen sich in der Tat durch analytische Definitionen nicht ohne weiteres festlegen. Eine Abhilfe scheint mir nur so möglich, daß man die arithmetische und die geometrische Behandlung der Probleme zunächst gesondert durchführt, um erst nachher ihre gegenseitige Beziehung aufzusuchen. Das letzte Ziel wird es dann sein, die geometrischen Eigenschaften zu ermitteln, die notwendig und hinreichend sind, um gewisse analytische Tatsachen zu verbürgen, und ebenso umgekehrt zu prüfen, welche notwendigen und hinreichenden analytischen Eigenschaften gewisse geometrische Verhältnisse zur Folge haben. Hierin scheint mir ein ebenso einfaches wie natürliches Programm enthalten zu sein.

Damit glaube ich die Behandlung, die die geometrischen Probleme in dem folgenden Bericht finden, hinreichend begründet zu haben. Ich habe versucht, der anschaulichen Erfassung wieder zu ihrem Recht zu verhelfen. Ich hoffe, daß der Arithmetiker die von ihm geforderte Strenge nicht vermissen wird; wissen wir doch heute, daß diese Strenge auf allen Gebieten in gleicher Weise erreichbar ist. Wir danken diese Kenntnis der durch Hilbert begründeten axiomatischen Methode. Durch ihn haben wir gelernt, daß es in allen Gebieten des mathematischen Wissens auf das nämliche ankommt, auf reinliches Herausschälen der Grundtatsachen und der grundlegenden Schlußweisen. Dies ist aber auch für die Geometrie erreichbar. Freilich darf man die Vollkommenheit der Darstellung, wie sie in Hilberts mustergiltigen Grundlagen der Geometrie vorhanden ist, nicht erwarten. Dies wäre aus inneren und äußeren Gründen ausgeschlossen. Aber doch kann man leicht die beiden Hauptgruppen mathematischer Sätze bezeichnen, die den Entwickelungen des Berichtes überall zugrunde liegen. Eine erste Gruppe bilden die allgemeinen Sätze über Punktmengen; sie stellen die mengentheoretische und damit die arithmetische Grundlage

dar. Eine zweite Gruppe bilden die einfachen Sätze über Streckenzüge, Polygone und Polyeder, die ich, ohne sie axiomatisch näher zu zergliedern, als gegeben voraussetze. In ihnen ist die gestaltliche, der Anschauung zugängliche Grundlage enthalten. Sie haben mir überdies das Modell abgegeben, nach dem die höheren geometrischen Begriffe geformt sind, und stets habe ich dies so durchzuführen gesucht, daß die Anschaulichkeit nicht versagt; zum wenigsten soll die Anschauung den *Glauben* haben, daß sie den Verallgemeinerungen der einfacheren geometrischen Elemente zu folgen vermag. Die Begriffsformulierungen im Nichtanschaulichen sollen die naturgemäße Verallgemeinerung derer sein, die im Anschaulichen gelten. In dieser Weise das Abstrakte und das Anschauliche zu mengen, dürfte der geometrischen Wissenschaft am meisten entsprechen. Daß es nötig war, die ganze Fülle geometrischer Begriffe mengentheoretisch entstehen zu lassen, und daß dabei auch das Minderwichtige eine Stelle finden mußte, liegt auf der Hand.

Endlich noch ein kurzes Wort über die methodischen Hilfsmittel. Die *transfinite Induktion* und die Untersuchung ihrer Berechtigung erscheint überall in erster Linie.[1]) Ist sie es doch, die allen Grenzbegriffen zugrunde liegt, und die daher innerhalb der Mengentheorie im vordersten Vordergrund steht. Ich erblicke in ihr ein unentbehrliches Verfahren, dem ich aber andererseits einen axiomatischen Charakter beilege; ich hoffe, mit dieser Auffassung auch den Beifall Poincarés zu finden.[2])

---

1) Auf die transfinite Induktion als besonderes Schlußverfahren wies wohl zuerst Borel hin, Revue philosophique 48 (1899), p. 383. Vgl. auch Bericht I, p. 45. Den Ausdruck entnehme ich Hausdorff, Leipz. Ber. 58 (1906), p. 127. Vgl. auch noch § 10.

2) Vgl. die ausführlicheren Erörterungen im Kap. I, § 10.

Kapitel I.

Allgemeine Mengenlehre.

Einzelne Mengensätze *allgemeiner* Art hat insbesondere F. Bernstein in seiner Göttinger Dissertation gegeben; sie beziehen sich wesentlich auf das Operieren mit Ungleichungen, auf die Vergleichbarkeit der Mengen und auf indirekte Operationen, die ja im allgemeinen für Mächtigkeiten ihre Geltung verlieren. Übrigens ist die spezielle Voraussetzung, die er, sowie auch A. N. Whitehead über Vergleichbarkeit gewisser Mengen zu diesem Zweck machen, falls man ihr allgemeine Gültigkeit beilegt, mit der Vergleichbarkeit aller Mengen gleichwertig, was bisher nicht bemerkt worden ist. G. Hessenberg hat den Potenzbegriff für Ordnungszahlen auf neuer Basis eingeführt und auf Grund davon die Sätze und Formeln, die die höheren Zahlklassen betreffen, wesentlich gefördert. (§ 1.)[1])

Solange kein bindender Beweis dafür vorliegt, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann und demnach ein Aleph ist, ist es von großer Wichtigkeit, Alephsätze für *beliebige* Mengen als richtig nachzuweisen. Sätze dieser Art hat E. Zermelo gegeben, unter ihnen einen, der den eigentlichen Kern des Schröder-Bernsteinschen Äquivalenzsatzes bildet. (§ 2.)

Alephsätze sind in größerer Zahl bekannt geworden. Die bisher nur durch eine Art unbestimmter Analogie erschlossenen einfachen Alephformeln haben durch Hessenberg einen präzisen Beweis gefunden. Die allgemeinen Alephsätze zerfallen bekanntlich in zwei Klassen, je nachdem die Beweise, auf denen sie ruhen, die transfinite Induktion zulassen oder nicht. Dieser Umstand ist besonders für die Bernsteinsche Formel von prinzipieller Wichtigkeit geworden. Seine große Tragweite geht auch aus den Untersuchungen von J. König über

1) E. V. Huntington gibt eine eingehende Darstellung der einfachen Mengensätze, sowie eine Analyse der Grundbegriffe nebst solchen Beispielen, für die nur ein Teil der grundlegenden Annahmen der Mengenlehre erfüllt ist, und die auf diese Weise die Unabhängigkeit der einzelnen Annahmen voneinander erkennen lassen. Ann. of Math. (2) 6 (1905) p. 151 und 7 (1905) p. 15.

das Kontinuum hervor. Es ist leider nicht möglich, auf diesem Gebiet abschließende Resultate mitzuteilen. (§ 3 und 4.)

Über *spezielle* Mengen erwähne ich zunächst eine explizite Abzählung der rationalen Zahlen, die G. Faber gegeben hat, ferner die Sätze von F. Bernstein, daß alle abzählbaren, alle perfekten und alle abgeschlossenen Mengen eines R_ν die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben, sodann einige Sätze über die Mächtigkeit gewisser Mengen von Funktionen.

Mächtigkeitsfragen spielen auch in der Theorie der *geodätischen* Linien eine bemerkenswerte Rolle. Insbesondere hat J. Hadamard auf Scharen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hingewiesen, deren Verteilung eine gewisse Analogie mit den nirgends dichten perfekten linearen Mengen zeigt.

Die häufiger erörterte Frage, ob unter den Taylorschen Reihen die über ihren Konvergenzkreis nicht fortsetzbaren oder die fortsetzbaren als „die Regel" zu betrachten sind, erfährt mengentheoretisch dahin eine Antwort, daß beide Reihenmengen die gleiche Mächtigkeit besitzen, nämlich die des Kontinuums. Spezielle geometrische Mengen sind von M. Dehn erörtert worden. (§ 5.)

Über die Natur und die Mächtigkeit des *Kontinuums* liegen verschiedene neue Resultate vor; wesentlich erscheint besonders eine Arbeit von G. H. Hardy, die zeigt, wie man aus dem Kontinuum eine Teilmenge der Mächtigkeit $\aleph_1$ durch eine geeignete Definition konstruktiv herausheben kann; übrigens gibt es hierfür auch einfachere, fast unmittelbar evidente Methoden. (§ 6.)

Die sogenannten *logischen Paradoxien* der Mengenlehre erfahren diejenige Auflösung, die ich selbst gegeben und insbesondere auf das Russellsche Paradoxon angewandt habe. Sie beruht darauf, daß in diese Paradoxien Begriffe eingehen, die in sich widerspruchsvoll sind und deshalb kein wissenschaftliches Bürgerrecht besitzen. Ähnlich ist es mit dem von J. Richard stammenden, auch von H. Poincaré erwähnten Paradoxon, sowie mit dem Königschen Einwand gegen die Wohlordnungsfähigkeit des Kontinuums. (§ 7).

Es folgt eine Erörterung der allgemeinsten Probleme der Mengenlehre, nämlich der *Wohlordnung* und der *Vergleichbarkeit* und ihrer gegenseitigen Beziehungen. Daß in der Vergleichbarkeit ein Problem vorliegt, ist in neuerer Zeit nicht immer beachtet worden; ich habe deshalb die einschlägigen Fragen ausführlich erörtert und sie insbesondere mit dem Problem der Wohlordnung verglichen. (§ 8.)

Die neuen Beweise für die Wohlordnung der Mengen, also für denjenigen Satz, den Cantor schon frühzeitig als eine Denknotwendigkeit bezeichnet hatte, ohne indes einen Beweis dafür zu geben, sind mehrfacher Kritik begegnet. Sowohl der Zermelosche Beweis, wie auch

die analogen Untersuchungen von Hardy und Ph. Jourdain können als bindend nicht bezeichnet werden. Übrigens stützt sich der Zermelosche Beweis auf eine, der Wohlordnung im wesentlichen äquivalente axiomatische Annahme, die er als Prinzip der Auswahl bezeichnet. (§ 9.)

Eine *axiomatische* Erörterung der Grundlagen der Mengenlehre ist von verschiedenen Seiten begonnen worden, hat aber bisher zu erheblichen positiven Resultaten kaum geführt; liegen doch auf diesem Gebiet nicht bloß mathematische Schwierigkeiten vor. (§ 10.) Neuere Arbeiten haben sogar eine Skepsis gezeitigt, die mir tatsächlich unbegründet erscheint. Aber wie dem auch sei, so kann es auch in der Mengenlehre wie in jeder Wissenschaft nur einen Wahlspruch geben: *Gegen jede Resignation, aber auch gegen jede Scholastik!* —

§ 1. *Einzelne besondere Mengensätze.* 1. Man verdankt F. Bernstein die Angabe einer speziellen Bedingung, unter der man die Vergleichbarkeit zweier Mengen M und N behaupten kann.[1]) Sie lautet:

Ist $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, *so sind M und N vergleichbar.* Sei nämlich

$$M = \{m\}, \quad N = \{n\}, \quad MN = \{mn\},$$

seien ferner P und Q die beiden Teilmengen von MN, so daß $P \sim M$ und $Q \sim N$ ist. Für ein beliebiges Element m' von M sind dann nur zwei Fälle möglich; entweder gehört eine *jede* Kombination $(m'n)$ zu P oder nicht. Ist der erste Fall für irgendein Element m' erfüllt, so bilden die bezüglichen Elemente $(m'n)$ von P eine zu N äquivalente Menge. Ist dagegen der erste Fall für *kein* Element m' erfüllt, so heißt dies, daß er für jedes Element m' von M *mindestens eine* Kombination $m'n$ gibt, die nicht in P, also in Q enthalten ist. Dann enthält Q eine zu M äquivalente Teilmenge. Im ersten Fall ist also $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$, im zweiten $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$.

Eine Folgerung dieses Satzes lautet, daß zwei Mengen M und N, für die die Gleichungen

$$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}, \ \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}, \ (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^2 = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$$

bestehen, untereinander vergleichbar sind; für sie besteht nämlich alsdann auch die Gleichung

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}.$$

2. Aus den Relationen

(1) $$\mathfrak{m} < \mathfrak{n} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m}' < \mathfrak{n}'$$

folgert man unmittelbar, daß

(2) $$\mathfrak{m} + \mathfrak{m}' \leq \mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$$

1) Diss. Göttingen 1901; abgedruckt in den Math. Ann. 61 (1905) p. 117.

ist. Ein allgemeiner Beweis, daß das Gleichheitszeichen auszuschließen ist, fehlt noch. F. Bernstein beweist es für den Fall, daß $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ vergleichbar sind, und zwar mittelst des Hilfssatzes, daß, wenn $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{n} \geq \mathfrak{p}$ ist, auch $\mathfrak{m} + \mathfrak{p} > \mathfrak{n} + \mathfrak{p}$ ist; er gibt auch eine Bedingung, die für den Schluß notwendig ist. Whitehead[1]) hat die Formel auf Grund einer Annahme abgeleitet, die die Bernsteinsche Voraussetzung als allgemeines Prinzip enthält, nämlich unter der, daß $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ *immer* vergleichbar sein sollen, wenn $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{n} < \mathfrak{p}$ ist. Ich werde aber sofort zeigen, daß diese Annahme nichts anderes bedeutet, als daß *irgend* zwei Mengen vergleichbar sind.

3. Nimmt man nämlich an, daß M und N vergleichbar sind, wenn sie zu einer dritten Menge P in der Beziehung stehen, daß

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad \mathfrak{n} < \mathfrak{p}$$

ist, so kann daraus die Vergleichbarkeit *irgend* zweier Mengen Q und R gefolgert werden. Dazu bilde man die Summe

$$Q + R = S,$$

so ist S mit Q und R vergleichbar, und es sind für die Beziehung von Q, R und S zueinander an sich nur folgende vier Fälle möglich. Es ist

$$(3) \qquad \begin{array}{llll} 1.\ \mathfrak{s} = \mathfrak{q} & 2.\ \mathfrak{s} > \mathfrak{q} & 3.\ \mathfrak{s} = \mathfrak{q} & 4.\ \mathfrak{s} > \mathfrak{q} \\ \quad\ \mathfrak{s} = \mathfrak{r}, & \quad\ \mathfrak{s} = \mathfrak{r}, & \quad\ \mathfrak{s} > \mathfrak{r}, & \quad\ \mathfrak{s} > \mathfrak{r}. \end{array}$$

In den ersten drei Fällen sind Q und R ersichtlicherweise vergleichbar. Im vierten werden sie es auf Grund obiger Annahme; diese zieht daher in der Tat die Vergleichbarkeit *aller* Mengen nach sich. Hieraus ergibt sich die Äquivalenz der Whiteheadschen Annahme mit der Voraussetzung der allgemeinen Vergleichbarkeit unmittelbar. Sie ist also nicht spezieller Natur.

4. Die Frage, ob die vierte Möglichkeit überhaupt für unendliche Mengen Q und R und ihre Summe S eintreten kann oder nicht, bildet übrigens ein Problem grundlegender Art. Sie hängt enge mit der Frage zusammen, ob von den Relationen

$$(4) \qquad \mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$$

die zweite eine Folge der ersten ist oder nicht. Geht man nämlich wieder zu der Gleichung

$$M + N = P$$

zurück und weiß man, daß für P die unter (3) enthaltene vierte Möglichkeit nicht eintreten kann, so muß notwendig eine der drei ersten

1) Am. Journ. of Math. 26 (1904) p. 31.

realisiert sein, und aus der Voraussetzung $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$ folgt nun unmittelbar, daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ ist; insbesondere ist dann auch für jede Menge $2\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Der wirkliche Beweis aller dieser Relationen steht bekanntlich noch aus. Jourdain hat den Satz, daß von den Relationen (4) die zweite eine Folge der ersten ist, unter der Voraussetzung abgeleitet, daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ ist.[1]) Da sich aber diese Annahme gemäß § 2 mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}$ als gleichwertig erweisen wird und hieraus sofort $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ folgt, so kann von einem eigentlichen Resultat kaum die Rede sein.

5. Direkte und indirekte Operationen. Für die Kardinalzahlen gelten bekanntlich die Gesetze der direkten Rechnungsarten, d. h. des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens, man kann daher auch mit Gleichungen zwischen Kardinalzahlen Operationen vornehmen, die den direkten Rechnungsarten entsprechen.[2]) Für die indirekten Operationen und das Rechnen mit Ungleichungen ist dies bekanntlich nicht der Fall. Vielmehr bildet die Zulassung der indirekten Operationen und das Operieren mit Ungleichungen eines der schwierigsten Kapitel der Mengenlehre. Dementsprechend ist auf diesem Gebiet die Ausbeute an Sätzen bisher keine große.

F. Bernstein[3]) hat zwei Sätze abgeleitet, die sozusagen die *Division* und die *Subtraktion* von Gleichungen betreffen. Da die Beweise sich nicht kurz fassen lassen, setze ich nur die Sätze hierher. Sie lauten:

1. Besteht für endliches ν die Gleichung $\nu\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{n}$, so ist auch $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

2. Ist $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, so ist $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

6. *Potenzen von Ordnungszahlen.* G. Hessenberg hat den von G. Cantor für die Zahlen der zweiten Zahlklasse aufgestellten Potenzbegriff auf neuem Wege abgeleitet und auf beliebige Ordnungszahlen übertragen.[4]) Er geht dazu von speziellen einfacheren Typen des Potenzbegriffes aus, nämlich von denjenigen, die Potenzen von ω sind. Er bezeichnet sie als *Hauptzahlen* und führt sie unabhängig vom Potenzbegriff als solche Ordnungszahlen ein, die jedem ihrer Reste ähnlich

---

1) Phil. Mag. (7) 6 (1904) p. 73.

2) Eine ausführliche Darstellung hiervon gibt Whitehead. Am. Journ. of Math. Bd. 24 (1902) p. 367 und 25 (1903) p. 157. Er beweist außerdem eine Reihe wichtiger Mengenrelationen auf Grund des folgenden — freilich nur postulierten — Theorems, daß es zu jeder Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ gibt, so daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{n}$ ist. Vgl. hierzu auch Jourdain, Phil. Mag. (6) 7 (1904) p. 302.

3) Diss. Göttingen 1901; abgedruckt in Math. Ann. 61 (1905) p. 117. Dort findet man noch weitere spezielle Sätze ähnlicher Art.

4) Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906 (Heft 4 der Abhandlungen der Friesschen Schule) S. 92 (578).

sind. Auf Grund dessen zeigt er dann, daß sie solchen Gesetzen genügen, wie die Potenzen, insbesondere wie Potenzen von ω. Sie spielen überdies eine ähnliche bevorzugte Rolle wie die ε-Zahlen.[1])

Ist nun α eine *beliebige* Ordnuugszahl und setzt man

$$\alpha = \omega \cdot \alpha' + \nu = \beta + \nu,$$

wo ν endlich ist, so kann man die allgemeine Potenz von μ durch die Gleichung

$$\mu^\alpha = \mu_0^\beta \cdot \mu^\nu$$

definieren, wo μ_0 die größte Hauptzahl ist, die kleiner als μ ist.

Von weiteren Resultaten Hessenbergs erwähne ich insbesondere die Verallgemeinerung des von Cantor für die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse aufgestellten Kettenbruchverfahrens[2]) und der auf ihm beruhenden Normalform. (Vgl. auch § 3.)

§ 2. *Die Sätze von Zermelo.* Aus den Alephgleichungen

$$\aleph = \aleph + \aleph' = \aleph + \aleph'' \cdots = \aleph + \aleph^{(\nu)} = \cdots$$

folgt, welches auch diese Alephs sein mögen, durch Addition aller Gleichungen unmittelbar, daß

$$\aleph = \aleph + \sum_1^\infty \aleph^{(\nu)}$$

ist. Dies gilt nach Zermelo auch für *beliebige* Mengen, es besteht also der *Satz:*

Sind M, P_1, P_2 ... P_ν ... irgendwelche Mengen von der Art, daß

(1) $$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}_2 = \cdots = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}_\nu = \cdots$$

ist, so ist auch

(2) $$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \sum_1^\infty \mathfrak{p}_\nu.$$

Aus den Gleichungen (1) folgt nämlich zunächst, daß man M so in zwei Teilmengen M_ν und P'_ν zerlegen kann, daß für jedes ν

$$M = (M_\nu, P'_\nu), \quad M_\nu \sim M, \quad P'_\nu \sim P_\nu$$

ist. Aus der Aquivalenz von M und M_1 folgt nun weiter für M_1 eine solche Zerlegung

$$M_1 = (M'_2, Q_2),$$

---

1) Solche Potenzen von ω, deren Exponent selbst eine Potenz von ω, also eine Hauptzahl ist, nennt Hessenberg ϑ-Zahlen.

2) Diese Verallgemeinerung gab auch F. Hausdorff; vgl. Kap. II, § 5.

daß $M'_2 \sim M_1 \sim M$ und $Q_2 \sim P'_2$ ist. Man hat daher weiter für M die Zerlegung

$$M = (M_1, P'_1) = (M'_2, P'_1, Q_2).$$

So kann man fortfahren und erhält, wenn man noch P'_1 durch Q_1 ersetzt,

$$M = (M'_\nu, Q_1, Q_2 \ldots Q_\nu); \; Q_\nu \sim P_\nu.$$

Da nun M'_ν eine Teilmenge von $M'_{\nu-1}$ ist, so folgt leicht, daß diese Formel die transfinite Induktion gestattet, und man erhält schließlich

$$M = (M'_\omega, Q_1, Q_2 \ldots Q_\nu \ldots),$$

wo in Cantorscher Bezeichnung $M'_\omega = \mathfrak{D}\{M'_\nu\}$ ist.[1] Es ist daher auch

(3) $$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'_\omega + \sum_1^\infty \mathfrak{q}_\nu.$$

Die hier auftretende Mächtigkeit $\mathfrak{m}'_\omega$ braucht allerdings keineswegs mit $\mathfrak{m}$ identisch zu sein[2]; trotzdem kann man aber aus dieser Gleichung die Gleichung (2) ableiten.

Setzt man nämlich zunächst alle $\mathfrak{p}_\nu$ einander gleich und gleich $\mathfrak{p}$, so folgt aus (3)

(4) $$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'_\omega + \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \mathfrak{m}'_\omega + (\mathfrak{a} + \mathfrak{a})\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}\mathfrak{p},$$ [3]

womit der Satz für diesen speziellen Fall bewiesen ist. Ebenso folgt, daß auch für jedes ν

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}\mathfrak{p}_\nu$$

ist und daraus wieder gemäß (3)

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'_\omega + \sum \mathfrak{a}\mathfrak{p}_\nu,$$

woraus wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + 1$ endlich auch die Gleichung (2) zu schließen ist.

Der vorstehende Satz enthält den Schröder-Bernsteinschen Äquivalenzsatz als Folgerung. Ist nämlich

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p} + \mathfrak{q},$$

---

1) Ich halte die Cantorschen Bezeichnungen $\mathfrak{D}\{M_\nu\}$ und $\mathfrak{M}\{P_\nu\}$ für sehr zweckmäßig und werde im Bericht vielfach davon Gebrauch machen. Ihre Definition ist bekanntlich die folgende. Die Menge $\mathfrak{D}\{M_\nu\}$ besteht aus den Elementen, die in *allen* M_ν enthalten sind, während $\mathfrak{M}\{M_\nu\}$ alle Elemente enthält, die in *mindestens* einem M_ν vorkommen. Vgl. Bericht I, p. 4 u. 6, sowie Cantor, Math. Ann. 17, p. 355. Ich werde die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{D}$ auch als *kleinste Gesamtmenge* oder *Summe* resp. als *größte gemeinsame Teilmenge* der Mengen $\{M_\nu\}$ bezeichnen.

2) Die Menge M'_ω kann sich sogar auf Null reduzieren. Man wähle z. B. $M = \{2\nu\}$, $P_\nu = 2\nu - 1$ und $Q_\nu = 2\nu$.

3) Diese Gleichung leitet im Anschluß an Zermelo auch Ph. Jourdain ab; Phil. Mag. (6) 7 (1904) p. 71.

so hat man gemäß (4) auch

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \alpha\mathfrak{p} + \alpha\mathfrak{q},$$

und daraus wieder

$$(5) \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m} + (\alpha + 1)\mathfrak{p} + \alpha\mathfrak{q} = \mathfrak{m} + \alpha\mathfrak{p} + (\alpha + 1)\mathfrak{q} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{q}.$$

Ist nun, wie es dem Äquivalenzsatz entspricht,

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} + \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{q},$$

so folgt sofort

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \mathfrak{m} + \mathfrak{q} = \mathfrak{n}.$$[1]

Hieraus folgt noch, daß, wie in § 1 bemerkt wurde, die Gleichungen

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m} = \alpha\mathfrak{m}$$

gleichwertig sind. Denn die zweite ist gemäß (4) eine Folge der ersten; andrerseits folgt aus der zweiten auch wieder $\mathfrak{m} = (\alpha + 1)\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}$.

§ 3. *Alephsätze.* Bei der Wichtigkeit der Alephsätze lasse ich jedem Satz einen, wenn auch knapp gehaltenen Beweis folgen. Von prinzipieller Bedeutung ist der Umstand, daß man zwei verschiedene Typen von Alephs zu unterscheiden hat, die zwei verschiedenartigen definierenden Gleichungen genügen.[2] So hat man für endliches ν

$$(1) \qquad \aleph_\nu = \aleph_0 + \aleph_1 + \cdots + \aleph_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \aleph_\lambda,$$

während dagegen für $\aleph_\omega$ die definierende Gleichung

$$(2) \qquad \aleph_\omega = \aleph_0 + \aleph_1 + \cdots + \aleph_\nu + \cdots = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \aleph_\lambda,$$

besteht; in dieser Gleichung erstreckt sich also die Summation nur über alle diejenigen Alephs, die kleiner als $\aleph_\omega$ sind. Ähnlich ist es für alle Alephs, die keinen unmittelbaren Vorgänger besitzen. Hieraus fließt eine wichtige Folgerung. Um nämlich Sätze für die Alephs

1) Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}$, so folgert man leicht, daß auch $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}' + \mathfrak{p}'$ ist, falls $\mathfrak{m}' \geq \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}' \leq \mathfrak{p}$ ist; a. a. O. S. 38. Einen neuen Beweis des Äquivalenzsatzes hat kürzlich auch J. König gegeben C. R. 143 (1906) p. 110. Er verbindet die Elemente beider Mengen zu Paaren und Paarfolgen und zeigt, daß man auf Grund derartiger Paarung eine eineindeutige Zuordnung für alle Elemente beider Mengen herstellen kann. Es sollen damit die von Poincaré gegen die Beweisbarkeit der vollständigen Induktion erhobenen Bedenken vermieden werden. Vgl. Revue de métaphysique et morale (1905 u. 1906). Demselben Zweck soll auch ein neuer von Bernstein gegebener Beweis dienen; ebenda, p. 953. Vgl. übrigens auch § 10.

2) Vgl. auch § 10.

zweiter Art zu beweisen, kommt man mit der gewöhnlichen Induktion nicht aus, sondern bedarf vielmehr der transfiniten Induktion. Deren Anwendbarkeit ist aber bekanntlich nicht selbstverständlich.

1. *Seien* $\aleph$ *und* $\aleph'$ *irgend zwei Alephs und sei* $\aleph' \leqq \aleph$, *so ist*

$$\aleph \cdot \aleph' = \aleph. \tag{3}$$

Es liegt zunächst nahe, den Beweis in ähnlicher Weise zu führen, wie den der Formel $\aleph_0^2 = \aleph_0$. Bildet man nämlich eine gewöhnliche unendliche Doppelreihe $\sum a_{ik}$ wohlgeordneter Mengen vom Typus ω, und ordnet sie in diagonaler Weise an, indem man diejenigen Glieder a_{ik} zusammenfaßt, für die $i + k = \nu$ ist, so kommt diese Umordnung darauf hinaus, jedes Element einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω durch je eine *endliche* Zahl von Elementen zu ersetzen. Ähnliches soll gelten, wenn man von der wohlgeordneten Menge $\aleph$ ausgeht und mit ihr ein Doppelschema in der Weise bildet, daß die Vertikalreihen wohlgeordnete Mengen vom Typus $\aleph'$ bilden. Doch bedarf der Begriff der diagonalen Anordnung und die Möglichkeit dieser Zusammenfassung einer präziseren Erörterung.[1])

Präzise Beweise der Formel (3) sind kürzlich von G. Hessenberg gegeben worden.[2]) Für eine Zahl $\xi < \alpha^\beta$ der zweiten Zahlklasse hat Cantor die Formel

$$\xi = \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha_1 + \alpha^{\beta_2} \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha^{\beta_n} \cdot \alpha_n$$

aufgestellt, wenn

$$\beta > \beta_1 > \cdots > \beta_n \geq 0, \ \alpha > \alpha_i > 0$$

ist.[3]) Diese Formel läßt sich auf beliebige Ordnungszahlen ausdehnen und führt zunächst zu der Folgerung, daß jede *Anfangszahl* eine ε-Zahl ist; als Anfangszahl bezeichnet Hessenberg die erste Zahl einer jeden Zahlklasse, der also Ordnungszahlen gleicher Mächtigkeit nicht vorangehen.[4])

Ist nun ω_ν die Anfangszahl von $\aleph_\nu$, und ist $\alpha < \omega_\nu$ und $\beta < \omega_\nu$, so folgt sofort

$$\alpha < \alpha^\beta < \alpha^{\omega_\nu} \text{ und } \alpha^{\omega_\nu} = \omega_\nu,$$

---

1) In obiger Form erscheint der Beweis z. B. in Bernsteins Dissertation (vgl. S. 7 Anm. 1). Eine ausführliche Darstellung dieses Beweises liegt nicht vor.

2) Grundbegriffe der Mengenlehre S. 591 ff. und dies. Jahresb. 16 (1907) S. 130.

3) Vgl. Math. Ann. 49 (1897) S. 237 u. Bericht I, S. 48.

4) Diesen Satz hatte Hessenberg unter Benutzung der Formel $\aleph^2 = \aleph$ bereits in der S. 9 genannten Schrift bewiesen. Der obige Beweis schlägt den umgekehrten Weg ein. Dabei benutzt Hessenberg statt des von ihm eingeführten Potenzbegriffes denjenigen, den Hausdorff auf allgemeinerer Basis definiert hat, und gelangt so zu einem sehr einfachen Beweis des obigen Satzes. Vgl. Kap. II.

und daraus ergibt sich weiter

$$\alpha\beta < \omega_\nu \text{ und } \alpha + \beta < \omega_\nu.$$

Hieraus läßt sich aber die Formel (3) leicht entnehmen.

2. *Für jedes* $\aleph$ *und jedes endliche* ν *ist* $\aleph^\nu = \aleph$. Der vorstehende Satz liefert nämlich zunächst, falls $\aleph' = \aleph$ gesetzt wird, $\aleph^2 = \aleph$. Hieraus ergibt sich durch gewöhnliche Induktion sofort die behauptete Gleichung. Die Zulassung der transfiniten Induktion versteht sich jedoch keineswegs von selbst; in der Tat kann die Formel für den transfiniten Exponenten $\aleph_0$ nicht bewiesen werden, wie ja überhaupt die Potenzgleichungen den Übergang von ν zu $\aleph_0$ nicht gestatten.[1]

3. *Ist* $\aleph' \geq \aleph$, *so ist*

$$2^{\aleph'} = \aleph^{\aleph'}. \tag{4}$$

Man hat nämlich zunächst

$$2^{\aleph'} > \aleph' \geq \aleph,$$

und hieraus durch Potenzierung mit $\aleph'$ gemäß Satz (2),

$$2^{\aleph'} \geq \aleph^{\aleph'}.$$

Andererseits ist offenbar auch

$$2^{\aleph'} \leq \aleph^{\aleph'},$$

woraus der Satz unmittelbar folgt. Die Herleitung zeigt, daß die Formel auch für jedes $\aleph < 2^{\aleph'}$ gilt.[2]

4. *Für endliche positive Zahlen* μ *und* ν *ist*

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu \cdot \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu}.\text{[3]} \tag{5}$$

Zunächst ist die Formel für $\mu \leq \nu$ eine einfache Folge des dritten Satzes, resp. der aus ihm folgenden Gleichung

$$2^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu},$$

aus der sie durch Multiplikation mit $\aleph_\mu$ folgt. Ist dagegen $\mu > \nu$, so verfahren wir folgendermaßen.

Wir ersetzen $\aleph_\mu$ seiner Definition gemäß durch die wohlgeordnete Menge aller transfiniten Zahlen ω_α, deren Mächtigkeit $\overline{\omega}_\alpha$ gleich oder kleiner als $\aleph_{\mu-1}$ ist. Dann zeigen wir zunächst, daß

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} \leq \sum \overline{\omega}_\alpha^{\aleph_\nu} \tag{6}$$

---

1) Das einfachste Beispiel liefert die Tatsache, daß $\lim 2^\nu$ nicht 2^α liefert.

2) Vgl. Ph. Jourdain, Phil. Mag. (6) 7 (1904) p. 302 und (6) 8 (1905) p. 49.

3) Vgl. F. Hausdorff, Jahresber. d. D. M. V. 13 (1904) p. 570.

ist, wo die Summe sich über alle die genannten Ordnungszahlen ω_α erstreckt. Die linke Seite stellt nämlich die Belegungsmenge von $\aleph_\nu$ mit $\aleph_\mu$ dar; ihre Elemente m kann man daher als wohlgeordnete Mengen der Mächtigkeit $\aleph_\nu$ betrachten, die sich aus irgendwelchen dieser ω_α als Elementen aufbauen. Für diese Zahlen ω_α gibt es nun entweder eine größte, oder aber es wird durch sie eine Limeszahl bestimmt, die — den allgemeinen Eigenschaften der Ordnungszahlen entsprechend[1]) — notwendig eine Zahl ist, die in $\aleph_\mu$ vorkommt und daher auch einen Summanden der rechten Seite bildet. Jedes dieser Elemente m muß daher auch in mindestens einer derjenigen Belegungsmengen auftreten, über die sich die Summation der rechten Seite erstreckt.

Aus der so bewiesenen Relation (6) folgt nun unmittelbar weiter

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} \leq \bar{\omega}_\alpha^{\aleph_\nu} \leq \sum \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu} \leq \aleph_\mu \cdot \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu}.$$

Andererseits folgt aus $\aleph_{\mu-1} < \aleph_\mu$, daß auch $\aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu} \leq \aleph_\mu^{\aleph_\nu}$ ist, und hieraus durch Multiplikation mit $\aleph_\mu$ endlich

$$\aleph_\mu \cdot \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu} \leq \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Mit diesen beiden Relationen ist der Satz bewiesen.

Man kann die Formel (5) auf beliebiges ν und μ ausdehnen, vorausgesetzt, daß die in sie eingehende Ordnungszahl $\mu - 1$ wirklich existiert, also μ keine Limeszahl ist. Der Beweis beruht nämlich darauf, daß auf der linken Seite von (6) die in das Element m der Belegungsmenge eingehenden Zahlen ω_α höchstens von der Mächtigkeit $\aleph_{\mu-1}$ sind. Er ist daher auf transfinites μ übertragbar, den einen Fall ausgenommen, daß μ eine Limeszahl ist. Denn alsdann brauchen die Mächtigkeiten der bezüglichen ω_α eine von $\aleph_\mu$ *verschiedene* obere Grenze nicht mehr zu haben.[2])

5. *Der Bernsteinsche Satz. Für endliche Ordnungszahlen μ und ν ist*

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu. \tag{7}$$

Falls $\mu \leq \nu$ ist, folgt dies wieder unmittelbar aus Satz (3). Für $\mu > \nu$ ergibt es sich durch gewöhnliche Induktion. Wir gehen dazu von der

1) Vgl. Bericht I, S. 44 ff.

2) Ist z. B. $\nu = o$, $\mu = \omega$, so kann man links in Relation (8) die steigenden Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2 \cdots \omega_\nu, \cdot\cdot$ so wählen, daß jede einem andern $\aleph$ angehört und dann haben diese ω_ν bereits keine in $\aleph_\omega$ selbst enthaltene Limeszahl.

Relation (6) aus und nehmen an, der Satz sei für jedes $\lambda \leq \mu - 1$ bereits bewiesen, so ist damit für jedes in ihr auftretende $\overline{\omega}_\alpha$

$$\overline{\omega}_\alpha^{\aleph_\nu} = \overline{\omega}_\alpha \cdot 2^{\aleph_\nu},$$

und daher folgt durch Einsetzen

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} \leq 2^{\aleph_\nu} \cdot \sum \overline{\omega}_\alpha \leq 2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu.$$

Andererseits folgert man aus Satz (4) wiederum

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} \geq 2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu,$$

womit der Bernsteinsche Satz für die genannten Werte von μ und ν bewiesen ist.[1])

§ 4. *Die Sätze von J. König.*[2]) *Sei* $\{M_\nu\} = M_1, M_2, M_3 \ldots$ *eine Folge unendlicher Mengen und sei*

$$S = \sum M_i, \quad P = \prod M_i,$$

so bestehen für die Mächtigkeiten $\mathfrak{s}$ *und* $\mathfrak{p}$ *die Relationen*

(1) $$\mathfrak{s} \leq \mathfrak{p} < \mathfrak{s}^{\mathfrak{a}},$$

(2) $$\mathfrak{s}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}}.$$

Ist nämlich m_i irgend ein Element von M_i, so hat jedes Element p von P die Form

$$p = (m_1, m_2, \cdots m_\nu, \ldots).$$

Diejenigen dieser Elemente, bei denen alle m_i konstant sind und nur m_ν variabel, bilden eine zu M_ν äquivalente Teilmenge P_ν von P. Die Summe aller Mengen M_ν ist also einer Teilmenge von P äquivalent, und daher folgt zunächst $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{p}$. Andererseits ist jedes p notwendig ein Element derjenigen Menge, die durch Belegung von $\aleph_0$ mit S entsteht, und daher ist $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{s}^{\mathfrak{a}}$.

Wird nun noch Gleichung (1) in die $\mathfrak{a}$-te Potenz erhoben, so folgt schließlich die Gleichung (2).

2. *Falls die Mächtigkeiten der Mengen* M_i *beständig wachsen, ist*

(3) $$\mathfrak{p} > \mathfrak{s}.$$

1) Der Beweis versagt wiederum, falls μ eine Limeszahl ist. Da er auf der vollständigen Induktion beruht, kann er auf transfinites μ überhaupt nicht ausgedehnt werden.

2) Verhandl. des 3. Internat. Math. Kongr. Heidelberg 1904 p. 144; und Math. Ann. 60 (1905) p. 177.

Wäre nämlich $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}$, so wäre für P und S eine eineindeutige Abbildung möglich. Sei P_k die Teilmenge von P, die dabei der Menge M_k entspricht, und p_k ein Element dieser Menge, so bilden die in diesen Elementen p_k enthaltenen Elemente m_ν für jedes ν höchstens eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}_k$; für $\nu > k$ gibt es also Elemente von M_ν, die in P_k nicht auftreten. Sei insbesondere m'_ν ein solches Element von M_ν, dann folgt unmittelbar, daß das Element

$$p' = (m_1, m'_2, m'_3, \cdots m'_\nu \ldots)$$

in keinem P_k auftreten kann; die Annahme der Äquivalenz führt also auf einen Widerspruch.

3. *Es besteht für beliebiges μ die Relation*

(4) $$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} > \aleph_{\mu+\omega}.$$

Wählt man nämlich jede Menge M_i als ein Aleph, so daß sie die Folge

$$\aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} < \aleph_{\mu+2} < \cdots$$

bilden, so hat man $\mathfrak{s} = \aleph_{\mu+\omega}$, und daher folgert man aus $\mathfrak{p} > \mathfrak{s}$ gemäß dem obigen Satz (1) unmittelbar die vorstehende Relation.

§ 5. *Spezielle Mengen.*[1])

1. G. Faber[2]) gibt eine wirkliche Abzählung der rationalen Zahlen des Intervalls 0 . . 1, und zwar unter Benutzung eines Zahlensystems, dessen Grundzahlen wachsen.[3]) Sind

$$e_1 < e_2 < e_3 \cdots < e_\nu < \cdots$$

solche Zahlen, so kann jeder Bruch p/q bei geeigneter Wahl der e_ν auf eine und nur eine Weise in die *endliche* Form

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1}{e_1} + \frac{\alpha_2}{e_1 \cdot e_2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_\nu}$$

gebracht werden; und zwar ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür die, daß von einem bestimmten λ an q Teiler von $e_1 \cdot e_2 \cdots e_\lambda$ ist. Anderseits läßt sich jede ganze Zahl m auf eine Weise in die Form setzen

$$m = b_1 + b_2 e_1 + \cdots + b_\mu e_1 e_2 \cdots e_{\mu-1},$$

1) Über Kontinuum vgl. § 6 und über Ultrakontinuum Kap. II § 3. Vgl. ferner die Sätze im Bericht I S. 52.

2) Math. Ann. 60 (1905) p. 196.

3) Zahlensysteme dieser Art benutzte wohl zuerst Strauß; vgl. auch Bericht I S. 103.

und die Zuordnung kann nun durch die a_i und b_i in der Weise geschehen, daß man m und p/q einander zuweist, falls $\mu = \nu$ und $a_i = b_i$ ist. Man erfüllt alle Bedingungen z. B. dadurch, daß man $e_1 = 2$, $e_2 = 3, \cdots e_\nu = \nu + 1$ wählt; dann wird *jede* Zahl p/q durch eine *endliche* Summe darstellbar.

2. F. Bernstein hat die Mächtigkeit von Punktmengen besonderer Art bestimmt und ist zu folgenden Resultaten gelangt.

Die Mächtigkeit aller abzählbaren Teilmengen eines Raumes R_ν ist gleich $\mathfrak{c}$. Jede solche Menge ist nämlich eine Belegung einer abzählbaren Menge mit $\mathfrak{c}$, daher ist die Mächtigkeit aller dieser Mengen höchstens $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$. Da andererseits auf jeder Geraden eines R_ν eine solche Menge beliebig gewählt werden kann, so ist ihre Mächtigkeit auch mindestens gleich $\mathfrak{c}$.[1])

Die Menge P aller perfekten, sowie auch aller abgeschlossenen Mengen eines R_ν hat ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Aus dem vorstehenden Satz kann dies für die Gesamtheit P aller *perfekten* Mengen fast unmittelbar geschlossen werden. Jede perfekte Menge läßt sich nämlich als Ableitung einer abzählbaren Menge auffassen, durch die sie eindeutig bestimmt ist; ihre Gesamtheit P hat daher gemäß (1) höchstens die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Andererseits wird eine Teilmenge von P der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ wieder durch die sämtlichen Geraden des R_ν geliefert, und damit ist der Satz für die perfekten Mengen bewiesen.

Nun ist jede abgeschlossene Menge in der Form $R + S$ darstellbar, wo R abzählbar und S perfekt ist; die Mächtigkeit aller abgeschlossenen Mengen, die denselben Bestandteil S besitzen, ist daher dem ersten Satz gemäß ebenfalls $\mathfrak{c}$. Ihre Gesamtheit hat mithin die Mächtigkeit $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$.

Die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ kommt nach F. Bernstein auch den sämtlichen Punktmengen erster oder zweiter Kategorie[2]) zu, die durch abgeschlossene Punktmengen entstehen.[3])

---

1) Auch die sämtlichen Teilmengen einer abzählbaren Menge haben offenbar die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Dies scheint zuerst Bettazzi ausgesprochen zu haben, Period. di mat. 13 (1898) p. 190.

2) Für die Definition dieser Menge vgl. Bericht I, S. 108. Bei den von Bernstein betrachteten Mengen sind alle Q_ν abgeschlossen.

3) Die obigen Punktmengensätze gab F. Bernstein in seiner Dissertation. Göttingen 1901, sowie Math. Ann. 61 (1905) p. 146. Einen Beweis dieser Sätze gibt auch B. Levi, Rend. Ist. Lomb. (2) 35 (1902) p. 863; er fügt hinzu, daß auch schon die isolierten Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben, was ebenso beweisbar ist. Vgl. auch Gött. Nachr. 1904, S. 6, wo Bernstein auf einen Einwand von Levi antwortet.

3. G. Cantor[1]) hatte gelegentlich die Vermutung ausgesprochen, daß die Mächtigkeit aller integrierbaren Funktionen gleich der der stetigen Funktionen, also gleich $\mathfrak{c}$ ist.[2]) Sie ist aber, wie Jourdain gezeigt hat, *gleich der Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ aller Funktionen.*[3])

Geht man nämlich von einer im Intervall δ stetigen Funktion $f(x)$ aus und nimmt auf δ eine perfekte lineare Menge S vom Inhalt Null an, so kann man die Funktionswerte in den Punkten von S noch beliebig innerhalb endlicher Schranken wählen, ohne daß die so modifizierte Funktion aufhört, integrierbar zu sein. Diese Funktionen entstehen aber aus $f(x)$ durch Belegung von S mit einer Wertmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und haben daher schon die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$.

Da die Menge aller Funktionen, die durch konvergente Reihen stetiger Funktionen darstellbar sind, die Mächtigkeit $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ hat, so kann, wie Jourdain hinzufügt, nicht jede integrierbare Funktion in dieser Weise dargestellt werden.[4])

Nach einem Satz von G. E. Schmidt[5]) ist die Menge aller reellen stetigen Funktionen $\{\varphi(x)\}$ einer Variablen, die ein volles Orthogonalsystem bilden, abzählbar. Wie F. Riesz bemerkt, ist dies nur ein spezieller Fall eines allgemeineren Satzes, daß nämlich auch jede isolierte Menge stetiger Funktionen abzählbar ist; die Menge heißt in Anlehnung an den Sprachgebrauch der Punktmengen isoliert, wenn keine ihrer Funktionen Grenzfunktion unendlich vieler Funktionen der

---

1) Math. Ann. 21 (1883) p. 590.

2) Auch die Mächtigkeit aller monotonen Funktionen ist gleich $\mathfrak{c}$; vgl. Hausdorff, Leipz. Ber. 59 (1907) p. 111.

3) Vgl. Phil. Mag. (6) 6 (1903) p. 323, wo jedoch die Darstellung nicht exakt ist, u. Mess. of Mat. (2) 33 (1903) p. 78. Dort hat Jourdain den obigen Satz folgendermaßen verallgemeinert. Sei im Raum R von $\mathfrak{e}$ Dimensionen eine $\mathfrak{b}$-wertige Funktion definiert, so daß diese Werte aus einer Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ ausgewählt werden können; ferner sei die Funktion im ganzen R bestimmt, falls sie an einer Punktmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{d}$ gegeben ist, so ist die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ der Funktionsklasse gegeben durch

$$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}, \quad \text{für} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{d}^{\mathfrak{e}}.$$

Eine Zusammenstellung seiner Resultate gibt Jourdain im Journ. f. Math. 128 (1905) S. 169.

4) Der Wert dieses Resultates besteht darin, daß man es durch bloße Mächtigkeitsbetrachtung erhält. Aus dem allgemeinen Theorem von R. Baire (Bericht I, S. 234) folgt es übrigens unmittelbar.

5) C. R. 143 (1906) p. 955. Die Orthogonalität ist definiert durch die Gleichungen

$$\int_0^1 [\varphi(x)]^2 \, dx = 1; \qquad \int_0^1 \varphi(x)\, \varphi_1(x)\, dx = 0.$$

Menge ist.[1]) Eine abzählbare Menge bilden auch, wie E. Maillet zeigt, gewisse Gattungen von Lösungen von Differentialgleichungen mit Polynomen als Koeffizienten und von ähnlichen Reihenentwickelungen, falls man die Verschiedenheit zweier Gattungen in geeigneter Weise definiert.[2])

4. Es war lange eine stillschweigende Annahme, daß eine im Einheitskreis konvergente Reihe „der Regel nach" über den Kreis fortsetzbar sei, und daß es eine große Besonderheit darstelle, wenn der Einheitskreis zugleich ihre natürliche Grenze bildet. Die neueren Arbeiten über die singulären Stellen einer Taylorschen Reihe haben diese Ansicht bekanntlich gründlich zerstört; es hat keinerlei Schwierigkeit, Taylorsche Reihen, die nicht fortsetzbar sind, mannigfach anzugeben. Wenn man sich aber jetzt dahin ausgesprochen hat[3]), daß die nicht fortsetzbaren Reihen „die Regel bilden", so schießt diese Behauptung mengentheoretisch über das Ziel.

Da nämlich die Summe einer nicht fortsetzbaren und einer fortsetzbaren Reihe wieder eine nicht fortsetzbare Reihe liefert, so kann man durch Addition *einer* nicht fortsetzbaren Reihe zu den sämtlichen fortsetzbaren Reihen der Menge $\mathfrak{F}$ lauter *verschiedene* nicht fortsetzbare Reihen der Menge $\mathfrak{N}$ erhalten. Es ist also zwar die Menge $\mathfrak{F}$ einer Teilmenge von $\mathfrak{N}$ äquivalent, aber daraus kann bekanntlich die obige Folgerung nicht geschlossen werden. Vielmehr ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{n} = \mathfrak{c}$. Denn die nicht fortsetzbaren Reihen haben als Teilmenge *aller* Taylorschen Reihen höchstens die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Andererseits haben die fortsetzbaren Reihen auch mindestens die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$; eine Teilmenge von $\mathfrak{F}$ der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ ergibt sich schon, indem man *einem* Koeffizienten eine Wertmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ beilegt. Beide Reihenarten haben daher die *gleiche Mächtigkeit.*[4])

Hadamard hat die Mächtigkeit gewisser *geodätischer Linien* auf Flächen negativer Krümmung und höheren Zusammenhangs betrachtet.[5]) Durch einen Punkt O der Fläche gehen bekanntlich drei Arten; geschlossene[6]) oder solche, die sich einer geschlossenen asymptotisch nähern; solche, die sich ins unendliche entfernen, und drittens solche,

1) C. R. 143 (1906) p. 738. Dort findet sich auch eine Ausdehnung des Satzes auf allgemeinere analog definierte Mengen reeller Funktionen. Vgl. auch Gött. Nachr. 1907, S. 1. Näheres über diese Begriffe enthält Kap. VII.

2) Bull. de la Soc. Math. 30 (1902), p. 195.

3) Vgl. z. B. A. Pringsheim, Math. Ann. 44 (1894) S. 50.

4) Es ist evident, daß auch die Menge aller ganzen transzendenten Funktionen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat; vgl. Jourdain, a. a. O. S. 210.

5) Journ. de math. (4) 5 (1898) p. 64 ff.

6) Diese existieren, sobald die Zusammenhangszahl größer als 2 ist, in unendlicher Zahl.

die im Endlichen innerhalb eines Flächenstücks bleiben, das von abzählbar unendlich vielen geschlossenen geodätischen Linien $\{L_i\}$ begrenzt wird. Sie nähern sich den Linien L_i unendlich oft asymptotisch, um sich sofort wieder von ihnen zu entfernen, und zwar so, daß ihre zwischen zwei Näherungspunkten liegenden Bogenlängen beständig wachsen. Diese Geodätischen bilden für jeden Punkt eine Menge L, die man umkehrbar eindeutig auf eine perfekte nirgends dichte Punktmenge beziehen kann. Ihre von O ausgehenden Richtungen schneiden nämlich einen um O geschlagenen Kreis in einer solchen Punktmenge. Jeder Richtung, die in einen von diesen Richtungen freien Winkelraum fällt, entspricht also eine Geodätische erster oder zweiter Art, wie auch umgekehrt diese Winkelräume die gesamte Menge L bestimmen.

Mächtigkeitsfragen sind kürzlich auch für solche geodätischen Linien studiert worden, die auf Polyedern verlaufen.[1]) Man gehe von zwei Punkten p' und p'' zweier benachbarter Flächen aus, die man durch einen ihre Schnittkante kreuzenden kürzesten Streckenzug verbinden kann, und setze diesen Streckenzug über p' und p'' in analoger Weise fort. Bei unendlich oft wiederholter Abwickelung des Polyeders auf eine Ebene verwandelt sich eine solche Geodätische in eine unbegrenzte Gerade.[2]) Werden nun die Flächen des Polyeders irgendwie mit den Ziffern 1, 2, ... N versehen, so kann man mit Stäckel jeder Geodätischen eine unendliche Folge der Ziffern 1, 2, ... N zuordnen, nämlich die Ziffern derjenigen Flächen, die sie durchsetzt. Im allgemeinen entspricht einer unendlichen Ziffernfolge, die überhaupt eine Geodätische liefert, auch nur *eine;* denn die zugehörige ebene Gerade tritt bei geringster Drehung um einen ihrer Punkte aus den Flächen, die sie durchsetzt, heraus. Falls daher eine Ziffernfolge mehr als eine Geodätische bestimmt, so erfüllen sie in der Ebene einen Parallelstreifen. Die Menge solcher Parallelstreifen dürfte, wenn sie überhaupt für ein Polyeder vorhanden sind, höchstens abzählbar sein, und daraus würde folgen, daß die Menge der Ziffernfolgen, denen nur je eine Geodätische entspricht, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

Der abzählbaren Menge der periodischen Folgen entsprechen Geodätische, die sich schließen, die also in der Weise zu ihrem Anfangspunkt zurückkehren, daß Endrichtung und Anfangsrichtung überein-

---

1) Staeckel, Rend. Circ. mat. Pal. 22 (1906) p. 141. Über solche geodätische Linien vgl. auch C. Rodenberg, ebenda 23 (1907) p. 107.

2) Falls die Gerade in der Ebene eine Polyederecke trifft, wird ihre Fortsetzung auf der Fläche in dem bezüglichen Eckpunkt unbestimmt. Solche „singulären" Geodätischen gibt es offenbar von jedem Punkt des Polyeders aus nur eine abzählbare Menge.

stimmen. Auch hier kann einer einzigen Folge eine einzige Geodätische oder ein ganzer Parallelstreifen entsprechen.

5. Nach einem Satz von M. Dehn gibt es sowohl im euklidischen wie im nichteuklidischen Raum eine nicht abzählbare Menge von Polyedern, die inhaltsgleich, aber nicht endlichgleich sind.[1])

§ 6. *Das Kontinuum.*[2]) Das Kontinuumproblem hat insofern eine Förderung erfahren, als es Hardy gelungen ist, *eine Teilmenge der Mächtigkeit* $\aleph_1$ *aus dem Kontinuum konstruktiv herauszuheben.*[3]) Sind alle a_ν ganze positive Zahlen, so kann man der Folge

$$0, \ a_1 a_2 a_3 \ldots a_\nu \ldots$$

einen unendlichen dyadischen Bruch entsprechen lassen, der aus lauter Nullen besteht, mit Ausnahme derjenigen Stellen, die durch die ganzen Zahlen $\{a_\nu\}$ bestimmt sind. Solche Folgen und die Art der Aufeinanderfolge ihrer Ziffern in geeigneter Weise zu definieren, so daß sie eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ bilden, ist die Leistung von Hardy. Sie operiert einerseits mit dem Cantorschen Diagonalprinzip, andererseits mit den Größenordnungen der Unendlich.

Man geht dazu von den Zahlenfolgen

$$1\ 2\ 3 \ldots \quad 2\ 3\ 4 \ldots \quad 3\ 4\ 5 \ldots$$

aus und ordnet sie den Ordinalzahlen 1, 2, 3 ... der wohlgeordneten Menge $\aleph_1$ zu. Damit ist zunächst ein Fortgangsprinzip von ν zu $\nu + 1$ definiert, das auch im folgenden stets zur Anwendung kommt. Der Ordinalzahl ω entspricht die Diagonalreihe der obigen Zahlfolgen, also die Folge

$$1\ 3\ 5\ 7 \ldots$$

Damit ist auch der Fortschritt von $\{\nu\}$ auf ω definiert. Den Zahlen $\omega + 1$, $\omega + 2$ ... entsprechen wieder die Folgen

$$3\ 5\ 7 \ldots \quad 5\ 7\ 9 \ldots \quad 7\ 9\ 11 \ldots$$

---

1) Math. Ann. 59 (1904) S. 84: Inhaltsgleiche Polyeder heißen endlichgleich, wenn sie nach Hinzufügen kongruenter Polyeder in kongruente Polyeder zerlegt werden können.

2) Die analytische Tatsache, die der dyadischen Darstellung zugrunde liegt, daß man nämlich jede Zahl der Einheitsstrecke aus den Summanden $1/2$, $1/4$ ... additiv aufbauen kann, hat R. Bettazzi verallgemeinert; er zeigt, daß eine Folge $\{u_\nu\}$ in dieser Weise additiv ein Kontinuum bestimmt, falls 1. $\lim u_\nu = 0$ ist und falls 2., wenn $\sum u_\nu \geq b$ ist, die Summe aller Glieder, deren jedes kleiner als b ist, wieder größer oder gleich b ist. Vgl. Atti Torino 33 (1898), p. 355.

3) Quart. Journ. of Math. 35 (1903) p. 87.

Aus ihnen entsteht durch das Diagonalprinzip wieder die Reihe 1 5 9... als Vertreter der Zahl $\omega \cdot 2$. In dieser Weise kann man fortfahren, und da die einfache und die transfinite Induktion zu allen Zahlen von $\aleph_1$ führt, so kann die Hardysche Konstruktionsmethode nie versagen. Zu beweisen ist noch, daß die sich ergebenden Zahlfolgen sämtlich verschieden ausfallen, so daß also irgend zwei von ihnen nur bis zu einer bestimmten Ziffer übereinstimmen können. Der Beweis beruht darauf, daß die mit dem Diagonalprinzip gebildeten Folgen, die also einer Limeszahl ω_α entsprechen, nicht eindeutig bestimmt sind, da sie ja mit *irgend*einer unendlichen Menge von Ordnungszahlen gebildet werden können, die ω_α als Limeszahl haben. Diese Menge läßt sich stets so wählen, daß die Verschiedenheit erreicht wird. Man kann nämlich bewirken, daß die in sie eingehenden Zahlen $\{a_\nu\}$ mit wachsendem ν von höherer Ordnung unendlich werden als die aller vorhergehenden.

E. W. Hobson hat gegen das Hardysche Konstruktionsverfahren den Einwand erhoben, daß für gewisse Ordnungszahlen die in sie eingehenden Ziffern größer als jede endliche Zahl ausfallen müßten.[1]) Dieser Einwand ist jedoch unbegründet; man hat bereits in der Unbestimmtheit der für das Diagonalprinzip zu verwendenden Folgen die Möglichkeit, diesen Umstand auszuschließen.[2])

Ein näheres Eingehen hierauf kann schon deshalb unterbleiben, weil man noch auf andere Weise aus dem Kontinuum eine wohlgeordnete Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ so herausgreifen kann, daß die Verschiedenheit sämtlicher Zahlen unmittelbar in Evidenz tritt. Die Zahlen sollen wieder, wie bei Hardy, durch Folgen

$$A \equiv 0,\ a_1 a_2 a_3 \dots a_\nu \dots$$

definiert sein, wo a_ν jetzt bedeuten mag, wieviel Nullen hintereinander stehen, während zwischen je zwei Gruppen von Nullen eine Eins stehen mag.

Dazu benutze man die Theorie der Unendlich. Ist $f(x)$ irgendeine monoton mit x ins Unendliche wachsende Funktion, so bestimme man mit ihr folgendermaßen eine Zahl A. Sei

$$f(1) = \xi_1,\ f(2) = \xi_2,\ \dots f(\nu) = \xi_\nu \dots$$

und sei a_ν die kleinste ganze Zahl, die größer als ξ_ν ist, so ist damit zu $f(x)$ eine Zahl A zugeordnet. Außerdem sind diese Zahlen not-

1) Proc. Lond. Math. Soc. (2) 3 (1905) p. 187.

2) Hardy gibt ebenfalls eine Widerlegung des Hobsonschen Einwandes, zugleich auch eine Vereinfachung seines Verfahrens. Proc. Lond. M. S. (2) 4 (1907) S. 10.

wendig *verschieden*, wenn die Funktionen $f(x)$ *verschiedenes Unendlich* besitzen. Da man nun aus der Gesamtheit aller Funktionen eine wohlgeordnete Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ herausheben kann, deren Unendlich beständig wachsen, so ist damit der Beweis geliefert.[1])

Von Cantor und Bernstein[2]) ist das Kontinuum mit der Menge aller abzählbaren linearen Ordnungstypen verglichen worden. Bezeichnet man wie gewöhnlich durch $^*\omega$ den zu ω inversen Typus und sind μ und ν endliche Zahlen, so folgt aus der Relation

$$\mu + {}^*\omega + \omega + \nu = \mu' + {}^*\omega + \omega + \nu' \tag{1}$$

offenbar $\mu = \mu'$ und $\nu = \nu'$. Nun kann im dyadischen System jede Zahl x der Einheitsstrecke durch eine unendliche Folge von Nullen und Einsen dargestellt werden; wir schreiben sie

$$0,\ \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \tag{2}$$

mit der Bedeutung, daß in ihr zunächst μ_1 gleiche Ziffern auftreten, z. B. Nullen, dann wieder μ_2 gleiche usw. Bildet man nun den Ordnungstypus

$$0,\ \mu_1,\ {}^*\omega + \omega,\ \mu_2,\ {}^*\omega + \omega,\ \mu_3 \ldots,$$

so geht aus dem vorstehenden Satz hervor, daß verschiedenen Zahlfolgen auch verschiedene Ordnungstypen entsprechen; d. h. die Menge aller Zahlfolgen (1) ist einer Teilmenge aller abzählbaren Ordnungstypen äquivalent. Dieses Cantorsche Resultat hat Bernstein erheblich weiter geführt; er hat nämlich bewiesen, daß das Kontinuum und die eben genannte Menge gleiche Mächtigkeit haben, d. h.:

Das Kontinuum hat die gleiche Mächtigkeit, wie die Menge aller einfach geordneten Mengen erster Mächtigkeit.[3])

Hierdurch wird das Kontinuum einer Menge gleichmächtig, deren Definition in gewissem Sinne analog ist zu der Definition der Menge $\aleph_1$. Diese ist nämlich die Menge *aller abzählbaren, wohlgeordneten* Typen erster Mächtigkeit, während das Kontinuum nunmehr äquivalent ist der Menge *aller* abzählbaren Typen erster Mächtigkeit. Die Frage, welche Beziehung das Kontinuum zur Menge $\aleph_1$ hat, hat dadurch eine neue Gestalt gewonnen.[4])

---

1) Wie ich einer schriftlichen Mitteilung entnehme, ist Hausdorff schon vor längerer Zeit zu der gleichen allgemeinen Konstruktion einer wohlgeordneten Teilmenge des Kontinuums der Mächtigkeit $\aleph_1$ gelangt. Eine speziellere sehr einfache Konstruktion gibt er Leipz. Ber. 59 (1907) p. 155.

2) Diss. Göttingen, sowie Math. Ann. 61 (1905) S. 117; vgl. auch im Anschluß hieran H. W. Young, Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1904) p. 243.

3) Dies kann auch auf die höheren Alephs ausgedehnt werden.

4) Vgl. auch Kap. II, § 6 und 7.

Im übrigen steht die Antwort auf diese Frage immer noch aus. J. König, der sich mit ihr am ergiebigsten beschäftigt hat, hat ebenfalls eine neue Formulierung des Kontinuumproblems geliefert. Er hat folgenden Satz bewiesen:

Das Kontinuum kann keinem Aleph äquivalent sein, dessen Index eine Limeszahl ist.

Dies geht aus seinen in § 4 mitgeteilten Sätzen unmittelbar hervor. Benutzt man z. B. die wachsenden Alephs

$$\aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} < \aleph_{\mu+2} \cdots,$$

so daß $\mathfrak{s} = \aleph_{\mu+\omega}$ ist, so besagt der Satz von König, daß

$$\aleph_{\mu+\omega}{}^{\aleph_0} > \aleph_{\mu+\omega}$$

ist. Aber für das Kontinuum haben wir

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$

so daß hieraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Hierzu fügt König folgende Bemerkung. Falls die Bernsteinsche Formel für *jedes* Aleph richtig sein sollte, so ist für *jedes* Aleph

$$\aleph^{\aleph_0} = \aleph \cdot 2^{\aleph_0} = \aleph \cdot \mathfrak{c}.$$

Wird nun vorausgesetzt, daß $\mathfrak{c} = \aleph_\mu$ ist, so würde wieder, falls wir $\aleph = \aleph_{\mu+\omega}$ wählen,

$$\aleph_{\mu+\omega}{}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+\omega} \cdot \aleph_\mu = \aleph_{\mu+\omega}$$

folgen, im Widerspruch mit dem Königschen Satz. Wird dagegen angenommen, daß $\mathfrak{c}$ größer als jedes Aleph sein könne, so hat man die beiden Relationen

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph^{\aleph_0} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} \geq \aleph^{\aleph_0},$$

woraus dann wieder

$$\mathfrak{c} = \aleph^{\aleph^0} = \aleph \cdot \aleph^{\aleph_0} = \aleph \cdot 2^{\aleph_0},$$

also der Bernsteinsche Satz folgen würde.[1])

Ich habe endlich eine kritische Erörterung von König zu erwähnen, die sich gegen die Möglichkeit der Wohlordnnng des Kontinuums richtet.[2]) Er nennt eine Zahl $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *endlich* definierbar, wenn man in endlicher Zeit ein Verfahren zur Bestimmung jedes a_ν angeben kann. Die endlich definierbaren Zahlen bilden nach ihm eine abzählbare Menge. Ließe nun das Kontinuum eine Wohlordnung zu,

---

1) Über die Voraussetzung, daß $\mathfrak{c}$ größer als jedes Aleph sein könne, vgl. § 8.

2) Math. Ann. 61 (1905) p. 157. Vgl. auch 63 (1907) S. 217.

so gäbe es in ihr eine Teilmenge solcher Elemente, die nicht endlich definierbar sind. Diese habe ein *erstes* Element, und dieses wäre doch wieder endlich definiert, was einen Widerspruch darstellt. Ich komme hierauf alsbald in § 7 ausführlicher zurück.

Dieselbe Argumentation ließe sich übrigens auch gegen die zweite Zahlenklasse vorbringen und führte hier ebenfalls zu einem gewissen Paradoxon.

§ 7. *Die logischen Paradoxien.*[1]) Wir sind damit zu den sogenannten Parodoxien der Mengenlehre gelangt, d. h. zu Sätzen, die sozusagen *jenseits von Falsch und Richtig* zu liegen scheinen. Sätze dieser Art können sich dann und nur dann einstellen, wenn man auf logisch richtigem Wege beweisen könnte, daß *von zwei sich kontradiktorisch gegenüberstehenden Sätzen ein jeder unrichtig ist.* In diesem Fall würde nämlich der Satz vom Widerspruch versagen und die Methode des indirekten Beweises illusorisch werden.

Derartige *scheinbare* Paradoxien können auch in der Mengenlehre einzig und allein in der Weise auftreten, daß man sich entweder widerspruchsvoller Begriffe bedient oder aber widerspruchslose Begriffe in widerspruchsvoller Weise benutzt.[2]) Zwei derartige Begriffe sind besonders hervorgetreten. Man kann sie vielleicht am einfachsten charakterisieren, indem man die Mengenlehre mit der Theorie der endlichen Größen in Analogie setzt. Im Gebiet der endlichen Größen besteht der Satz: 1) *Es ist widerspruchsvoll, eine größte ganze Zahl zu denken.* Analog bestehen im Gebiet der unendlichen Mengen die beiden Sätze: 2) *Es ist widerspruchsvoll, eine größte Kardinalzahl zu denken;* 3) *Es ist widerspruchsvoll, eine größte Ordinalzahl zu denken.*[3]) Der zweite Satz beseitigt insbesondere die Menge W und der erste die Menge aller Mengen. Im einzelnen ist folgendes zu bemerken.

Der Satz, daß von zwei verschiedenen wohlgeordneten Mengen die eine einem Abschnitt der andern ähnlich ist, führt bekanntlich zu dem Resultat, daß man *alle* überhaupt erzeugbaren Ordnungszahlen der Größe nach und zugleich dem Prinzip der Wohlordnung entsprechend an-

1) Es muß genügen, hierauf in aller Kürze einzugehen.

2) Dies habe ich in den Jahresber. d. D. Math. Ver. 15 (1906) S. 19 näher ausgeführt. Vgl. die ähnlichen Betrachtungen von Poincaré, Revue métaphys. et mor. 13 (1906). Er nennt Begriffe, die auf widerspruchsvollen Definitionen beruhen, *non prédicatif.*

3) Freilich besteht ein gewisser Unterschied. Die Mengenlehre führt über den Satz 1) aus der Theorie der endlichen Größen hinaus, dagegen ist eine Hinausführung über die Sätze 2) und 3) nicht vorhanden.

ordnen kann. Die so geordnete Gesamtheit heiße W; wir können dann W — unter Vermeidung des Wortes „Menge" — als *wohlgeordnete Gesamtheit* bezeichnen. Diese Bezeichnung soll aber daran erinnern, daß W *eine* Eigenschaft *nicht* besitzt, die ihren Abschnitten zukommt, und in der eine grundlegende Eigenschaft jeder *einzelnen* wohlgeordneten Menge L zum Ausdruck kommt, nämlich die, daß es zu einer solchen Menge L stets eine andere gibt, die noch mehr Elemente enthält, insbesondere, daß man zu ihr die wohlgeordnete Menge $L' = (L, m)$ bilden kann. In der Tat folgt aus der Definition von W unmittelbar, daß (W, m) einen widerspruchsvollen Begriff darstellen würde.[1])

Ein *Verstoß* hiergegen erscheint zuerst bei C. Burali-Forti. Indem er nämlich auch dem W eine Ordnungszahl Ω entsprechen ließ, vermochte er daraus unmittelbar das gleichzeitige Bestehen der Relationen

$$\Omega + 1 > \Omega \quad \text{und} \quad \Omega + 1 \leq \Omega$$

abzuleiten.[2]) Dies Resultat wurde jedoch von ihm keineswegs in dem hier genannten Sinne benutzt; er sah darin vielmehr ein richtig gewonnenes Ergebnis und schloß daraus auf die Irrigkeit des Cantorschen Hauptsatzes über wohlgeordnete Mengen, nämlich des Satzes, daß sie Größencharakter haben und sich der Größe nach den Gesetzen der Wohlordnung entsprechend anordnen lassen.[3])

---

1) Übrigens hat man auch in der „wohlgeordneten Menge W" selbst bereits einen widerspruchsvollen Begriff zu sehen, insofern man damit eine wohlgeordnete Menge einführt, die jede wohlgeordnete Menge als Teilmenge enthält, oder eine Ordnungszahl, die größer als jede Ordnungszahl sein würde; analog wie der Ordnungstypus aller ganzen Zahlen schon an sich eine Ordnungszahl darstellt, die größer als jede ganze Zahl ist, in Übereinstimmung mit Satz 1) und 3). Da aber der Gebrauch, den man von „W" gemacht hat, nur der des obigen Textes ist, so habe ich mich darauf beschränkt, ihn besonders hervorzuheben.

2) Die erste ist nämlich Eigenschaft jeder Ordnungszahl, die zweite fließt aus seiner Definition von Ω.

3) Vgl. Rend. Palermo 11 (1897) p. 164. Dort heißt es: „Risulta dunque impossibile ordinare i tipi d'ordine in generale e in particolare anche i numeri ordinali in senso crescente." Die numeri ordinali von Burali-Forti sind aber identisch mit Cantors Ordnungszahlen, obwohl, was noch zu bemerken ist, Burali-Forti von einer irrigen Auffassung von Cantors Begriff der Wohlordnung ausging (a. a. O. p. 157), worauf er nachher selbst hinwies (a. a. O. p. 260). B. Russell (Principles of Mathematics, Cambridge 1903, p. 323) findet sich mit dem irrigen Schluß von Burali-Forti so ab, daß er sagt: Da der bezügliche Satz von Cantor richtig sei, müsse man schließen, daß W keine wohlgeordnete Menge sei, was Ph. Jourdain alsbald in der Weise widerlegt, daß er zeigt, W enthalte keine Teilmenge vom Typus $^*\omega$ und sei deshalb wohlgeordnet; vgl. Phil. Mag. (6) 7 (1904) p. 65. Übrigens geht aus den Worten von Russell nicht hervor, ob sie im Sinne des Textes gemeint sind; es ist auch kaum wahrscheinlich. Der

Ähnlich kann auch der Begriff der *Gesamtheit aller Mengen* zu Paradoxien führen, wenn man diese Gesamtheit als Menge faßt, d. h. wenn man ihr Eigenschaften beilegt, die den einzelnen wohldefinierten Mengen zukommen (wie z. B., daß es zu jeder Menge eine Menge höherer Mächtigkeit gibt), oder wenn man überhaupt mit ihr in widerspruchsvoller Weise operiert. Dieser Umstand liefert die logische Auflösung des sogenannten *Russellschen Paradoxons.*

Dieses Paradoxon operiert mit denjenigen Mengen, die *sich selbst nicht als Element enthalten;* Russell zeigt, daß sowohl der Satz, die Gesamtheit dieser Mengen enthalte sich selbst als Element, wie auch sein kontradiktorisches Gegenteil falsch sei. Die Russellsche Schlußweise enthält daher notwendig einen *Fehler*, der in der widerspruchsvollen Bildung oder Verwendung eines Begriffs zu suchen ist. In der Tat operiert sie mit den genannten Mengen in der Weise, als ob die für ihre Definition benutzte Eigenschaft (daß sie sich selbst nicht als Element enthalten) nur *einzelnen* Mengen zukomme, während sie doch einer jeden Menge eigentümlich ist. Dies ist der erste logische Fehler; er hat alsdann noch zur Folge, daß die Gesamtheit *aller* Mengen in widerspruchsvoller Weise als Beweismittel auftritt.

G. Cantor dürfte von Anfang an den logischen Gegensatz, der in den Worten „Gesamtheit“ und „Menge“ oder „Mächtigkeit“ zum Ausdruck kommen soll, klar erkannt haben; er hat sich gelegentlich dahin ausgesprochen, daß die Zusammenfassung von Elementen zu einer „Menge“ nur dann vorgenommen werden darf, wenn sich dabei ein widerspruchsloser Begriff einstellt[1]), und hat die Gesamtheiten, für die dies nicht möglich ist, als *nicht fertige* resp. *inkonsistente* Mengen bezeichnet[2]); woraus dann von selbst folgt, daß sie als Hilfmittel der Untersuchung auszuschalten sind. Ähnlich verfährt D. Hilbert. Er hat die axiomatische Festlegung der Begriffe und ihrer Beziehungen, und die Untersuchung ihrer Widerspruchslosigkeit, die er in der Geometrie mit größtem Erfolg vorgenommen hatte, auf die Mengenlehre

---

ausdrückliche Hinweis auf den widerspruchsvollen Gebrauch von W bei Burali-Forti findet sich erst in einer Note des Verfassers; siehe Jahresb. d. D. M. V. 15 (1906) S. 1. Über die Paradoxien vgl. auch noch Hobson, Russell und A. C. Dixon Proc. Lond M. S. (2) 3 (1905) S. 170 u. (2) 4 (1906) S. 18, 21, 29, 31, 317, Jourdain, Revue de Math. 8 (1906) und Hessenberg, Grundlagen der Mengenlehre, S. 144, wo sich ohne Angabe näherer Gründe eine Ablehnung der Ausführungen des obigen Textes findet.

1) Vgl eine Bemerkung von Ph. Jourdain, Phil. Mag. (6) 7 (1904) p. 55.

2) Vgl. eine Bemerkung von D. Hilbert, dies. Jahresb. 9 (1900) p. 184. Dieses Wort findet sich wohl zuerst bei Schröder, Algebra und Logik der Relative, Leipzig 1895, p. 4.

zu übertragen begonnen, und sich dahin ausgesprochen, daß sich die obengenannten Gesamtheiten nicht durch ein widerspruchsfreies System von Axiomen festlegen lassen und daher einen in mathematischer Hinsicht existierenden Begriff nicht bilden.[1])

Kürzlich hat J. Richard[2]) ein Paradoxon aufgestellt, das an den Begriff der *endlich definierten* Dezimalbrüche (§ 6) anknüpft. Da sich Poincaré[3]) ihm angeschlossen hat, will ich ausführlicher darauf eingehen.[4]) Seine Auflösung gibt zugleich die Widerlegung der in § 6 angeführten Argumentation von König.

Richard geht ebenfalls davon aus, daß diese Dezimalbrüche eine abzählbare Menge bilden; nach der Zahl der in ihre Definition eingehenden Buchstaben geordnet, sei

$$\Delta = \{\delta_\nu\} = \delta_1,\ \delta_2,\ \cdots\ \delta_\nu,\ \cdots$$

diese Menge. Man kann nun auf Grund irgendeiner Vorschrift einen Dezimalbruch δ' so definieren, daß seine νte Stelle von der νten Stelle von δ_ν verschieden ist.[5]) Dann ist er einerseits endlich definiert und andererseits in der Menge Δ nicht enthalten. Es entsteht also ein Paradoxon.

Um seine Auflösung zu geben, sehe ich zunächst von der speziellen Bedeutung der Menge Δ ab und erörtere *die Gesamtheit der vorliegenden Möglichkeiten*. Solcher gibt es zwei. Eine jede wohldefinierte Menge Δ ist entweder abzählbar oder nichtabzählbar. Ist sie zunächst tatsächlich *abzählbar*, so läuft die obige Definition darauf hinaus, ein Element δ' zu definieren, das von *jedem* Element von Δ *verschieden* ist. Dann ist also diese Definition *widerspruchsvoll.*[6]) Es hat aber gar nichts Besonderes, aus einem richtigen Vordersatz mittelst einer widerspruchsvollen Annahme sein kontradiktorisches Gegenteil abzuleiten; das ist innerhalb und außerhalb der Mengenlehre auf die mannigfachste Art möglich.[7]) Ist zweitens Δ *nicht abzählbar*, so enthält die Vorschrift

1) Verhandl. d. 3. internat. Math. Kongr. zu Heidelberg; Leipzig 1905, p. 176; vgl. auch Math. Probleme, Gött. Nachr. 1900, p. 266.

2) Revue générale des Sciences 16 (1905), sowie Acta math. 30 (1906) S. 295.

3) Revue de métaphysique et morale, 13 (1906).

4) Vgl. die demnächst erscheinende eingehendere Erörterung in den Acta math.

5) Z. B. so, daß sie die Ziffer von δ_ν zu 9 ergänzt.

6) Das Richardsche Verfahren, die sämtlichen endlich definierten Dezimalbrüche zu bilden, führt, was ich beiläufig anführe, zu *allen* widerspruchsvollen Definitionen. Er bildet sie nämlich der Reihe nach aus den sämtlichen Buchstabenkombinationen immer höherer Klasse.

7) Z. B. auch für eine wirklich abzählbare Menge aller Dezimalbrüche. Richard gibt übrigens auch eine Auflösung der Antinomie, sie deckt sich jedoch mit der obigen nicht. Vor allem muß ich seiner Meinung entgegentreten, diese Antinomien seien der Mengenlehre eigentümlich.

materiell keinen Widerspruch, die Richardsche Argumentation stellt vielmehr einen *richtigen indirekten Beweis* der Nichtabzählbarkeit von Δ dar, der ja auch mit dem klassischen Beweis identisch ist, mit dem Cantor die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums gezeigt hat. Nur weil die obige Definition in diesem Gewande auftritt, konnte sie auch bei wirklich abzählbarem Δ den Schein der Widerspruchslosigkeit erwecken.

Der richtige Schluß, der hier zu ziehen ist, ist also der der Nichtabzählbarkeit der Richardschen Menge Δ. In Wahrheit aber hat auch Richard die Abzählbarkeit von Δ gar nicht bewiesen. Er, sowie König, gehen nämlich stillschweigend von der Annahme aus, daß jede Definition nur *je einen* Dezimalbruch bestimmt. Dieselbe Definition kann aber auch eine endliche, eine abzählbare, ja sogar auch eine nichtabzählbare Menge von Dezimalbrüchen bestimmen; die Worte: man bilde denjenigen Dezimalbruch, dessen νte Stelle eine Eins ist, während alle übrigen Stellen Nullen sind, bestimmen z. B. abzählbar unendlich viele Dezimalbrüche. Einen expliziten Beweis der Nichtabzählbarkeit von Δ habe ich so geführt, daß ich eine Definition aufgestellt habe, die eine nicht abzählbare Menge von Dezimalbrüchen definiert. Ohne die Existenz einer solchen wäre allerdings auch die Gesamtmenge notwendig abzählbar.[1])

Das Vorstehende überträgt sich zunächst unmittelbar auf den Einwand, den J. König gegen die zweite Zahlklasse vorgebracht hat.[2]) Sein Einwand gegen die Wohlordnung des Kontinuums ist ähnlich aufzulösen;[3]) hier kommt es aber bei der Analyse aller vorhandenen Möglichkeiten nicht darauf an, ob die Menge Δ abzählbar oder nicht abzählbar ist, vielmehr sind die zwei Möglichkeiten, die ins Auge zu fassen sind, die, ob Δ wohlgeordnet werden kann oder nicht. Liegt der erste Fall

---

1) Man könnte geltend machen, solche Definitionen müßten überhaupt ausgeschlossen werden, und man müsse sich auf Definitionen beschränken, die nur eine endliche Zahl von Dezimalbrüchen bestimmen. Man bedenke aber, daß eine Definition, die überhaupt einen Dezimalbruch definiert, stets mittels einer endlichen Zahl von Worten unendlich viele Stellen festlegt, und daher Worte und Begriffe, die sich auf unendlich viele Objekte beziehen, nötig hat. Ein Ausweg wäre nur so möglich, daß man auch solche Worte eliminiert und die Mathematik ganz und gar auf das Endliche beschränkt. Das hieße ungefähr so viel, wie den größten Teil der höheren Mathematik ganz verneinen. Übrigens kenne ich niemand, der dies je praktisch betätigt hätte; es ist immer nur theoretisch gefordert werden.

2) Die Königsche Meinung, die zweite Zahlklasse sei inkonsistent, hat daher keine Berechtigung.

3) Damit wird freilich für die Möglichkeit der Wohlordnung nichts entschieden.

tatsächlich vor, so würde das erste Element, das auf die geordnete Menge Δ folgt, ein Element sein, das einerseits zu Δ gehört und andererseits wieder von *jedem* Element von Δ *verschieden* ist. Die Definition ist also widerspruchsvoll. Ist aber Δ einer Wohlordnung *nicht* fähig, so enthält die Definition erst recht einen Widerspruch, da sie ja ganz ihren Sinn verliert. Hier haben wir es also in beiden Fällen mit einer widerspruchsvollen Definition zu tun.[1])

Als Schlußresultat aller vorstehenden Erwägungen ergibt sich das Folgende: Die Vermeidung aller Paradoxien und die Gewähr bindender Schlüsse ist auch in der Mengentheorie nur auf die Weise möglich, daß man bei den Deduktionen in dem Augenblick halt macht, in dem sich widerspruchsvolle Begriffe einstellen. Dies findet für einen Begriff sicher statt, *wenn der Satz des Widerspruchs für ihn versagt*. Insbesondere *können die Reihe W und die Menge aller Mengen weder Gegenstand noch Hilfsmittel der Untersuchung sein.*

Hieraus ziehen wir noch folgende Konsequenz. Wenn die *allgemeine* Tragweite eines Beweises nur so erreichbar ist, daß die in sie eingehenden Begriffe mit den ebengenannten identisch werden können oder müssen, so kann derartigen Beweisen eine bindende Kraft nicht beigelegt werden.[2])

§ 8. *Die Vergleichbarkeit der Mengen.* Die *Vergleichbarkeit* und die *Wohlordnung* bilden die Grundprobleme der Mengenlehre. Daß in der Vergleichbarkeit ein grundlegendes Problem vorliegt, ist scheinbar teilweise in Vergessenheit geraten. Man hat bei einer Reihe von Beweisen die Vergleichbarkeit stillschweigend vorausgesetzt und hat damit eine axiomatische Annahme gemacht, deren man sich nicht immer bewußt gewesen ist. Angesichts der außerordentlichen Tragweite, die in dieser Annahme steckt, muß der Tatbestand hier zur Sprache kommen. Wird nämlich die Vergleichbarkeit nicht vorausgesetzt, so hat man mit der Möglichkeit zu rechnen, daß zwei Mengen M und N überhaupt

---

1) Mit widerspruchsvollen Definitionen kann man auf allen Gebieten absurde Resultate ableiten. Ob ich ein Dreieck definiere, in dem jeder Winkel ein Rechter ist, oder ein Polygon, in dem ein Winkel von allen Winkeln verschieden ist, oder eine Menge, die ein von allen ihren Elementen verschiedenes Element enthält, oder ob ich eine Definition aufstelle, die implizite einen derartigen Inhalt hat, ist gleichgiltig und hat überall den gleichen Erfolg.

2) Wird in einem Beweisverfahren durch die Zahl l dividiert und zeigt der Schluß des Beweises, daß l eventuell auch Null sein kann oder muß, so gilt der Beweis nicht als bindend; man denke z. B. an die alten Beweise des Satzes von den unbestimmten Koeffizienten.

kein Größenverhältnis besitzen.[1]) So unwahrscheinlich dies scheinen mag, so müssen wir diese Möglichkeit als formal widerspruchslos betrachten und könnten sie nur durch einen Satz oder eine axiomatische Annahme beseitigen.

Ich weise insbesondere auf zweierlei hin. 1. Ohne die Vergleichbarkeit allgemein vorauszusetzen, kann z. B. selbst folgender Satz, soweit ich sehe, nicht bewiesen werden: Sind M und N zwei Mengen, und M' und N' solche Teilmengen, daß $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}' < \mathfrak{n}$ ist, so ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, falls $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}'$ ist für *jedes* $\mathfrak{n}'$, und ebenso $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}'$ für *jedes* $\mathfrak{m}'$.[2]) Ein solcher Beweis ist jedenfalls bisher nirgends gegeben worden.

2. *Unter Voraussetzung der Vergleichbarkeit aller Mengen* ist der Satz sofort erweisbar. Wäre nämlich $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, so gäbe es eine Teilmenge M_1 von M, so daß $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}$ ist. Nun ist entweder $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$ oder aber $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}$; beides führt aber auf einen Widerspruch gegen die Annahme $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$. Die erste Möglichkeit würde nämlich unmittelbar die Folgerung $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ mit sich bringen, und die zweite führt auf Grund der im Satz selbst enthaltenen Voraussetzung auf die Folgerung $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}_1$, im Widerspruch mit $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}$. Analog ist es für die Annahme $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$.

Erst dieser Satz würde uns das Recht geben, $\aleph_1$ als *die* zweite Mächtigkeit zu bezeichnen und überhaupt jedes $\aleph_\mu$ als *die* nächsthöhere Mächtigkeit zu den ihr vorhergehenden Alephs aufzufassen.[3]) Freilich hat der Sprachgebrauch sich längst an diese Bezeichnung gewöhnt. Er ist aber ohne den obigen Satz nicht gestattet.

3. *Unter Voraussetzung der Vergleichbarkeit* folgt aus dem Vorstehenden unmittelbar, daß die Mächtigkeit einer Menge M einem Aleph gleich sein muß, sobald man weiß, daß sie kleiner als ein gewisses Aleph ist. Man käme auf diese Weise formal unmittelbar zu dem Resultat, daß jede Menge M entweder ein Aleph sein muß oder größer als alle Alephs, und da es eine solche Menge nicht gebe, so könne nur das erste eintreten. Dieser Schluß ist mehrfach gezogen worden, sogar ohne bewußte Voraussetzung der Vergleichbarkeit. Man wird aber vorziehen, jeden Hinweis auf eine Mächtigkeit, die größer sein würde als alle Alephs, ganz zu unterlassen.[4]) Ein einwandfreier

---

1) Vgl. Bericht I S. 15.

2) Dieser Satz entspricht der Gleichheitsdefinition der Irrationalzahlen.

3) Erst der Bernsteinsche resp. der Hardysche Satz über das Kontinuum (§ 6) gibt uns das Recht zu behaupten, daß $\mathfrak{c} \geq \aleph_1$ ist. Ohne ihn konnten wir die Vergleichbarkeit von $\mathfrak{c}$ und $\aleph_1$ nicht behaupten.

4) Ich muß bekennen, daß es mir nicht möglich ist, hierüber eine definitive Meinung zu äußern. Es liegt nahe, Mengen, deren Mächtigkeit jedes Aleph übertrifft, als widerspruchsvoll zu betrachten. Aber dies hängt andererseits so enge

Beweis dafür, daß jede Menge einem Aleph gleichmächtig ist, könnte unter der Voraussetzung der Vergleichbarkeit so geführt werden, daß man zeigt, es kann keine Menge abnehmender Mächtigkeiten vom Typus $^*\omega$ geben.[1])

§ 9. *Die Wohlordnung.* Der Satz, jede Menge kann wohlgeordnet werden, läßt wie jedes derartige Theorem zweierlei Bedeutungen zu. Er kann erstens als eine Art von Existenztheorem aufgefaßt werden und bedeutet dann, daß die Annahme, eine Menge M könne nicht in eine wohlgeordnete umgeformt werden, einen Widerspruch enthält; er kann zweitens besagen, daß die Umformung auf Grund irgendwelcher konstruktiver Vorschriften wirklich herstellbar ist.[2]) Der ersten Bedeutung entspricht besonders der Zermelosche Beweis; immerhin setzt jeder derartige Beweis stillschweigend voraus, daß die in den Beweis eingehenden Operationen logisch widerspruchsfrei und auch realisierbar sind. Der Nachweis der *wirklichen* Umformung einer Menge in eine wohlgeordnete hat naturgemäß einen ganz andern Inhalt. Diese Umformung bedarf der Erzeugungsmethoden oder ähnlicher Hilfsmittel und ist daher überhaupt nur insoweit möglich, als vorher solche Methoden in zureichender Form als benutzbar nachgewiesen sind.[3]) Für eine einzelne Menge, wie z. B. das Kontinuum, wird die wirkliche Herstellung der Wohlordnung immer das Schlußziel der Untersuchung abgeben.[4])

Auf Grund des Vorstehenden sollen die für die Wohlordnung gegebenen Beweise kritisch erörtert werden. Ich beginne mit dem Beweis, den G. Hardy gegeben hat.[5])

Hardy will, wie er sagt, *beweisen*, daß jede Mächtigkeit ein Aleph sei oder größer als alle Alephs und schreibt: „Aus der nicht abzählbaren Menge M kann man nach und nach Elemente

$$m_1, m_2, \ldots m_\omega, \ldots m_\alpha \ldots m_\beta \ldots$$

mit den nicht hinlänglich geklärten Problemen der Wohlordnung und der Vergleichbarkeit zusammen, daß ich vorziehe, mich dahin auszusprechen, es liege hier noch eine Lücke der Erkenntnis vor. Immerhin scheint es mir zweckmäßig, jede Berufung auf die Existenz oder Nichtexistenz derartiger Mengen zu vermeiden.

1) Vgl. meine Ausführungen in den Math. Ann. 60 (1905) p. 181.

2) Die doppelte Bedeutung des Wohlordnungssatzes wird auch von Hadamard betont. Bull. Soc. math. de Fr. 33 (1905) p. 261. Sie ist in fünf Briefen enthalten, die zwischen Baire, Borel, Hadamard und Lebesgue gewechselt worden sind und eine Erörterung der Wohlordnung, sowie sonstiger Grundfragen der Mengenlehre enthalten.

3) Vgl. hierzu meine Note in den Math. Ann. 60 (1905) p. 181, sowie die ähnlichen Ausführungen von W. Hobson Proc. Lond. Math. Soc. (2) 3 (1905) p. 170.

4) Vgl. z. B. auch D. Hilbert, Math. Probleme, Gött. Nachr. 1900 p. 12.

5) Quart. Journ. of Math. 35 (1903) p. 88.

auswählen, die allen Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse entsprechen; denn wenn dieser Prozeß (vorher) ein Ende fände, so würde M die Mächtigkeit $\aleph_0$ haben. Daher ist $\mathfrak{m} \geq \aleph_1$, und wenn $\mathfrak{m} > \aleph_1$ ist, so folgt ebenso $\mathfrak{m} \geq \aleph_2$ usw., und das gleiche folgt analog für jedes $\aleph_\beta$." Damit ist der Hardysche Beweis erledigt. Es bedarf kaum des ausdrücklichen Hinweises, daß hier ein Zirkelschluß vorliegt. Der Beweis setzt nämlich nicht nur die Vergleichbarkeit von M mit allen Alephs voraus, er enthält sogar darüber hinaus noch die stillschweigende Annahme, daß sich aus jeder Menge M eine wohlgeordnete Teilmenge abspalten läßt, die jedem beliebigen $\aleph$ gleichmächtig ist.

Der Zermelosche Beweis[1]) geht davon aus, daß man aus jeder Teilmenge M' von M ein Element m' auswählen könne, das man ihr zuordnet. Zermelo bezeichnet es als das *ausgezeichnete* Element dieser Teilmenge M' und verfährt nun folgendermaßen. Man ordne der Menge M das Element m_1 zu und setze $M = (m_1, M_1)$, ordne der Menge M_1 das Element m_2 zu und setze $M_1 = (m_2, M_2)$ und allgemein $M_\alpha = (m_\alpha, M_{\alpha+1})$, und ordne die jedesmal bereits ausgewählten ausgezeichneten Elemente in der Weise, daß

$$M = (m_1, m_2, \ldots, M_\alpha) = (m_1, m_2, \ldots m_\alpha, M_{\alpha+1})$$

zu setzen ist, so daß die Elemente $m_1, m_2 \ldots m_\alpha$ eine wohlgeordnete Menge bilden. Dann kann der so definierte Prozeß nur aufhören, wenn die Menge M erschöpft ist. Denn wäre M' die Restmenge und L die wohlgeordnete Menge der bereits ausgewählten Elemente, so hätte man $M = (L, M')$. Aber nach Annahme gibt es zu M' ein ausgezeichnetes Element m', so daß $M' = (m', M_1')$ ist, und man erhielte daher

$$M = (L, m', M_1') = (L_1, M_1'),$$

was einen Widerspruch darstellt. Gegen diese Argumentation erhebt sich gemäß § 7 sofort der formale Einwand, daß sie nur in dem Fall mit Erfolg anwendbar ist, wenn L einem *Abschnitt* von W ähnlich ist; denn W selbst kann in dieser Weise nicht Hilfsmittel eines Beweises sein. Der obige Schluß würde also nur dann erlaubt sein, wenn man vorher zeigen könnte, daß L niemals gleich W werden kann; das ist aber wiederum der Satz selbst.

Abgesehen von diesem formalen Einwand bemerke ich noch folgendes.

1. Der obige Beweis läßt sich, wenn man ihn von der Zermeloschen Terminologie befreit, folgendermaßen darstellen. Man wähle

1) Math. Ann. 59 (1904) S. 514. Vgl. dazu die Bemerkungen von Bernstein, Borel und dem Verfasser, ebenda 60 (1905) S. 181, 187, 194.

aus M ein Element m_1 aus, aus der Restmenge M_1 ein Element m_2, aus der nun bleibenden Restmenge ein Element m_3 usw. und bilde die wohlgeordnete Menge $m_1, m_2, m_3 \ldots$, so kann dieser Prozeß nie zu Ende kommen, außer im Fall der Erschöpfung von M. Denn sonst hätte man wieder $M = (L, M')$ und käme, da man doch aus M' ein Element m' auswählen kann, auf einen Widerspruch.[1] Der Unterschied besteht nur darin, daß hier die Auswahl des Elementes m' aus jeder Restmenge M' *erst dann* erfolgt, wenn sich M' als Restmenge einstellt, während sie bei Zermelo *von vornherein* vorhanden ist. Ob man das ausgewählte Element noch als ausgezeichnetes bezeichnet oder nicht, tut naturgemäß nichts zur Sache.

Die erste dieser beiden Annahmen ist eine *konstruktive*, die zweite eine *axiomatische*; jede von ihnen bedarf für ihre Einführung eines Postulats. Der Zermelosche Übergang zur axiomatischen Annahme bedeutet daher weniger einen materiellen Fortschritt als vielmehr eine theoretische Verschiebung des Problems.

2. Die im Zermeloschen Beweis liegende Voraussetzung, es sei möglich, aus jeder Teilmenge M' von M eines ihrer Elemente auszuwählen, wird jetzt in seiner allgemeinsten Form als das Zermelosche *Prinzip der Auswahl* bezeichnet.[2]) Wird dieses Prinzip für irgendeine Menge zugelassen, was wie eben erwähnt eine axiomatische Annahme einschließt, so kann man den Zermeloschen Beweis folgendermaßen analysieren. Er zeigt, daß man das Prinzip der Auswahl benutzen kann, um eine Menge in eine wohlgeordnete Form zu bringen, indem man die Elemente, wie oben geschehen, aufeinander folgen läßt; und es besteht der wesentliche Teil des Zermeloschen Beweises darin,

1) Dies dürfte auch diejenige Überlegung sein, die Cantor bestimmte, den Satz als ein notwendiges Denkgesetz zu bezeichnen. Auf dieses Argument müssen sich alle derartigen Beweise sachlich stützen. Man vgl. auch die Bemerkung von E. Borel, Math. Ann. 60 (1905) p. 194.

2) Um sich den ungeheuren Inhalt dieses Prinzips vorzustellen, nehme man als Menge M die Punkte des R_2; dann ist die Gesamtheit aller Teilmengen identisch mit der Gesamtheit aller seiner Punktmengen.

In neuerer Zeit sind auch noch andere derartige Prinzipe aufgestellt worden. Zermelo hat bei Gelegenheit seines Beweises auch das Prinzip aufgestellt, daß das Produkt einer unendlichen Gesamtheit von Mengen nicht Null sein kann. Bernstein benutzt das Prinzip, daß bei einer Zerlegung einer Menge M in Teilmengen die Gesamtheit dieser Teilmengen höchstens die Mächtigkeit m hat. Er hat im Anschluß hieran den Begriff der *vielwertigen Äquivalenz* aufgestellt. Äquivalente Mengen können nämlich auf mehr als eine Weise in eineindeutige Beziehung gesetzt werden; die Menge dieser Äquivalenzbeziehungen ist naturgemäß selbst eine Kardinalzahl (Multiplizität der Abbildung), die bei den einzelnen Betrachtungen und Beweisen sehr verschiedener Werte fähig ist. Vgl. Anm. 3 S. 18.

zu zeigen, daß die sich so einstellende Ordnung eine Wohlordnung ist, was übrigens aus der Theorie der wohlgeordneten Mengen unmittelbar evident ist. Man kann hinzufügen, daß für *jede* Menge die Wohlordnung soweit realisierbar ist, als das Prinzip der Auswahl realisierbar ist. Dieser Teil des Beweises bedarf des Schlusses, der auf (L, m) beruht, überhaupt nicht.[1])

3. Man kann daher den Zermeloschen Beweis dahin charakterisieren, daß er die Äquivalenz des Prinzips der Wohlordnung mit dem Prinzip der Auswahl feststellt.

4. Ist der Wohlordnungssatz bewiesen, so gelten damit für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ die Alephsätze; insbesondere ist $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ usw.

5. Statt des Prinzips der Auswahl könnte man auch die Vergleichbarkeit axiomatisch einführen. Sie enthält einen wesentlich geringeren Inhalt als das Auswahlprinzip; denn dieses bezieht sich auf die einzelnen Teilmengen, während die Vergleichbarkeit nur die Gesamtmenge ins Auge faßt. Die in 4. genannten Folgerungen, die ein sehr wesentliches Ziel des Wohlordnungssatzes sind, könnten dann auf dem in § 8 genannten Wege abgeleitet werden.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich endlich auch die Ideen von Ph. Jourdain.[2]) Er knüpft einerseits an Cantors Begriff der *inkonsistenten* Menge, andererseits an die Hardysche Argumentation an und zieht aus ihr den Schluß, daß es wirklich „Mengen" gibt, die größer als jedes Aleph sind.[3]) Diese nennt er nunmehr ebenfalls inkonsistent, da es doch widerspruchsvoll sei, sie als eine wohlgeordnete Gesamtheit vorzustellen. Daraus folgert er dann, daß jede konsistente Menge notwendig ein Aleph ist[4]), insbesondere also auch das Kontinuum, sowie die Menge aller Funktionen usw. Später operiert er sogar mit einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{W}$, von der W nur ein Abschnitt sei, so daß aber dem W und allen folgenden Abschnitten Ordnungszahlen nicht mehr entsprechen.[5]) Auf eine nähere Kritik kann mit Rücksicht auf die obigen Ausführungen verzichtet werden.

---

1) Der Zermelosche Beweis enthält — abgesehen von dem Prinzip der Auswahl — einzig und allein diesen obigen Schluß. Denn der vorhergehende Teil des Beweises zeigt nur, daß eine Reihe, die nach den Gesetzen der wohlgeordneten Mengen gebildet ist, wirklich eine wohlgeordnete Menge ist — was eines Beweises nicht weiter bedarf.

2) Phil. Mag. (6) 7 (1904) p. 61 u. 294 und Proc. Lond. M. S. (2) 4 (1907) p. 266.

3) Die Möglichkeit solcher Mengen wird auch bei Bernstein zugelassen. Math. Ann. 60 (1905) p. 87.

4) Diese Folgerung stützt sich also nur auf eine Bezeichnung.

5) p. 51 u. 53, wo es heißt: We must agree to regard the series of these Cantor's ordinal numbers as similar to a *segment* merely of $\mathfrak{W}$; und: the series

§ 10. *Die axiomatische Behandlung.* Als formales Ziel der Behandlung der Mengentheorie wird man ihren *axiomatischen Aufbau* betrachten. Erheblichere Resultate sind hier bisher nicht zu nennen. Die Untersuchung scheint mir deshalb schwieriger zu sein, als in der Geometrie, weil die empirischen Elemente, die in unsere Raumanschauung eingehen, leichter analysierbar sind, als diejenigen, die den Begriffen der Mengenlehre zugrunde liegen. Denn diese betreffen auch die Grundlagen der Arithmetik und der gesamten Logik. Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre würde daher gleichwertig mit der kritischen Analyse der Grundlagen unserer gesamten Erkenntnis sein. Diese dürfte aber in ihrem letzten Grunde nur auf psychologischer Grundlage möglich sein.

In der letzten Zeit haben sich auch so gewichtige Namen wie Hilbert[1]) und Poincaré an dieser Analyse beteiligt. Die von Hilbert begonnene axiomatische Einführung der allgemeinsten mengentheoretischen Grundbegriffe enthält als Hauptbestandteil den folgenden Satz: Ist irgendein System von Dingen durch widerspruchslose Axiome definiert, so bilden diejenigen Dinge, für die eine gewisse Aussage richtig ist, eine wohldefinierte Menge.[2]) Poincaré hat sich vornehmlich in kritischer Richtung bewegt und seine warnende Stimme gegen die Überschätzung der formal deduktiven Methoden erhoben. Er hat sich insbesondere mit dem Prinzip der *vollständigen Induktion* beschäftigt und darauf hingewiesen, daß es nicht ohne Benutzung eines rekurrenten Verfahrens ableitbar erscheint, und daß jeder Versuch, es beweisen zu wollen, es im Beweise benutzt; dies gelte von allen bisher gegebenen Beweisen. Dies ist, soviel ich sehe, das wichtigste, was Poincaré in dieser Hinsicht gegenüber Russell und Whitehead betont.[3]) Wenn er dem gegenüber überdies an die *Intuition* als Quelle unserer mathe-

---

W is well ordered; although it cannot have a type and evidently other well-ordered series (having no types) transcending W can be formed. So we must conclude that the series W is similar to a segment merely of the series $\mathfrak{W}$, such that every well ordered series is similar either to it or to a segment of it.

1) Vgl. S. 29 Anm. 1. Die Ausführung dieser Ideen gibt J. Mollerup, Math. Ann. 64 (1907) S. 231.

2) Begriffe, mit denen sich logisch operieren läßt, entstehen nur, wenn es in dem Gebiet, auf das sie sich beziehen, Objekte gibt, die unter sie fallen und solche die nicht unter sie fallen; das „All" kann nicht Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtung sein. Dies dürfte auch im Hilbertschen Satz zum Ausdruck kommen.

3) Revue générale de métaphysique et morale 13 (1905 u. 1906). Übrigens hat sich Poincaré keineswegs gegen den Gebrauch des Prinzips der vollständigen Induktion ausgesprochen, sondern nur gegen seine Beweisbarkeit. Er nennt es einmal „à la fois nécessaire au mathématicien et irréductible à la logique" und ein anderes Mal „le raisonnement mathématique par excellence". Er weist überdies darauf hin, daß es nur mittels der Benutzung von rekurrenten Reihen be-

matischen Erkenntnis appelliert, so möchte ich darin den Hinweis sehen, daß in unser Wissen an den verschiedensten Stellen und in den verschiedensten Phasen der Entwicklung immer wieder *neue* Vorstellungen eingehen, die ihm durch Deduktion nicht entnommen werden können. Sie entstehen durch Verallgemeinerung und Verarbeitung des empirisch gegebenen oder erworbenen Stoffs und haben insofern immer wieder einen *axiomatischen* Charakter.[1])

Insbesondere enthält der Bernstein-Schrödersche Satz in demjenigen Teil des Beweises, der den Schluß von $\{\nu\}$ auf ω fortführt, ein für die Mengenlehre als axiomatisch anzusehendes neues methodisches Hilfsmittel, nämlich das Prinzip der *transfiniten Induktion* und damit diejenige Schlußweise, die fast der ganzen höheren Mathematik erst das Leben gab.

§ 11. *Schlußbemerkung. Die Skepsis.* Ich würde den Tatsachen nicht Rechnung tragen, wenn ich verschweigen würde, daß in der letzten Zeit eine beinahe wachsende *Skepsis* gegen die Mengenlehre Platz gegriffen hat.[2]) Insbesondere haben die logischen Paradoxien bereits angefangen, der glänzenden Schöpfung Cantors einen Teil ihres Ansehens zu rauben und ein unverdientes Mißtrauen gegen ihre Gesetzmäßigkeit hervorzurufen. Meines Erachtens mit höchstem Unrecht. Die Mengenlehre hat die verschiedensten Gebiete der Mathematik befruchtet, sie hat unsere Auffassung geklärt, unser mathematisches Denken vertieft und seit ihrem Entstehen außerordentliche Resultate gezeitigt. Nirgends in den Anwendungen sind irgendwelche Widersprüche zu Tage getreten. Es ist unmöglich sich vorzustellen, daß sie je wieder aus der Welt der mathematischen Gedanken verschwindet.

---

weisbar sei, daß aber der Gebrauch solcher Reihen mit dem Prinzip gleichwertig ist. Ich möchte hinzufügen, daß der Übergang von den rekurrenten Reihen zu dem Prinzip des Schlusses von ν auf $\nu + 1$ methodisch einen Fortschritt darstellt. Die mit rekurrenten Reihen operierenden Beweise von König und Bernstein (vgl. S. 12 Anm. 1) stützen sich also implizite auch auf das Prinzip der vollständigen Induktion.

1) Die Frage nach der Bildung dieser Wissenselemente ist keine mathematische, sondern eine psychologische und erkenntnistheoretische. Poincaré weist im Anschluß an Kant auf die synthetischen Urteile hin. Vielleicht ist eine Einigung im Sinne des Textes dahin möglich, daß jeder mathematische Begriff sich einerseits auf die Erfahrung stützt und andererseits wieder über sie hinausgeht.

2) Auch Borel hat sich dem bereits angeschlossen; vgl. C. R. 137 (1903) p. 905; im Gegensatz zu der vorzüglichen Antwort, die er früher einmal auf philosophische Einwendungen gegen die Theorie der Unendlich und die zweite Zahlklasse gab; Revue philosophique 48 (1899) p. 383, 49 (1900) p. 378.

Paradoxieen und Antimonieen können auch in anderen Wissenschaften auftreten; man braucht nicht einmal an den Kreter Epimenides zu denken. Der Unterschied ist nur der, daß sie dort nicht ernst genommen werden und nicht zu Zweifeln an der Sache Anlaß gegeben haben. In der mathematischen Literatur hat man aber selbst auf autoritärer Seite das Scholastische der Deduktionen überhaupt nicht oder doch nicht rechtzeitig erkannt. Deshalb hielt ich es für geboten, die bisher bekannt gewordenen Antinomien zergliedernd aufzulösen und zu zeigen, daß in sie widerspruchsvolle Begriffe eingehen, und daß sie deshalb jenseits des wissenschaftlichen Denkens liegen. Es scheint mir durchaus notwendig, daß sich die Mengentheorie nicht in scholastische Sackgassen verirrt.

Als völlig gesichertes Besitztum können wir die zweite Zahlklasse betrachten. Ist sie doch nicht etwa auf abstraktem Boden erwachsen, sondern an der Hand drängender Probleme entstanden. Seitdem haben sich die Gebiete, die auf sie hinweisen, ständig vermehrt. Sie beruht daher auf der gleichen empirischen Grundlage, wie die übrigen mathematischen Schöpfungen und ist durch die nämliche Methode berechtigten und erlaubten Verallgemeinerns entstanden wie diese.

In ihr herrscht dieselbe Harmonie der Gesetze, wie in der gewöhnlichen Zahlentheorie. Sind diese Gesetze zunächst auch abstrakter Natur, so sind es die der Zahlentheorie nicht minder; auch wissen wir nicht, welcher Vollendung sie noch fähig sind und welche Befruchtung sie eines Tages bewirken können.[1])

Ich verkenne nicht, daß noch grundlegende Fragen der Antwort harren, insbesondere die der Vergleichbarkeit und der Wohlordnung. Ich muß ferner zugeben, daß wir in diesen Fragen kaum erheblich weiter gekommen sind. Ich räume auch ein, daß die fortschreitende Reihe der Alephs noch nichts von ihrer Unnahbarkeit verloren hat, daß sie insofern hypothetisch ist und vorläufig nur eine Analogie zum Aleph der zweiten Zahlklasse darstellt. Aber welcher Meinung man auch in diesen Punkten sein mag, so kann es, wie ich schon erwähnte, und hier wiederholen möchte, nur einen Wahlspruch geben, nämlich den, dem ich im Beginn dieses Kapitels Ausdruck gegeben habe.

---

1) Übrigens gibt die auf S. 9, Anm. 4 erwähnte Hessenbergsche Schrift eine Ausdehnung ihrer Sätze auf beliebige transfinite Ordnungszahlen.

Kapitel II.

Geordnete Mengen.

Besondere linear geordnete Mengen, die eine wichtige Eigenschaft der wohlgeordneten Mengen verallgemeinern, hat Hausdorff betrachtet; er nennt sie *gestufte* Mengen. Die sie definierende Eigenschaft lautet, daß keine zwei ihrer Abschnitte einander ähnlich sind. (§ 1.)

Wir verdanken Hausdorff auch die sonstigen Fortschritte, die wir über geordnete Mengen besitzen. Sie schließen daran an, daß man das Linearkontinuum als Belegungsmenge betrachten kann. Wird nun eine geordnete Menge A mit den Elementen einer geordneten Menge M belegt, so kann man die Elemente der Belegungsmenge in der gleichen Weise anordnen, wie die das Kontinuum bildenden dyadischen Brüche, nämlich nach den ersten voneinander verschiedenen Stellen, und so die Belegungsmenge ebenfalls in eine *geordnete* Menge verwandeln. Die so entstehenden Ordnungstypen haben zugleich alle Eigenschaften der Potenz, sie können daher als Verallgemeinerung des Potenzbegriffes betrachtet werden. Der so gewonnene Begriff umfaßt insbesondere auch die aus den Ordnungszahlen gebildeten Potenzen (§ 2). Auf ein erstes Beispiel eines solchen Typus hatte bereits Bernstein die Aufmerksamkeit gelenkt; es entsteht durch Belegung einer Menge A vom Typus ω mit den Zahlen der ersten oder zweiten Zahlklasse. Bernstein bezeichnete es als *Ultrakontinuum*. Wie Hausdorff zeigt, kann man durch geeignete Wahl der Mengen A und M nicht weniger als $\aleph_1$ analoge Typen aufstellen und dies überdies so, daß sie mit dem Kontinuum die ihm zukommenden Eigenschaften der Homogenität, Perfektheit, Umkehrbarkeit, Stetigkeit usw. gemein haben. (§ 3, 4.)

Im einzelnen beschäftigt sich Hausdorff noch mit den homogenen Typen zweiter Mächtigkeit und mit denjenigen, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen. Für beide gibt er eine Klassifizierung und eine Ableitung der vorhandenen Gattungen. Der Nachweis der Existenz dieser Gattungen kann in fast allen Fällen geführt werden; er bleibt nur für diejenigen offen, bei denen die Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums eine Rolle spielt. Die Klassifizierung beruht einerseits

darauf, ob der Typus Lücken hat oder nicht, andererseits auf der Art und Mächtigkeit der Elementenfolgen, als deren Grenzelemente die einzelnen Elemente der geordneten Menge erscheinen. (§ 5, 6 u. 7.) Auf die so definierten Mengen kann auch die gewöhnliche Stetigkeit übertragen werden. (§ 9.)

Eine linear geordnete Menge stellen auch die Zahlen des Veroneseschen Kontinuums dar; es fällt in allen den Formen, in denen es G. Veronese und T. Levi-Cività konstruiert haben, unter den allgemeinen Hausdorffschen Potenzbegriff. Gegenüber dem gewöhnlichen Kontinuum besteht seine wesentliche Eigenart darin, daß es Lücken enthält. (§ 8.)

Die Bedeutung der Veroneseschen Ideen liegt bekanntlich in ihrer Beziehung zum archimedischen Axiom und dem Nachweis, daß man den Dedekindschen Stetigkeitsbegriff so verallgemeinern kann, daß man sich von diesem Axiom frei macht. Die genauere Untersuchung der arithmetischen Natur seiner Zahlen hat Veronese nicht selbst geliefert. Sie ist erst durch O. Hölder begonnen worden; im Anschluß an dessen Resultate habe ich sie alsdann weiter fortgeführt. Veroneses Behauptung, das von ihm konstruierte Kontinuum gestatte die Einführung der projektiven Geometrie, besteht danach nur zu Recht, wenn man sich auf rationale Operationen beschränkt. Die Ausführbarkeit anderer Operationen erfordert eine Verallgemeinerung des Zahlengebiets, die wieder von der Natur dieser Operationen abhängt. (§ 10, 11.)

Ich schließe mit einigen Erörterungen über die Unendlich (§ 12) und das Pantachieproblem. Die Pantachiefragen haben insofern einen Fortschritt aufzuweisen, als wir durch Hausdorff wenigstens zu präzisen Begriffsbestimmungen auf diesem Gebiet gelangt sind. Er hat den Ordnungstypus der homogenen Pantachien in seine allgemeine Theorie eingeordnet und eingehend analysiert, außerdem auch einen Existenzbeweis für derartige Typen gegeben. Abschließende Resultate über die hier interessierenden Fragen liegen freilich noch nicht vor (§ 13). Auch auf die sogenannte Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz fällt durch sie etwas Licht. (§ 14).

§ 1. *Gestufte Mengen.*[1]) Die gestuften Mengen sind besondere linear geordnete Mengen. Die sie definierende Eigenschaft lautet, daß *keine zwei ihrer Abschnitte einander ähnlich sind*, wie es für die endlichen und die wohlgeordneten Mengen der Fall ist.

Ich berücksichtige im folgenden nur unendliche Mengen. Solche

1) Vgl. F. Hausdorff, Leipz. Ber. 53 (1901) S. 460.

Mengen erhält man z. B., wenn man die rationalen Zahlen r irgendwie eindeutig den ganzen Zahlen ν zuordnet und dann in der der Größe nach geordneten Menge der rationalen Zahlen jedes Element r durch ν Elemente ersetzt; ein anderes Beispiel entsteht, wenn man die Potenzen von ω so ordnet, daß ω^ν dem $\omega^{\nu-1}$ vorangeht, also den Typus $\ldots \omega^\nu + \cdots + \omega^2 + \omega$ bildet. Für die gestuften Mengen bestehen folgende Sätze.

1. Ist M eine gestufte Menge, setzt man

$$M = A + B + C, \quad \mu = \alpha + \beta + \gamma,$$

und wird α als *Anfangsstück*, β als *Mittelstück*, γ als *Endstück* bezeichnet, so ist auch jedes dieser Stücke eine gestufte Menge, und es ist das Mittelstück niemals der Menge selbst ähnlich.

2. *Mit M und N ist auch $M + N$ und MN sowie auch jede wohlgeordnete Menge gestufter Mengen selbst gestuft.*

Dagegen bleibt im Gegensatz zu den wohlgeordneten Mengen eine gestufte Menge nur dann immer gestuft, wenn man eine *endliche* Menge ihrer Elemente wieder durch gestufte Mengen ersetzt.

Eine Unterart der gestuften Mengen M bilden diejenigen, für die auch die Menge $^*M$ eine gestufte ist: sie enthalten weder Stücke vom Typus ω noch auch solche vom Typus $^*\omega$. Alle Typen dieser Art entstehen so aus überall dichten Mengen, daß man deren Elemente durch endliche Mengen ersetzt. Ein Beispiel bildet also die oben aus den rationalen Zahlen abgeleitete abzählbare Menge. Es gibt aber auch Typen höherer Mächtigkeit. Einen solchen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ erhält man z. B., indem man in dem der Größe nach geordneten Kontinuum $0 < x < 1$ jedes rationale x durch eine endliche Menge so ersetzt, daß keine von ihnen der andern ähnlich ist. Auch für sie sind mit M und N auch $M + N$ und MN Mengen desselben Typus, wie M und N.

3. *Die Mächtigkeit aller gestuften abzählbaren Typen ist gleich* $\mathfrak{c}$. Allgemein besteht der Satz: Gibt es gestufte Typen, die die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ haben, so bilden *alle* Typen der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ eine Menge der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$, falls für $\mathfrak{m}$ die Gleichung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ besteht.

§ 2. *Die allgemeine Potenz.* Man denke sich die Zahlen $0 < x < 1$ des Linearkontinuums eineindeutig durch unendliche dyadische Brüche dargestellt und ordne sie der Größe nach. Sind dann

$$x = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots \qquad y = 0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots$$

irgend zwei Zahlen, und sind a_ν und b_ν die ersten ungleichen Ziffern, so ist $x_\nu \gtrless y_\nu$ je nachdem $a_\nu \gtrless b_\nu$ ausfällt.[1]) Der so erhaltene Ordnungs-

1) Ich benutze auch für die Rangbeziehungen die Zeichen $<$ und $>$.

typus ist dann Ordnungstypus einer Menge, deren Elemente Belegungen des Typus ω mit 2 sind, und deren Mächtigkeit die Potenz $2^{\aleph_0}$ ist. Dies bildet die Grundlage der folgenden allgemeinen Untersuchungen von Hausdorff, die die *Verallgemeinerung* des Cantorschen *Potenzbegriffes* betreffen.[1])

Seien α und μ die Ordnungstypen der linear geordneten Mengen A und M von den Mächtigkeiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$. Man bilde sich nun zunächst Elemente, die den dyadischen Brüchen analog sind; dies geschieht, indem man eine geordnete Menge

$$(1) \qquad x = \{x_\alpha\} = \sum x_\alpha {}^{2})$$

in der Weise herstellt, daß für jedes Element von α ein Element von M eingesetzt wird. Jedes derartige Element hat dann den Typus α; andrerseits stellt es eine Belegung von A mit M dar, ihre Gesamtheit T hat daher die Mächtigkeit $\mathfrak{m}^{\mathfrak{a}}$. Diese Elemente x sollen jetzt ebenfalls geordnet werden.

Dazu suchen wir, wenn x und y irgend zwei solche Elemente sind, analog wie oben diejenigen Stellen, in denen x_α von y_α verschieden ist. Diese bilden je eine linear geordnete Menge; und *falls* diese ein erstes Element x_α bzw. y_α hat, so wird man $x > y$ oder $x < y$ festsetzen, je nachdem in der Menge M die Beziehung $x_\alpha > y_\alpha$ oder $x_\alpha < y_\alpha$ obwaltet. Diese Festsetzung soll als *Prinzip der ersten differierenden Stellen* bezeichnet werden. Sie *genügt dem Grundgesetz*; denn für diejenigen Elemente $x, y, z \ldots$, für die eine solche Definition möglich ist, gilt dann, daß aus $x < y$ und $y < z$ auch $x < z$ folgt.

Um diese Definition auf *je* zwei Elemente x und y zu übertragen, hebt Hausdorff ein bestimmtes Element m von M, das er *Hauptelement* nennt, heraus und beschränkt sich zunächst auf solche Belegungen von A mit M, in denen alle Stellen bis auf eine *endliche* Anzahl mit dem Hauptelemente m belegt sind, in denen also nur eine endliche Zahl andrer Elemente (*Nebenelemente*) vorkommt.[3]) Jetzt haben auch irgend zwei Elemente x und y nur eine endliche Zahl differierender Stellen und gestatten daher stets die vorstehende Ordnungsbestimmung. Wir gelangen so zu einer Teilmenge T_m von T, die nunmehr einfach geordnet werden kann. Ihr Typus hängt von m, μ, α ab, *er ist die Hausdorffsche Verallgemeinerung des Potenzbegriffs*, und

---

1) Leipz. Ber. 58 (1906) S. 106 u. 59 (1907) S. 84. Einen speziellen Fall dieses Potenzbegriffs erörtert Hessenberg Jahresber. d. D. M. V. 15 (1907) S. 130.

2) Das Zeichen Σ soll hier nur die Anordnung andeuten.

3) Wird also Null als Hauptelement gewählt, so enthält jede Menge 1) nur eine *endliche* Zahl Elemente x_β, die nicht Null sind.

zwar entstehen so die Potenzen *erster Klasse.* Bezeichnet man ihn durch $\mu_m(\alpha)$, so gelten nämlich die Relationen[1])

$$(2) \qquad \mu_m(\alpha)\cdot\mu_m(\beta) = \mu_m(\beta+\alpha);$$

und wenn

$$(3) \qquad \nu = \mu_m(\alpha) \text{ ist, so ist } \nu_n(\beta) = \mu_m(\alpha\beta),$$

wo n das Hauptelement von ν ist. Hausdorff nennt daher μ die *Basis* und α das *Argument*; den inversen Typus $^*\alpha$ nennt er *Exponent*[2]). Für endliches α stellt $\mu_m(\alpha)$ direkt ein Produkt von α gleichen Faktoren μ dar.

Die Mächtigkeit von $\mu_m(\alpha)$ ist vom Element m unabhängig; sie ist für endliches $\mathfrak{a}$ gleich $\mathfrak{m}^{\mathfrak{a}}$ und für transfinites gleich $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$.

Das wichtigste Beispiel dieses Potenzbegriffes ergibt sich, wenn man die Exponenten als Ordnungszahlen wählt, so daß das Argument eine inverse Ordnungszahl ist. Dieser besondere Fall enthält wiederum die Cantorschen Potenzzahlen der zweiten Zahlklasse, wie ω^ω, ω^α ... als Spezialfall; diese Potenzen sind nämlich dadurch charakterisiert, daß in ihnen auch die Basis eine Ordnungszahl ist und als Hauptelement m ihr erstes Element, und zwar die Null gewählt ist. Die Cantorsche Potenz μ^α ist also in der Hausdorffschen Bezeichnung $\mu_0(^*\alpha)$ zu schreiben.

Von diesen Potenzen *erster* Klasse kann man zu Potenzen *höherer Klassen* fortschreiten, je nach der Menge von Nebenelementen, die man zuläßt. Ist diese Menge nicht, wie bisher, endlich, sondern zunächst von *höchstens erster Mächtigkeit,* im übrigen aber eine *wohlgeordnete* Menge, so entstehen die Potenzen *zweiter* Klasse; ist sie eine wohlgeordnete Menge von höchstens zweiter Mächtigkeit[3]) $\aleph_1$, so entstehen die Potenzen dritter Klasse usw. Die Beschränkung auf wohlgeordnete Mengen bewirkt, daß die differierenden Stellen zweier Elemente x und y ebenfalls eine wohlgeordnete Menge bilden, und da diese stets ein erstes Element hat, so gestatten x und y stets die obige Ordnungsbeziehung; die Menge kann daher linear geordnet werden.[4]) Die so gewonnenen linearen Typen, die wir durch $\mu'_m(\alpha)$, $\mu''_m(\alpha)$ ... bezeichnen, und in denen m wieder das Hauptelement darstellt, genügen ebenfalls den oben genannten Potenzrelationen.[5])

1) $\alpha\beta$ bedeutet α eingesetzt in β; vgl. Bericht I, S. 30.

2) Die meisten Beispiele sind solche, in denen der Exponent eine inverse Ordnungszahl ist. Dies bedingt die oben eingeführte Terminologie und Bezeichnung.

3) Ich behalte die Bezeichnung zweite Mächtigkeit der Einfachheit halber bei; vgl. S. 32.

4) Umgekehrt ist diese Eigenschaft für lineare Anordnung auch notwendig.

5) Der obere Index bezeichnet die Klasse der Potenz.

Das wichtigste Beispiel dieses Potenzbegriffes erhält man, wenn man α als Ordnungszahl wählt, die die Mächtigkeit $\aleph_\nu$ besitzt und mit ihr die Potenzen der $(\nu+2)$ten Klasse bildet, bei denen also eine wohlgeordnete Teilmenge der Mächtigkeit $\aleph_\nu$ mit Nebenelementen belegt sein kann. Dies bewirkt nämlich, daß hier das Hauptelement einflußlos wird, da ja jetzt *alle* Teilmengen von α wohlgeordnet sind und überdies höchstens die Mächtigkeit $\aleph_\nu$ besitzen. Der zugehörige Typus, der durch $\mu^{(\nu+1)}(\alpha)$ bezeichnet werden kann, enthält daher die sämtlichen Belegungselemente von A mit M, also alle Elemente

$$x = (x_0 x_1 x_2 \ldots x_\omega \ldots x_\beta \ldots) = \sum x_\beta, \quad 0 \leq \beta < \alpha,$$

so daß für jedes x_β jedes Element von μ gesetzt werden kann.

§ 3. *Allgemeine Theorie der linearen Ordnungstypen höherer Mächtigkeit.* Die vorstehenden Potenzen finden ihre erfolgreichste Anwendung in der Theorie der linearen Ordnungstypen höherer Mächtigkeit, die wir ebenfalls Hausdorff verdanken.

Auf ein erstes Beispiel eines solchen Typus hat zuerst F. Bernstein die Aufmerksamkeit gelenkt.[1]) Seine Elemente x sind Zahlfolgen vom Typus ω

$$(1) \qquad x = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots,$$

deren Elemente α_ν Zahlen der ersten oder zweiten Klasse sind, also Belegungen von ω mit den Zahlen von $\aleph_1$. Um sie zu ordnen, verfährt Bernstein so, daß er $x > x'$ setzt, falls der erste Index ν, für den $\alpha_\nu > \alpha'_\nu$ ist, eine ungerade Zahl ist; ist er eine gerade Zahl, so setzt er $x' > x$. Diese Regel erfüllt das Grundgesetz, daß aus $x > x'$ und $x' > x''$ auch $x > x''$ folgt.[2]) Die Menge $\{x\}$ kann daher einfach geordnet werden. Aus dem so definierten *Ultrakontinuum U* kann man wieder die ultrarationalen Zahlen R_U herausheben, d. h. diejenigen, die mit einer *endlichen* Anzahl von Elementen α_ν aufgebaut sind. Die Mächtigkeit dieser Teilmenge R_U ist, wie leicht ersichtlich,

$$\aleph_0 \sum \aleph_1^\nu = \aleph_0 \sum \aleph_1 = \aleph_1,$$

während sich als Mächtigkeit $\mathfrak{r}$ von R zunächst $\aleph_1^{\aleph_0}$ ergibt; daraus folgt dann nach dem Bernsteinschen Satz (Kap. I, § 3) $\mathfrak{r} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.[3])

Ich teile nun zunächst einige von Hausdorff eingeführte Bezeichnungen mit.[4])

---

1) Math. Ann. 61 (1905), S. 152, vgl. auch Diss. Göttingen 1901, S. 48.

2) In der Dissertation war die Definitionseigenschaft für $x > x'$ anders gefaßt.

3) a. a. O. S. 154. Dort finden sich noch weitere Einzelresultate.

4) Vgl. auch die oben in § 1 genannten.

Alle Elemente von M, die zwischen zwei Elementen a und b liegen, sollen *Mittelstrecke* heißen, alle, die a vorangehen, *Anfangsstrecke*, alle, die b folgen, *Endstrecke*. Endlich bestimmen zwei Elemente a und b mit der zwischen ihnen enthaltenen Mittelstrecke ein *Intervall* $(a \ldots b)$. Die geordnete Menge M heißt ferner mit jeder Teilmenge A *konfinal*, wenn kein Element von M auf A folgt. Ebenso heißen M und A *koinitial*, wenn kein Element von M der Teilmenge A vorangeht. Endlich heißen M und A *koextensiv*, wenn sie koinitial und konfinal sind. Ferner soll die kleinste transfinite Ordnungszahl, die auf alle Zahlen von $\aleph_{\nu-1}$ folgt, durch ω_ν bezeichnet werden; es bilden also

$$(2) \qquad 1, \omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_\nu \ldots$$

die sämtlichen derartigen Ordnungszahlen mit endlichem Index. Wohlgeordnete Mengen vom Typus ω_ν sollen ω_ν-Reihen heißen; die Bedeutung des Begriffes der inversen $^*\omega_\nu$-Reihen ist damit von selbst ersichtlich. Die durch solche Reihen bestimmten Grenzelemente von M heißen ω_ν-Elemente bzw. $^*\omega_\nu$-Elemente in M. Damit kein Typus mit zwei verschiedenen Zahlen ω_ν und ω_ϱ konfinal sein kann, beschränkt sich Hausdorff auf endliches ν; es wird dadurch nämlich erreicht, daß für jede so zugelassene Menge $\aleph_\nu$ jede ihrer wohlgeordneten Teilmengen, die selbst kleiner als $\aleph_\nu$ sind, ein zu $\aleph_\nu$ gehöriges Grenzelement bestimmt,[1]) woraus die genannte Eigenschaft leicht gefolgert werden kann.

Die Übertragbarkeit der Cantorschen Bezeichnungen: „abgeschlossen", „in sich dicht" und „perfekt" ist damit von selbst gegeben; sie geschieht jedoch so, daß sie sich, wie auch bei Cantor, *nur an Reihen von den Typen ω bzw. $^*\omega$ anschließt.*

Das Vorstehende werde nun auf gewisse möglichst einfache Fälle angewandt. Dazu gehen wir von demjenigen besonderen Spezialfall des allgemeinen Potenzbegriffes aus, den wir in § 2 durch $\mu^{(\nu+1)}\alpha$ bezeichnet haben, und wählen insbesondere noch $\nu = 0$ oder $\nu = 1$. In diesem speziellen Fall ist dann auch α bestimmt, und zwar ist α eine Ordnungszahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, und jedes Element x des sich so ergebenden Typus $\xi = \{x\}$ hat die Form

$$x = x_0 x_1 x_2 \ldots x_\omega \ldots x_\beta \ldots = \sum x_\beta \ldots, \quad 0 \leqq \beta < \alpha,$$

wo jedes x_β irgendein Element von M sein kann. Die zugehörige Potenz, die nun einfacher durch $\mu(\alpha)$ bezeichnet werden möge, hat

1) Für $\aleph_\omega$ kann schon eine wohlgeordnete Menge vom Typus ω ein nicht zu $\aleph_\omega$ gehöriges Grenzelement bestimmen, z. B. die Menge $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu \ldots$ selbst; vgl. auch die Bemerkung auf S. 15 Anm. 2.

dann alle Eigenschaften der gewöhnlichen Potenz $\mu^{*\alpha}$. Der für die Potenz zugrunde gelegte Typus μ soll aber noch weiter in der Weise spezialisiert werden, daß er eine gewisse Verallgemeinerung des geordneten *begrenzten* Linearkontinuums ϑ darstellt, das ja für die Verallgemeinerung des Potenzbegriffes das Modell abgibt.[1]) Das begrenzte Linearkontinuum hat nämlich ein erstes und ein letztes Element, und außerdem kann es nur in eine endliche oder abzählbare Menge getrennter Intervalle zerfallen. Diese Eigenschaften sollen zunächst auch dem Typus μ auferlegt werden. Dabei werden wir zwei Intervalle $(x \ldots x')$ und $(y \ldots y')$ von μ, genau wie beim Linearkontinuum ϑ, dann als getrennt bezeichnen, falls sie *höchstens ein* gemeinsames Element besitzen, und legen nunmehr μ noch die Bedingung auf, daß keine Menge getrennter Intervalle selbst den Typus μ haben kann. Hausdorff beweist nun, daß es nicht möglich ist, zwei Mengen vom Typus $\mu(\alpha)$ und $\mu(\gamma)$ ähnlich aufeinander abzubilden, falls α und γ verschiedene Ordnungszahlen sind, d. h.

I. *Alle Potenzen $\mu(\alpha)$, die den verschiedenen Ordnungszahlen α entsprechen, sind für den so definierten Typus μ voneinander verschieden.*

Insbesondere gilt dies für die Fälle, daß μ eine endliche Basis oder aber das Linearkontinuum ist.[2])

Damit ist zugleich eine hinreichende Bedingung für die Verschiedenheit aller $\mu(\alpha)$ gewonnen, von der jedoch im folgenden im allgemeinen wieder abgesehen werden soll.

Es fragt sich nun weiter, ob oder inwieweit in diesen Typen zu jeder Fundamentalreihe ein Grenzelement vorhanden ist. In dieser Hinsicht gilt, daß, wenn α eine Limeszahl oder aber μ in sich dicht ist, auch $\mu(\alpha)$ in sich dicht ist, und daß, wenn μ begrenzt und abgeschlossen ist, $\mu(\alpha)$ ebenfalls begrenzt und abgeschlossen ist. Diese Eigenschaften lassen sich zu folgendem Satz verbinden:

II. *Ist μ begrenzt und abgeschlossen und α eine Limeszahl, oder ist μ begrenzt und perfekt, so ist auch der Typus $\mu(\alpha)$ begrenzt und perfekt.*

§ 4. *Homogene Typen und höhere Kontinua.* Dem allgemeinen linearen Typus $\mu(\alpha)$ sollen jetzt noch einige andere Eigenschaften des Linearkontinuums beigelegt werden, besonders die *Isomerie* und *Homogenität*. Die *Homogenität* ist diejenige Eigenschaft des *beiderseits unbe-*

---

1) Unter ϑ wird wie bei Cantor der Ordnungstypus des *begrenzten* Linearkontinuums verstanden; vgl. Math. Ann. 46 (1895) S. 510.

2) Eine endliche Basis μ ist nämlich erstens beiderseits begrenzt und zweitens beträgt die Zahl getrennter Intervalle für sie höchstens $\mu - 1$.

grenzten Linearkontinuums, daß alle seine Strecken den gleichen Typus haben wie es selbst. Demgemäß soll allgemein ein Typus μ *homogen* heißen, wenn alle seine Strecken ebenfalls den Typus μ haben. Die *Isomerie* dagegen kommt auch dem *begrenzten* Linearkontinuum ϑ zu; als *isomer* wird nämlich ein Typus μ bezeichnet, falls alle seine Mittelstrecken untereinander einen und denselben Typus besitzen. Hier entsteht wieder die Frage, wie sich diese Eigenschaften von den Typen μ auf die Potenzen $\mu(\alpha)$ übertragen. Diese Frage hat Hausdorff eingehend beantwortet. Das Resultat soll jedoch hier nur für das Linearkontinuum ausgesprochen werden, das ja für den allgemeinen Typus μ das Vorbild abgegeben hat.

Wir sprechen es in folgenden zwei Sätzen aus:

III. *Alle Potenzen* $\vartheta(\alpha)$ *sind untereinander verschieden, perfekt und stetig,*[1] *überdies noch umkehrbar; sie besitzen sämtlich die Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$.

IV. *Alle Potenzen* $\vartheta(\omega^\alpha)$ *sind isomer, nach Abtrennung der Randelemente homogen und mit* $\omega^* + \omega$ *koextensiv.*

Es gibt also sicher $\aleph_1$ verschiedene Typen $\vartheta(\omega^\alpha)$, die mit dem Kontinuum die charakteristischen Eigenschaften der Perfektheit, Isomerie, Stetigkeit, Umkehrbarkeit sowie die Mächtigkeit gemein haben und daher als *Kontinua höherer Ordnung* bezeichnet werden können.

§ 5. *Die homogenen Typen zweiter Mächtigkeit.* Eine erste Methode, um Typen zweiter Mächtigkeit zu konstruieren, ist folgende[2]: Seien $\alpha > \beta$ irgend zwei Zahlen der zweiten Zahlenklasse, so beweist man leicht, daß sie eindeutig eine dritte Zahl ζ bestimmen, so daß

$$(1) \qquad \beta\zeta \leq \alpha < \beta(\zeta + 1)$$

ist. Je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, ist dann

$$\alpha = \beta\zeta \quad \text{oder} \quad \alpha = \beta\zeta + \gamma, \quad 0 < \gamma < \beta.$$

Man fasse nun analog wie im Bereich der aus den gewöhnlichen rationalen Zahlen gebildeten Brüche zwei Zahlen $\alpha > \alpha_1$ zu einem Zahlenpaar α/α_1 zusammen; auch hier soll α Zähler und α_1 Nenner heißen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl ξ_1, so daß

$$\alpha_1 \xi_1 \leq \alpha < \alpha_1(\xi_1 + 1)$$

1) Die Bedeutung dieses Begriffes wird in § 9 erörtert.

2) Die folgende Kettenbruchentwickelung ist die Verallgemeinerung eines speziellen von Cantor abgeleiteten Resultats, Math. Ann. 49 (1897) S. 236. Sie wurde von Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, S. 575 ff. und von Hausdorff, Leipz. Ber. 58 (1906) S. 144 abgeleitet.

ist. Ist $\alpha_1 \xi_1 < \alpha$, so gibt es dem vorigen gemäß ein α_2, so daß $\alpha_2 < \alpha_1$ ist, und es gibt eine Zahl ξ_2, so daß

$$\alpha_2 \xi_2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 (\xi_2 + 1)$$

ist. Ist nicht etwa $\alpha_2 \xi_2 = \alpha_1$, so gibt es ein $\alpha_3 < \alpha_2$, also auch ein ξ_3, und da es keine unendliche Menge abnehmender Zahlen $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ gibt, so muß dieser Prozeß nach einer endlichen Zahl von Schritten ein Ende nehmen. Er bestimmt daher eindeutig eine Kettenbruchentwicklung der Form

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\nu-2} &= \alpha_{\nu-1} \xi_\nu + \alpha_\nu, \\ \alpha_{\nu-1} &= \alpha_\nu \xi_\nu . \end{aligned}$$

Zu dem Zahlenpaar α/α_1 gehört also eine eindeutig bestimmte Folge

$$(2) \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu).$$

Umgekehrt bestimmt diese Kettenbruchfolge unendlich viele Zahlenpaare α/α_1, da man ja α_ν beliebig wählen kann. Eindeutig wird dies Zahlenpaar, falls wir $\alpha_\nu = 1$ setzen. Dieses Zahlenpaar heiße das *reduzierte* Paar und werde durch δ/δ_1 bezeichnet.

Die so bestimmten Kettenbruchfolgen $\{\xi\}$ kann man nun wieder linear ordnen, und zwar liegt es nahe, dies nach der Größe der in sie eingehenden ξ_ν zu tun. Es ist aber zweckmäßig, diese Folgen sämtlich als unendliche Folgen vom Typus ω zu schreiben, indem man ihnen lauter Elemente Ω anfügt, so daß

$$(3) \quad \xi = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu) = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu \Omega \Omega \cdots) = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu \xi_{\nu+1} \cdots)$$

zu setzen ist. Ist nun

$$\eta = (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\mu) = (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\mu \Omega \Omega \cdots) = (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\mu \eta_{\mu+1} \cdots)$$

eine andere Kettenbruchfolge, so soll die Größenbeziehung zwischen ξ und η in der Weise hergestellt werden, daß, wenn λ der kleinste Index ist, für den

$$\xi_\lambda > \eta_\lambda$$

ist, $\xi > \eta$ resp. $\xi < \eta$ sein soll, je nachdem λ eine *ungerade* oder *gerade* Zahl ist. Die so sich ergebende Rangordnung der Elemente ξ kann als *natürliche* Rangordnung der Paare α/α_1 bezeichnet werden; ihr Typus sei Ξ.[1]

1) Es ist nicht nötig, auch die Paare α/α_1 für $\alpha_1 > \alpha$ zu betrachten, da man sie invers ordnen kann und so den Typus Ξ^* erhält; der Gesamttypus $\Xi^* + 1 + \Xi$, der eine lineare Anordnung *aller* Paare α/α_1 darstellt, ist dem Typus Ξ ähnlich, und es ist überdies ${}^*\Xi = \Xi$.

Im Typus Ξ sind drei Arten von Grenzelementen zu unterscheiden. Die Reihe, die aus

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu, \beta)$$

entsteht, falls β alle möglichen Zahlen durchläuft, ist für gerades ν eine Ω-Reihe, für ungerades ν eine Ω^*-Reihe, und hat in beiden Fällen

$$\xi = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu \Omega \Omega \cdots) = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu)$$

als Grenzelement. Ist ξ_ν keine Limeszahl, also von der Form $\xi_\nu = \eta_\nu + 1$, so ist ξ auch Grenzelement der Reihe, die für wachsendes β aus

$$(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{\nu-1}, \eta_\nu, \beta)$$

entsteht, und die für gerades ν eine Ω^*-Reihe, für ungerades ν eine Ω-Reihe ist. Ist aber ξ_ν eine Limeszahl $\eta_\omega = \lim \eta_\nu$, so ist ξ Grenzelement der aus

$$(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{\nu-1} \eta_\nu)$$

entstehenden Fundamentalreihe, die für gerades ν eine ω^*-Reihe, für ungerades ν eine ω-Reihe ist. Daher gibt es dreierlei Klassen von Elementen in Ξ, die man als

$\Omega\Omega^*$-Elemente, $\Omega\omega^*$-Elemente und $\omega\Omega^*$-Elemente

charakterisieren kann.[1]) In bezug auf alle diese drei Arten von Elementen ist Ξ überalldicht; jedes seiner Elemente ist daher Grenzelement aller drei Elementarten für sich.

Aus dem so gewonnenen Typus Ξ, der selbst nicht homogen ist, lassen sich gewisse einfachere homogene Typen entnehmen. Dazu betrachte man diejenigen Teiltypen Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 von Ξ, die alle Elemente erster, resp. zweiter, resp. dritter Art enthalten, so ist jedes Element von Ξ_1 auch für Ξ_1 selbst ein $\Omega\Omega^*$-Element, also ein Element erster Art, ebenso jedes Element von Ξ_2 auch für Ξ_2 ein $\Omega\omega^*$-Element, daher ein Element zweiter Art, endlich jedes Element von Ξ_3 auch für Ξ_3 ein $\omega\Omega^*$-Element resp. ein Element dritter Art. Diese Typen besitzen aber noch weitere wichtige Eigenschaften; es bestehen nämlich die folgenden Sätze:

V. Ξ_1 *ist ein umkehrbarer homogener Typus zweiter Mächtigkeit, dessen Elemente sämtlich* $\Omega\Omega^*$*-Elemente sind.* Er teilt also mit den infinitären Pantachien (§ 13) die Eigenschaft, daß er überalldicht ist, und daß keine Fundamentalreihe in ihm ein Grenzelement hat.

---

1) Beispiele sind die Elemente $2 = \operatorname{Lim}_\beta (1, 1, \beta) = \operatorname{Lim}_\beta (2, \beta)$; $1, \omega = \operatorname{Lim}_\beta (1, \omega, \beta) = \lim_\nu (1, \nu)$; $\omega = \lim_\nu \nu = \operatorname{Lim}_\beta (\omega, \beta)$.

VI. Ξ_2 *ist ein isomerer, jede seiner Mittelstrecken ein homogener Typus zweiter Mächtigkeit, dessen Elemente sämtlich $\Omega\omega^*$-Elemente sind.*

VII. Ξ_3 *ist ein isomerer, jede seiner Mittelstrecken ein homogener Typus zweiter Mächtigkeit, dessen Elemente sämtlich $\omega\Omega^*$-Elemente sind.*

§ 6. *Klassifizierung der Typen zweiter Mächtigkeit.* Das vorstehende Resultat läßt den Weg erkennen, auf dem sich eine allgemeine Klassifizierung und Ableitung der homogenen Typen zweiter Mächtigkeit erreichen läßt. Sie sind danach einzuteilen, welcher Limescharakter einem jeden seiner Elemente zukommt. Es ergeben sich zunächst vier solcher Klassen. In der ersten ist *jedes* Element ein $\omega\omega^*$-Element, so daß also Ω-Reihen und Ω^*-Reihen kein Grenzelement bestimmen. In der zweiten ist analog jedes Element ein $\Omega\omega^*$-Element, in der dritten ein $\omega\Omega^*$-Element und in der vierten ein $\Omega\Omega^*$-Element. Eine weitere Unterscheidung beruht darauf, ob in den bezüglichen Typen überhaupt Ω-Reihen und Ω^*-Reihen vorkommen. Damit zerfällt die erste Klasse in vier Unterklassen, die zweite und dritte in je zwei, so daß insgesamt 9 derartige Klassen unterschieden werden können. Eine Unterteilung dieser Klassen kann nun noch danach erfolgen, ob die Typen *Lücken* (§ 9) enthalten, und welcher Art diese Lücken sind. Da eine Lücke einer solchen Zerlegung

$$\mu = \alpha + \beta$$

entspricht, in der α kein letztes und β kein erstes Element hat, so ist weiter zu unterscheiden, ob α mit ω oder Ω konfinal und ob β mit ω^* und Ω^* koinitial ist, und ob, resp. welche Lücken dieser Art in den Typen erscheinen. Danach unterscheidet Hausdorff insgesamt 50 mögliche Gattungen verschiedener Typen. Die weitere Frage, ob Typen dieser Art auch sämtlich existieren, läßt sich noch nicht völlig beantworten. Jeder überall dichte Typus ohne $\omega\omega^*$-Lücken enthält nämlich notwendig das Linearkontinuum als Teilmenge, und da es sich in dieser ganzen Untersuchung um Typen zweiter Mächtigkeit handelt, so kann über die Existenz dieser Typen ohne Kenntnis der Mächtigkeit von $\mathfrak{c}$ *nichts ausgesagt* werden.[1]) Das Problem muß daher zunächst auf die Typen mit $\omega\omega^*$-Lücken beschränkt werden. Solcher kann es 32 geben. Für jede dieser 32 Gattungen ist Hausdorff die wirkliche Konstruktion eines Vertreters gelungen bis auf eine Klasse, in die ebenfalls das Kontinuumproblem hineinspielt, nämlich diejenige, die nur $\omega\omega^*$-Elemente und $\omega\omega^*$-Lücken enthält. Diese wird

1) Hiermit wird für die Beantwortung des Kontinuumproblems ebenfalls ein Weg angezeigt, der nicht auf die Paradoxien zu führen braucht.

aber durch den *abzählbaren* Typus η der rationalen Zahlen vertreten; man kann daher den Satz aussprechen:

VIII. *Es existieren alle 32 Gattungen homogener Typen von höchstens zweiter Mächtigkeit mit* $\omega\omega^*$*-Lücken.*

Den Beweis führt Hausdorff mittels des allgemeinen Potenzbegriffs. Da aber Potenzen zweiter Klasse bereits die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben, so können für die Konstruktion dieser Typen nur Potenzen erster Klasse in Frage kommen und zwar genügt es, als Argumente die Typen ω und Ω zu benutzen. Die so enstehenden Typen erhalten dann — welches auch die Menge M sei — noch dadurch verschiedenen Gattungscharakter, daß man das Hauptelement m von M geeignet wählt.

§ 7. *Die homogenen Typen der Mächtigkeit des Kontinuums.* Als nächstes Problem entsteht die Aufgabe, homogene Typen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ für jede mögliche Gattung zu konstruieren. Zu ihnen gehört zunächst das Kontinuum selbst, das nach Hinzufügung der Randelemente umkehrbar, perfekt und isomer ist, sowie auch die ihm zunächst stehenden *Ultrakontinua*[1]), d. h. diejenigen Typen, die nach Hinzufügung der Randelemente ebenfalls umkehrbar, perfekt und isomer sind und daher, wie das Kontinuum ϑ, keine $\omega\omega^*$-Lücken enthalten. Sie unterscheiden sich vom Kontinuum dadurch, daß sie $\Omega\Omega^*$-Reihen enthalten, während diese im Kontinuum nicht auftreten. Wie es gemäß § 4 $\aleph_1$ verschiedene Ordnungstypen von dem eben genannten Kontinuumcharakter gibt, nämlich alle Potenzen $\vartheta(\omega^\alpha)$, so gibt es auch sicherlich $\aleph_1$ verschiedene *Ultrakontinua*[1]), nämlich die Potenzen zweiter Klasse $\Theta(\omega^\alpha)$ eines gewissen einfachsten Ultrakontinuums, das dem Linearkontinuum ϑ analog gebildet ist; es entsteht aus der Potenz zweiter Klasse mit der Basis $\Omega + \Omega^*$ und dem Argument ω, wenn man in ihr von den Paaren konsekutiver Elemente die linken Elemente tilgt.

Die Kontinua und Ultrakontinua repräsentieren nach Abtrennung der Randelemente bereits zwei Gattungen homogener Typen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.[2]) Die Konstruktion *aller* hier existierenden Gattungen kann auf Grund derselben Fallunterscheidungen erfolgen wie im vorigen Paragraphen und ge-

1) Diese Bezeichnung führte F. Bernstein in seiner Dissertation ein. Die dort und in den Math. Ann. 61 (1905) S. 154 konstruierten Typen sind jedoch keine Ultrakontinua im obigen Sinne und haben nicht die sämtlichen Eigenschaften, die Bernstein ihnen beilegt; vergl. die Ausführungen von Hausdorff a. a. O. S. 166 Anm.

2) Einen dritten stellen offenbar die irrationalen Zahlen oder die ihnen ähnlichen perfekten nirgends dichten Mengen dar, wenn man in ihnen die Intervallendpunkte tilgt.

staltet sich folgendermaßen. Von den 50 an sich möglichen Gattungen bleibt die Existenzfrage für 5 offen. Dies sind solche Typen, die weder $\omega\omega^*$-Elemente, noch auch $\omega\omega^*$-Lücken enthalten. Sie besitzen notwendig Ω-Reihen und Ω^*-Reihen, und man hat nun zu unterscheiden, ob sie $\Omega\Omega^*$-Lücken enthalten oder nicht. Im zweiten Fall ist nach einem von Hausdorff angegebenen Satz ihre Mächtigkeit größer als $\aleph_1$.[1]) Da man nun über das Verhältnis von $\mathfrak{c}$ zu $\aleph_1$ nichts weiß, so bleibt für die so charakterisierten Typen die Frage, ob es solche der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ gibt, notwendig offen.

Da die meisten dieser homogenen Gattungen wieder durch unzählig viele Typen vertreten sind, so wird dadurch, wie Hausdorff mit Recht hervorhebt, unsere Vorstellung des Begriffs „homogen" ganz außerordentlich erweitert.

Er gibt schließlich noch eine Übersicht über die große Zahl von Typen mit Reihen erster und zweiter Mächtigkeit, die überalldicht (§ 9) und unbegrenzt sind, ohne jedoch homogen und isomer zu sein.

§ 8. *Veroneses Konstruktion des Kontinuums.* Zu den allgemeinen homogenen linearen Typen höherer Mächtigkeit gehören auch diejenigen geordneten Mengen, in die G. Veronese das Linearkontinuum aufgelöst hat.

Im einfachsten Fall haben die Elemente des Veroneseschen Kontinuums, falls man die unendlich große Einheit durch ω, die unendlichkleine also durch $1/\omega$ darstellt[2]), folgende Form:

$$(1)\qquad A_1\omega^\varrho + A_2\omega^{\varrho-1} + \cdots + A_\varrho\omega + a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\nu}{\omega^\nu} + \cdots;$$

und zwar sind die Exponenten ν und ϱ endliche ganze positive Zahlen, während die Koeffizienten A_i und a_i irgendwelche Werte innerhalb des gewöhnlichen reellen Kontinuums haben können. Veronese bezeichnet sie allgemein als *transfinite* Zahlen. Größen dieser Art verletzen das sogenannte *Axiom des Archimedes* (§ 10) und werden daher auch als *nichtarchimedische* Größen bezeichnet.[3]) Ein einfachstes nichtarchi-

---

1) Der Beweis stützt sich auf die Voraussetzung, daß der betrachtete Typus wohl geordnet werden kann.

2) Die Benutzung des Zeichens ω, das hier *nicht* mit dem auch im folgenden gelegentlich benutzten Cantorschen ω identisch ist, dürfte Mißverständnisse nicht veranlassen. Die Einheit ω ist so definiert, daß für jede gewöhnliche reelle Zahl a und jede gewöhnliche ganze Zahl ν die Relation $\nu a < \omega$ besteht; vgl. auch § 10.

3) Auf Größensysteme dieser Art hat besonders O. Stolz mehrfach hingewiesen; vgl. seine Arithmetik, sowie besonders Monatsh. f. Math. 5 (1894) S. 233; ihre einfachsten Vertreter sind die Unendlich (vgl. Bericht I S. 53). Eine ausführliche historische Übersicht über das Auftreten transfiniter Größensysteme gibt G. Vivanti, Giorn. di mat. 38 (1900) p. 265 u. 39 (1901) p. 317.

medisches Größensystem erhält man übrigens schon, wenn man nur zwei Einheiten zuläßt, und unter ihnen eine einzige transfinite.[1]) Da ich später auf Zahlen mit einer endlichen Zahl transfiniter Einheiten eingehen muß, setze ich ihre Form noch hierher:

$$(1\text{a}) \qquad A_1\omega^\varrho + A_2\omega^{\varrho-1} + \cdots + A_\varrho\omega + a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\nu}{\omega^\nu},$$

wo wieder ϱ und ν ganze positive Zahlen sind.

Die Beziehung von Veroneses transfiniten Zahlen zum Hausdorffschen Potenzbegriffs ist genauer die folgende.

Betrachtet man zunächst diejenige Teilmenge der Zahlen (1), in der alle $A_i = 0$ sind, so kann jedes Element durch

$$(2) \qquad x = (a_0 a_1 \cdots a_\nu \cdots)$$

dargestellt werden; sie ist also eine Belegung einer Menge vom Typus ω mit $\mathfrak{c}$, andererseits folgt ihre Anordnung dem Prinzip der ersten Differenzen; die so geordneten Elemente (2) stellen daher, wenn das *unbegrenzte* Linearkontinuum durch λ bezeichnet wird, direkt die Hausdorffsche Potenz $\lambda(\omega)$ dar. Analog können die Elemente, die zu demselben Anfangsexponenten ϱ gehören, als Potenz $\lambda(\omega)$ aufgefaßt werden.

Um ferner *alle* Zahlen (1) oder (1a) als Potenz darzustellen, muß man 0 als Hauptelement der zu bildenden Potenz betrachten (§ 2). Dann stellen die sämtlichen Zahlen (1a) die Potenz erster Klasse $\lambda(\omega^* + \omega)$ dar, die mit $\omega^* + \omega$ als Argument und der Basis λ gebildet ist, ebenso alle Zahlen (1) die nämliche Potenz zweiter Klasse. Wenn man sich auf rationale Koeffizientenwerte A_i und a_i beschränkt (§ 11), so tritt statt λ der Typus η der rationalen Zahlen ein, und das gleiche gilt, wenn man statt η irgend eine in η überalldichte Teilmenge von η wählt.

Der so definierte Ordnungstypus ist zunächst homogen. Was ferner die Natur seiner Elemente betrifft, so sind $\Omega\Omega^*$-Elemente, sowie $\Omega\omega^*$ und $\Omega^*\omega$-Elemente ausgeschlossen. Lücken enthält er ebenfalls und zwar naturgemäß nur $\omega\omega^*$-Lücken; eine solche wird z. B. durch die Elementenfolgen

$$(2) \qquad 1\ 2\ 3 \cdots \nu \cdots \quad \text{und} \quad \omega, {}^1\!/_2\,\omega, {}^1\!/_3\,\omega, \cdots {}^1\!/_\nu\,\omega \cdots$$

---

1) Eingehender wurden solche Größen von R. Bettazzi behandelt; vgl. Teoria delle grandezze Pisa 1890. Einen besonderen Fall hat D. Hilbert in seinen Grundlagen der Geometrie (2. Aufl. S. 69) als Vertreter eines nicht archimedischen Zahlensystems konstruiert; vgl. dazu auch A. Bindoni, Rend. Linc. (5) 11_2 (1902) p. 205. Übrigens fallen auch die von K. Hensel benutzten Zahlen (dies. Jahresb. 14 (1905) p. 545), die nach Potenzen von Primzahlen fortschreiten, unter den obigen Begriff (1); es greifen daher für sie alle im folgenden abgeleiteten Resultate Platz, insbesondere auch diejenigen, die den Stetigkeitsbegriff betreffen.

dargestellt. Hierin liegt der wesentliche Unterschied zwischen dem Dedekindschen und dem Veroneseschen Kontinuum.

Die allgemeineren transfiniten Zahlen, die von Veronese und T. Levi-Civita angegeben worden sind, können hier nur kurz erwähnt werden. Es genüge, auf das ihnen gemeinsame Bildungsgesetz hinzuweisen. Dies lautet, daß bei jedem Element die *Exponenten von* ω *eine wohlgeordnete Menge bilden*, die, wenn wir zunächst vom allgemeinsten Fall absehen, endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, im übrigen aber jeder beliebigen Ordnungszahl entsprechen kann. Dabei beschränkt sich Veronese auf ganzzahlige Exponenten, während die Exponenten bei Levi-Civita auch andere Werte annehmen können, aber immer eine *linear geordnete* Menge bilden. So operiert z. B. Levi-Civita, wenn wir uns auf einen möglichst einfachen Fall beschränken, mit Zahlen der Form

$$a_{00}\omega^{\varrho_0} + a_{01}\omega^{\varrho_1} + \cdots + a_{10}\omega^{\sigma_0} + a_{11}\omega^{\sigma_1} + \cdots = \sum a_{0k}\omega^{\varrho_\varkappa} + \sum a_{1k}\omega^{\sigma_\varkappa},$$

in denen die ϱ_i und σ_k den Relationen

$$\varrho_i > \varrho_{i+1}, \quad \sigma_i > \sigma_{i+1}, \quad \varrho_i > \sigma_k$$

genügende reelle Größen sind, so daß also diese transfiniten Zahlen bei *festen* Exponenten Belegungen einer Menge vom Typus $\omega \cdot 2$ mit $\mathfrak{c}$ darstellen. Dagegen ergeben sich die höheren Zahlen Veroneses nur so, daß man zu transfiniten Einheiten übergeht, die größer als jedes ω^ν sind, z. B. zu ω^ω und allen Einheiten $\omega^{\omega-\nu}$, resp. zu ihren inversen. Zahlen dieser Art würden also die Form haben können

$$\sum_{i=0}^{\varrho} A_i\omega^{\omega+\varrho-i} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\omega^{\omega-\nu} + \sum_{i=0}^{\sigma} B_i\omega^{\sigma-i} + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\frac{1}{\omega^\nu};$$

sie sind beispielsweise so gewählt, daß auch bei ihnen die Exponenten eine wohlgeordnete Menge vom Typus $\omega \cdot 2$ bilden. Dies läßt sich auf beliebige andere wohlgeordnete Mengen erster Mächtigkeit ausdehnen.

Die *allgemeinsten* transfiniten Zahlen Veroneses endlich sind so beschaffen, daß die zugehörigen Exponenten eine wohlgeordnete Menge *zweiter* Mächtigkeit bilden können, nämlich eine Menge vom Typus Ω der zweiten Zahlklasse, während die Koeffizienten wieder alle reellen Zahlenwerte annehmen. Sie stellen bereits eine Potenz dritter Klasse mit dem Argument $(\omega^* + \omega)\Omega$, der Basis λ und dem Hauptelement 0 dar. Das so definierte Kontinuum bezeichnet er als das *absolute* Kontinuum.

Die Mächtigkeit des Veroneseschen Kontinuums ist im allgemeinen gleich $\mathfrak{c}$, welches auch die Wertmenge der Koeffizienten a_i und A_i sein mag (§ 2). Für das absolute Kontinuum ergibt sich eine Potenz

mit dem Exponenten $\aleph_1$, insbesondere $c^{\aleph_1}$, wenn für jeden Koeffizienten A_i und a_i, wie es bei Veronese geschieht, alle reellen Zahlenwerte zugelassen werden.

Jedes dieser Kontinuen enthält immer noch $\omega\,\omega^*$-Lücken; Ω- resp. $^*\Omega$-Elemente treten aber nur im absoluten Kontinuum auf. Von ihm soll jedoch im folgenden abgesehen werden.

Mit den so definierten Zahlen kann die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division in der Weise ausgeführt werden, daß man die Zahlen *formal* wie Potenzreihen von ω behandelt und nach *fallenden* Potenzen von ω entwickelt; dies bewirkt, daß auch in dem Resultat dieser vier Operationen die Exponenten stets eine wohlgeordnete Menge bilden. Es bleiben dann alle Rechnungsregeln in Kraft. Man kann daher, wenn man die Veronesesche Analyse des Kontinuums zugrunde legt und mit ihr eine Zahlenebene oder einen Zahlenraum definiert, auf diese Ebene und diesen Raum diejenigen Gesetze der projektiven Geometrie übertragen, die rationalen Operationen entsprechen.[1]) (Vgl. auch § 11).

§ 9. *Die Stetigkeit der Ordnungstypen.* Der Stetigkeitsbegriff enthält einen Bestandteil, der sich ausschließlich auf die *Anordnung* bezieht und daher für alle linearen Ordnungstypen in Betracht gezogen werden kann. Wird mit einem Typus μ eine *Teilung* in zwei Stücke vorgenommen, also

(1) $$\mu = \alpha + \beta$$

gesetzt, so sind an sich nur vier Fälle möglich. Es kann 1) α ein

1) Die Übertragbarkeit der Rechnungsgesetze beruht wesentlich darauf, daß die Exponenten in wohlgeordnetem Typus auftreten und niemals eine Teilmenge enthalten, die den Typus $^*\omega$ hat. Im Gegensatz hierzu hatte Veronese in seinem Fondamenti das *einzige* dort behandelte Beispiel (vgl. S. 217 der deutschen Ausgabe) so durchgeführt, daß auch Exponentenfolgen vom Typus $^*\omega + \omega$ auftreten. Er setzte nämlich

$$\frac{1}{\omega - m} = \frac{1}{\omega} + \frac{m}{\omega^2} + \cdots + \frac{m^\nu}{\omega^{\nu+1}} \cdots + \frac{m^{\nu-1}}{\omega^{\omega-\nu}} + \frac{m^\nu}{\omega^{\omega-\nu+1}} \cdots + \frac{m^{2\nu+1}}{\omega^\omega} + \frac{m^{2\nu+2}}{\omega^{\omega+1}} + \cdots,$$

und diese Formel ist offenbar nur dann richtig, wenn diese Reihe den Typus $\omega + {}^*\omega + \omega$ hat. Ich mußte deshalb annehmen, daß Veronese Exponentenmengen vom Typus $^*\omega + \omega$ zulassen will, und wies darauf hin, daß alsdann die Multiplikation nicht ausführbar ist. Veronese hat das Beispiel alsdann richtig gestellt und den Sinn seiner abstrakten und nicht immer bestimmten Begriffe präziser gestaltet. Vgl. meine Ausführungen in diesem Jahresb. 5 (1896) p. 75 und in den Rend. Lincei (5) 6 (1897) p. 362, sowie die Antworten von Veronese und Levi-Civita, Rend. Linc. (5) 7 (1898) p. 79, 91 und 113.

letztes, β ein erstes Element haben; 2) α ein letztes, β kein erstes; 3) α kein letztes, β ein erstes und 4) α kein letztes Element und β kein erstes. Im ersten Fall liegt ein *Sprung*, im vierten eine *Lücke* vor.[1]) Die Dedekindsche Stetigkeit ist dann so auf Ordnungstypen zu übertragen, daß sie in ihnen *Sprünge und Lücken ausschließt*. Man hat dann auch

$$\mu = \alpha' + 1 + \beta', \tag{2}$$

wo α' kein letztes und β' kein erstes Element enthält. Diese Definition bezieht sich naturgemäß zunächst auf eine einzige Teilung; ist sie für jede Teilung erfüllt, so soll ein Typus dieser Art kurz als *stetiger Typus* bezeichnet werden.[2]) Ein Typus heißt *überalldicht*, wenn er keine Sprünge enthält; endlich wird man einen überalldichten Typus *überall unstetig* nennen, wenn er auf keiner seiner Mittelstrecken stetig ist.[3])

Die Gesamtheit der geordneten Elemente, die man in die Lücken eines Typus einfügen kann, wollen wir als Menge vom *komplementären* Typus bezeichnen; es ist leicht ersichtlich, daß wenn ein überalldichter Typus μ überall unstetig ist, sein komplementärer Typus von gleicher Art ist.[4])

Für stetige Typen besteht, wie Hausdorff gezeigt hat, der Satz:

---

1) Diese Unterscheidung findet sich zuerst bei R. Bettazzi, in der S. 54 Anm. 1 genannten Schrift.

2) Das Kontinuum kann daher nur dann eindeutig auf einen linearen Ordnungstypus abgebildet werden, falls der Ordnungstypus ebenfalls Sprünge und Lücken ausschließt. Dies wurde zuerst von A. Harnack erkannt und dann in präziserer Form von R. Bettazzi ausgeführt; vgl. Math. Ann. 23 (1884) p. 185 und Ann. di mat. (2) 16 (1888) p. 149. Bettazzi bildete das Kontinuum so auf eine nirgends dichte perfekte Menge ab, daß er irgendeinen Punkt eines jeden zugehörigen punktfreien Intervalls den rationalen Zahlen entsprechen läßt. Eine sehr einfache Abbildung dieser Art erhält man auch auf die von mir angegebene Art, indem man das Kontinuum im dyadischen Zahlsystem eindeutig darstellt und die Zahlen dann in einem anderen Zahlsystem liest; vgl. Gött. Nachr. 1896, S. 25. Ich möchte bemerken, daß das dortige Zitat auf A. Sommerfeld sich nicht auf die eben genannte Idee bezieht. Läßt man in dem von Bettazzi angegebenen Beispiel die auf den Intervallen angenommenen Punkte weg, so entsteht eine lineare Teilmenge des Kontinuums, bei der jeder Punkt sowohl Grenzpunkt von links wie von rechts ist, und die nicht überalldicht ist. Auf solche Mengen weist auch H. W. Young hin, Proc. Lond. M. S. 34 (1900) p. 285, der dort auf ein Versehen von Brodén aufmerksam macht.

3) Dies ist nur die Übertragung der bekannten Begriffe, resp. der in ihnen enthaltenen Anordnungseigenschaften.

4) Hausdorff, Leipz. Ber. 59 (1907) S. 102. In diesem Fall liefert das Komplement des komplementären Typus wieder den ursprünglichen Typus.

IX. *Ist der Typus μ begrenzt und stetig, so ist auch die Potenz $\mu(\alpha)$ begrenzt und stetig.*

Wenn ein Ordnungstypus μ die eben definierte Stetigkeit besitzt, so ist jede Zweiteilung, die der Gleichung $\mu = \alpha + \beta$ entspricht, von der Art, daß sie *ein* und *nur ein* Element von μ definiert, nämlich das letzte Element von α oder das erste Element von β, je nachdem der zweite oder dritte Fall vorliegt. Es bedingt daher auch jedes Element von μ eine Teilung, wie sie der Gleichung (2) entspricht. Jedes Element gehört daher einer der drei in § 5 genannten Arten an, ist also $\Omega\Omega^*$-Element oder $\Omega\omega^*$-Element oder aber $\omega\Omega^*$-Element.[1] Wir wollen eine derartige durch ein Element hervorgebrachte Teilung als *Schnitt*[2] bezeichnen.

§ 10. *Die Größenstetigkeit und das Archimedische Axiom.* Weitere Ergebnisse über den Stetigkeitsbegriff liegen nur insoweit vor, als auch die *Größenbeziehungen* in Betracht gezogen werden. Sie hängen bekanntlich enge mit dem *Archimedischen Axiom*[3] zusammen. Veronese hat das Verdienst, daß er seine Beziehung zum Stetigkeitsbegriff zuerst erkannte und auf die Notwendigkeit hinwies, ihn auf solche geordneten Mengen auszudehnen, die auch Lücken, resp. Ω-Elemente enthalten können. Hierin besteht die wesentlichste Leistung, die mit seinen transfiniten Zahlen zusammenhängt.[4]

Das *Archimedische Axiom* sagt bekanntlich aus, daß, wenn a und b zwei reelle Zahlgrößen sind, so daß $a > b$ ist, eine ganze positive Zahl ν existiert, für die die Ungleichung $\nu b > a$ besteht. Wie Veronese zuerst bemerkte, liegt es als *axiomatischer* Bestandteil dem Dedekindschen Stetigkeitsbegriff zugrunde. Dieser Stetigkeitsbegriff kommt, wenn man zu den Größenbeziehungen übergeht, bekanntlich in folgender Tatsache zum Ausdruck.

---

1) Dies gilt naturgemäß nur unter Beschränkung auf die erste und zweite Mächtigkeit.

2) Diese Bezeichnung weicht von der üblichen etwas ab; diese geht davon aus, daß man das Linearkontinuum aus den rationalen Zahlen aufbaut und Zweiteilungen zunächst nur an ihnen vornimmt. Hier bilden aber von vornherein die *Gesamt*mengen und ihre Teilungen den Gegenstand der Untersuchung; deshalb habe ich dem Schnittbegriff die obige Bedeutung beigelegt.

3) Dieses Axiom wurde zuerst von O. Stolz ausführlich erörtert; vgl. Math. Ann. 22 (1883) S. 504.

4) Die erste Mitteilung von Veronese befindet sich in den Memorie Lincei (4) 6 (1890) p. 603. Eine ausführliche Literaturangabe enthält der Anhang seines Werkes: Fondamenti di geometria; deutsch von L. Schepp, Leipzig 1894.

X. *Bilden in der der Größe nach geordneten Menge M die Elemente*

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_\nu \cdots \quad \text{und} \quad b_1 < b_2 < \cdots < b_\nu < \cdots$$

je eine Folge abnehmender resp. zunehmender Elemente von der Art, daß die Differenzen $a_\nu - b_\nu$ *mit wachsendem* ν *kleiner werden als jede der Menge M angehörige Größe* δ, *so bestimmen sie stets ein und auch nur ein Element der Menge.*

Man kann nun die Frage stellen, ob auch umgekehrt die vorstehende Eigenschaft, wenn sie für ein geordnetes Größensystem erfüllt ist, notwendig die Dedekindsche Stetigkeit nach sich zieht, ob sie also sowohl Sprünge, wie Lücken in ihm ausschließt. *Diese Frage ist zu verneinen*; es gibt nichtarchimedische mit Lücken behaftete Größensysteme, die sie ebenfalls besitzen. In der Tat zeigte Veronese, daß erstens jedem Beweis, der ihre Bejahung zu erhärten versuchte, das Archimedische Axiom zugrunde liegt, daß zweitens, wenn man von diesem Axiom absehe, die obige Stetigkeitseigenschaft sehr wohl bestehen bleiben kann, und daß sie drittens insbesondere für das von ihm konstruierte Kontinuum erfüllt ist.

Das Archimedische Axiom ist also eine *Folge* des Ausschließens von Lücken (vgl. auch § 11). Umgekehrt können, falls der Inhalt der Definition X für die Stetigkeitseigenschaft zugrunde gelegt wird, Lücken nur dann auftreten, wenn das Größengebiet ein nichtarchimedisches ist.

Die Stetigkeit des Veroneseschen Kontinuums kommt daher in folgenden zwei Eigenschaften zum Ausdruck. Erstens ist es frei von Sprüngen[1]); und zweitens bestimmen zwei Folgen $\{a_\nu\}$ und $\{b_\nu\}$, wie die obigen, falls $a_\nu - b_\nu$ mit wachsendem ν kleiner wird, *als jede dem Kontinuum zugehörige Zahl*, ebenfalls eine Zahl des Kontinuums. Es kann also Lücken nur dann enthalten, wenn die Folgen $\{a_\nu\}$ und $\{b_\nu\}$ der ihnen soeben auferlegten Bedingung nicht genügen.[2]) Solche Lücken enthält es aber, wie oben (§ 8) gezeigt wurde, wirklich; in der Tat bleiben in dem dort erwähnten Beispiel die Differenzen $\omega/\nu - \nu$ für jedes ν unendlich groß.

1) Dies ist eine Folge der von Veronese geforderten Homogenität.

2) Die Angriffe, die W. Killing gegen Veroneses Konstruktion eines *stetigen* Linearkontinuums richtete, laufen sachlich darauf hinaus, daß man einen Ordnungstypus, der Lücken enthält, nicht als stetig bezeichnen kann, und zwar deshalb, weil in ihm keine Bewegung möglich sei. Vgl. Index Lectionum Münster 1895/96, Math. Ann. 48 (1896) p. 425, sowie Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paderborn Bd. 2 (1898), p. 66. Veroneses Antwort befindet sich Math. Ann. 47 (1896) p. 42. Vgl. hierzu auch G. Cantor, Math. Ann. 46 (1895) p. 31.

Historisch geht die vorstehende Auffassung des Stetigkeitsbegriffs bekanntlich auf Dedekind zurück, der in dieser Weise eine strengere Theorie der Irrationalzahl begründete. Man kann seinen Grundgedanken folgendermaßen verallgemeinern. Man kann verlangen, eine gegebene linear geordnete Größenmenge durch Adjunktion neuer Größen zu einer ebenfalls linear geordneten Menge so zu erweitern, daß die erweiterte Menge gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt. Insbesondere wird man sich zweckmäßig auf Mengen homogener Natur beschränken. Mit dieser Aufgabe hat sich besonders R. Bettazzi eingehend beschäftigt; er gelangt auf diese Weise zu den nämlichen Größensystemen, die wir oben erörterten, er hat auch die Beziehung der Gesamtmenge zu den Teilmengen näher beschrieben.[1]) Der Unterschied ist nur der, daß wir oben von vornherein die *Gesamtheiten* als gegeben voraussetzten, während sie bei dieser Methode aus *Teilmengen* durch geeignete *Erweiterung* hervorgehen. Auch auf diesem Wege kann man Systeme mit einfacher und mit allgemeiner (archimedischer und nichtarchimedischer) Stetigkeit erhalten.

D. Hilbert hat, um die Systeme verschiedener Stetigkeit voneinander zu trennen, das *Axiom der Vollständigkeit* eingeführt.[2]) Inhaltlich entspricht es dem Dedekindschen Schnittprinzip; denn es soll in Verbindung mit dem Axiom des Archimedes die gewöhnliche Stetigkeit begründen. Es besagt nämlich, daß dem von ihm konstruierten Kontinuum, das durch die Axiome der Verknüpfung, Anordnung und Kongruenz definiert ist, und das überdies dem archimedischen Axiom genügen soll, neue Elemente nicht hinzugefügt werden können. In Verallgemeinerung hiervon kann man fragen, ob ein System mit nichtarchimedischer Stetigkeit ebenfalls durch eine Art Vollständigkeitsaxiom festgelegt werden kann. Dies ist jedoch, wenigstens in dieser Form, zu verneinen. Denn wird vom archimedischen Axiom abgesehen, so wird man, welche transfiniten Einheiten auch bereits vorhanden sind, den allgemeinen Sätzen der wohlgeordneten Mengen entsprechend, immer noch höhere transfinite Einheiten zu ihnen hinzufügen können, ohne den allgemeinen Stetigkeitscharakter zu ändern, in Übereinstimmung damit, daß man wohlgeordnete Mengen immer höherer Mächtigkeit definieren kann (§ 2).[3])

1) Teoria delle' grandezze, Pisa 1890 (§ 37 ff.). Bettazzi bezeichnet durch Folge und Sprung, was ich (§ 9) Sprung und Lücke nannte; in den Fällen 2) und 3) spricht er von einer Bindung, statt der von mir gewählten Bezeichnung Schnitt. Von einem Schnitt spricht er dagegen im Fall 4) bei unstetigen Systemen, wie z. B. bei der Gesamtheit der rationalen Zahlen.

2) Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1903, S. 16.

3) Ich gehe hier davon aus, daß man wohlgeordnete Mengen höchster Mächtigkeit nicht in Betracht ziehen kann (Kap. I, § 7).

H. Hahn hat kürzlich noch gezeigt, daß jedes nichtarchimedische Größensystem, das Anordnung, Addition und Subtraktion besitzt, notwendig von der Art ist, wie die oben in § 8 angegebenen Systeme von Veronese und Levi-Civita. Es ist also stets einem System ähnlich, das in der obigen Weise mit Einheiten gebildet ist, die eine linear geordnete Menge bilden, während in jedes einzelne Element eine wohlgeordnete Teilmenge von Einheiten eingeht. Der Beweis beruht auf dem Satz, daß jede Menge einer Wohlordnung fähig ist.[1])

§ 11. *Veronesesche (nichtarchimedische) Zahlkörper.* Um zu einer vollen Erkenntnis der Bedeutung und Tragweite von Veroneses Schöpfung zu gelangen, hat man zu fragen, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind, damit ein Veronesesches Zahlengebiet einerseits Stetigkeit besitzt und sich andererseits gewissen Problemen der Analysis gewachsen zeigt. Dabei beschränke ich mich der Einfachheit halber auf die in § 8 angeführten einfacheren Zahlen der Form (1).

Eine präzise Antwort hierauf ist erst durch eine eingehende Untersuchung von O. Hölder ermöglicht worden. Sie hängt mit dem Gruppencharakter derjenigen Operationen zusammen, die in der Stetigkeitsdefinition X implizite enthalten sind. Hölders Resultate sind von zweierlei Art. Erstens stellte er diejenigen einfachen Rechnungsaxiome zusammen, die man voraussetzen muß, um ein Größensystem zu einem archimedischen zu machen, sobald das Auftreten von Lücken ausgeschlossen wird.[2]) Zweitens untersuchte er die Bedingungen, denen die Koeffizienten der Veroneseschen Zahlen genügen müssen. Der auf sie bezügliche Höldersche Satz lautet:

XI. *Soll ein Veronesesches Zahlengebiet, das mit zwei Einheiten* 1 *und* $\eta = 1/\omega$ *aufgebaut ist, dessen Zahlen also die Form* $a_0 + a_1\eta$ *haben, Veronesesche Stetigkeit besitzen, so müssen die Werte des zweiten Koeffizienten* a_1 *die Dedekindsche Stetigkeit besitzen, während die Werte des ersten in dieser Hinsicht belanglos sind.*

Soll nämlich eine Zweiteilung aller Zahlen in die Klassen

$$A' = \{a_0' + a_1'\eta\} \quad \text{und} \quad A'' = \{a_0'' + a_1''\eta\}$$

---

1) Wien. Ak. Ber. 116 (1907) S. 601. Hahn bemerkt, daß man auch diese Größensysteme durch ein verallgemeinertes Vollständigkeitsaxiom festlegen kann, indem man die Einheiten in gewisser Weise beschränkt, was ersichtlich ist.

2) Vgl. Leipz. Ber. 53 (1901) S. 1. Die bezüglichen Rechnungsgesetze sind folgende. 1. Das assoziative Gesetz der Addition; 2. die Forderung, daß wenn $a < b$ ist, stets eine Zahl x existiert, so daß $a + x = b$ oder $x + a = b$ ist.

Eine ausführliche Erörterung der in den Rechnungsregeln enthaltenen Gruppeneigenschaften und ihrer Beziehungen zu den Stetigkeitsfragen gibt K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie, Leipzig 1905, Abschnitt I, wenn auch nicht immer fehlerfrei.

einem Veroneseschen *Schnitt* (§ 9) entsprechen, also eine Zahl $b_0 + b_1\eta$ bestimmen, so muß erstens jede Differenz

$$a_0'' + a_1''\eta - (a_0' + a_1'\eta) > 0$$

sein, woraus $a_0'' \geq a_0'$ folgt, und andererseits muß jede derartige Differenz kleiner als δ gemacht werden können für jedes dem Zahlengebiet angehörige beliebige $\delta > 0$. Daraus folgt zunächst, daß nicht etwa für alle Zahlen von A' und A'' die Relation $a_0'' > a_0'$ bestehen kann. Es gibt also in A' und A'' Zahlen mit *gleichem* ersten Koeffizienten, und dieser ist, wie ebenso folgt, für die Zahlen von A' deren Minimum und für die Zahlen von A'' das Maximum; er sei b_0. Dann muß die Zahl $b_0 + b_1\eta$ auch für die Teilklassen

$$B' = \{b_0 + a_1'\eta\}, \quad \text{und} \quad B'' = \{b_0 + a_1''\eta\}$$

einen Schnitt liefern, und daraus folgt die Behauptung.

Der erste Koeffizient kann sogar nur eine endliche Zahl von Werten annehmen, ohne daß die Zahlen an sich gegen Veroneses Stetigkeitsdefinition verstoßen.

Das gleiche kann man ebenso für jedes Veronesesche Zahlengebiet beweisen, das eine endliche Zahl von Einheiten benutzt, und hieraus folgt nun sofort der weitere Satz[1]):

XII. *In demjenigen Zahlengebiet, das mit unendlich vielen abnehmenden Einheiten gebildet ist, in dem also die Einheiten den Typus ω haben, legt die Veronesesche Stetigkeit den Koeffizienten A_i und a_i überhaupt keine eigentlichen Beschränkungen auf.*

Analog ist es, wenn die Exponenten *irgend*eine wohlgeordnete Menge bilden. Hat sie ein letztes Element, so unterliegt dessen Koeffizient der Dedekindschen Stetigkeit, hat sie kein letztes Element, so unterliegt die Wertmenge von keinem Koeffizienten einer Bedingung.

Wird also nur die Veronesesche Stetigkeit gefordert, so bleibt für die Koeffizientenwerte noch ein sehr großer Spielraum. Dies gestattet, sie auf das mannigfachste so zu bestimmen, daß sie einen irgendwie definierten algebraischen Körper bilden. Man kann dabei zunächst auch noch von der Forderung der Stetigkeit absehen. Verlangt man z. B., daß sie einen Integritätsbereich bilden, sich also bei Addition, Subtraktion und Multiplikation invariant verhalten, so genügt es, den Koeffizienten alle ganzzahligen Werte beizulegen. Ein solcher Körper kann auch bereits mit den Zahlen (1a) von § 8 gebildet werden; er besitzt dann keine durchgehende Stetigkeit. Sollen die Zahlen einen

1) Vgl. meine Note in dies. Jahresb. 15 (1906) S. 19.

Rationalitätsbereich bilden, so müssen die Koeffizienten rationaler Werte fähig sein, und es müssen außer den Zahlen (1a) notwendig auch die Zahlen der Form (1) aufgenommen werden;[1]) läßt man für die Koeffizienten insbesondere *alle* rationalen Werte zu, so wird die bezügliche Zahlenmenge einen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ bilden. Dieser Körper $\mathfrak{R}$ hat dann zwei wichtige Eigenschaften. Erstens entspricht jedem Veroneseschen Schnitt eine seiner Zahlen, so daß er also Stetigkeit besitzt; zweitens stellt aber auch jede seiner Zahlen einen Veroneseschen Schnitt dar; der Körper $\mathfrak{R}$ ist also auch überalldicht. Seine Mächtigkeit ist $\mathfrak{c}$. Bemerkenswert ist noch, daß ersichtlich die Ausführbarkeit der Division einem *jeden* derartigen Veroneseschen Zahlkörper Stetigkeit beilegt, denn sie bewirkt immer, daß in ihm auch solche Zahlen vorhanden sind, deren Exponenten wohlgeordnete Mengen ohne letztes Element bilden.

Der so definierte stetige rationale Körper $\mathfrak{R}$ läßt projektive Beziehungen solcher ebenen und räumlichen Gebilde zu, deren Maßbestimmung ihn benutzt. Er deckt sich aber nicht mit demjenigen Körper einfachster Art, den Veronese selbst zu diesem Zweck konstruiert hat. Veronese legt nämlich ausdrücklich allen Koeffizienten A_i und a_i *sämtliche* reellen Zahlenwerte zu, unterwirft also jeden der Dedekindschen Stetigkeit. Dies ist aber entbehrlich; man würde auch irren, wenn man glaubte, daß das so konstruierte Kontinuum irgendwelche neuen Stetigkeitseigenschaften erhielte, die der Körper $\mathfrak{R}$ nicht besitzt. Beim gewöhnlichen Kontinuum bewirkt nämlich die Dedekindsche Stetigkeit, daß in ihm auch andere Operationen als rationale ausführbar sind. Dies trifft aber hier nicht mehr zu; vielmehr erfordert die Ausführbarkeit anderer als bloß rationaler Aufgaben die Einführung neuer Einheiten, je nach den algebraischen Prozessen, auf die die Aufgaben führen. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung der Doppelpunkte projektiver Punktreihen, die durch eine projektive Beziehung der Form

$$\omega x' x'' - 1 = 0$$

gegeben sind, so müssen die Doppelpunkte der Gleichung

$$\omega \xi^2 - 1 = 0$$

genügen. Ihr entspricht aber keine Zahl der Form (1). Es gibt nämlich Folgen entsprechender Zahlen

$$x_1' < x_2' < x_3' < \cdots \quad \text{und} \quad x_1'' > x_2'' > x_3'' > \cdots,$$

1) Dies beruht darauf, daß (§ 8) die Division ebenso definiert ist, wie für Potenzreihen.

die eine Lücke bilden,[1]) und in dieser Lücke müßte andererseits der Doppelpunkt liegen. Man hat daher die neue unendlichgroße Einheit $\sqrt{\omega}$ und ihre reziproke zu den bereits vorhandenen hinzuzufügen, um einen Körper zu haben, in dem die obige Gleichung lösbar ist; und dies gilt naturgemäß auch dann, wenn man den A_i und a_i *alle* reellen Werte beilegt.

Will man insbesondere einen Körper haben, in dem die Bestimmung der Doppelpunkte immer möglich ist, also auch alle quadratischen Irrationalitäten vorkommen, so muß man alle Potenzen von ω als Einheiten aufnehmen, deren Nenner eine Potenz von 2 ist; auch müssen die Koeffizienten A_i und a_i den bezüglichen algebraischen Bedingungen genügen. Ähnlich kann man auch höhere transfinite algebraische Körper bilden.

Die gleichen Sätze gelten für transfinite Körper, die mit höheren transfiniten Zahlen gebildet sind, bei denen also die Exponenten *irgendeine* wohlgeordnete Menge bilden. Ich schließe mit folgendem Satz:

XIII. *Das mit Veronesescher Stetigkeit behaftete Kontinuum gestattet die Einführung projektiver Definitionen und die Ausführung rationaler Operationen. Die Ausführbarkeit anderer als rationaler Operationen erfordert die Adjunktion neuer geeigneter transfiniter Einheiten.*

§ 12. *Die Unendlich und die sogenannte infinitäre Pantachie.*[2]) Das wichtigste und interessanteste Beispiel für Ordnungstypen höherer Mächtigkeit bilden die *Unendlich*; hängt doch ihre Theorie und damit auch das Studium des zugehörigen Ordnungstypus aufs engste mit wichtigen Eigenschaften der ganzen transzendenten Funktionen zusammen. Die Anwendung auf diese Funktionen liegt jedoch jenseits des Rahmens dieses Berichtes, und das gleiche gilt von den eingehenden Untersuchungen von E. Bortolotti über die Grenzwerte der Quotienten ins Unendliche wachsender Funktionen,[3]) sowie von den Erörterungen Borels über die Definition und die Natur der Unendlich.[4])

Von den einzelnen Resultaten über die Unendlich hat sich ein Satz, der im ersten Teil dieses Berichtes erwähnt worden ist, und der von

---

1) Z. B. die Zahlen $\frac{1}{\omega}, \frac{2}{\omega}, \frac{3}{\omega} \cdots$ und $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots$

2) Wie im ersten Teil des Berichts (S. 53), setze ich zunächst nur *monotone* Funktionen voraus.

3) Vgl. z. B. Ann. di mat. (3) 8 (1903) p. 245 und (3) 11 (1904) p. 29, sowie Rend. Palermo 18 (1904) S. 224.

4) Vgl. besonders Ann. Ec. Norm. (3) 16 (1899) S. 9, Bull. soc. math. 29 (1901) S. 130 und Leçons sur les séries à termes positifs, Paris 1902, S. 32.

P. du Bois stammt, als irrig herausgestellt. Er beruht auf der Annahme, daß die zu $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ inversen Funktionen $\chi(x)$ und $\chi_1(x)$ in inverser infinitärer Beziehung stehen, wie $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$, und folgert daraus, daß die inversen Funktionen $\chi_\nu(x)$ eine Reihe vom Typus ω^* bilden, wenn die $\varphi_\nu(x)$ eine Reihe vom Typus ω bilden. Die Unrichtigkeit dieses Satzes läßt sich durch folgendes Beispiel beweisen, dessen Kenntnis ich F. Hausdorff verdanke.

Sei $f(x)$ irgendeine monoton wachsende Funktion, so daß $f(x+1):f(x)$ mit x unendlich wird,[1]) so setze man

$$\varphi_1(x) = f(x),\ \varphi_2(x) = f(x+1),\ \cdots\ \varphi_\nu(x) = f(x+\nu-1),\ \cdots$$

so hat man

$$\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \cdots \prec \varphi_2 \cdots$$

während offenbar, wenn $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_\nu, \cdots$ die inversen Funktionen sind,

$$\chi_1 \sim \chi_2 \sim \cdots \sim \chi_\nu \sim \cdots$$

ist.

Das Hauptproblem über die Unendlich, das einer eingehenderen Erörterung zu unterziehen wäre, ist du Bois' Begriff der *infinitären Pantachie.* Aber leider läßt sich selbst bei der Beschränkung auf *monotone stetige* Funktionen noch immer nichts Abschließendes berichten. Eine erste Schwierigkeit liegt darin, daß der Begriff des Unendlich, wie bereits im ersten Teil erwähnt wurde, einen gewissen subjektiven Charakter an sich hat. Aber selbst wenn man davon absieht, so erhebt sich eine neue Schwierigkeit in dem Umstand, daß nicht alle monotonen Funktionen die Eigenschaft haben, daß ihre Unendlich miteinander vergleichbar und daher einer linearen Ordnung fähig sind[2]). Dies gilt für alle Definitionen der Unendlich, die man bisher aufgestellt hat. Man kann daher von *der* infinitären Pantachie zur Zeit überhaupt nicht sprechen. Überdies sind uns auch die allgemeinen Bedingungen, unter denen eine Funktionsmenge die Eigen-

---

1) Man setze z. B. (vgl. Leipz. Ber. 59 (1907) S. 115)

$$\varphi_1(x) = e^{x^2},\ \cdots\ \varphi_\nu(x) = e^{(x+\nu-1)^2},\ \ldots$$

2) Ein einfaches Beispiel hat Borel folgendermaßen konstruiert. Man entwickle e^x und e^{e^x} in eine Reihe und nehme ν_1 Glieder der ersten, dann ν_2 der zweiten, dann wieder ν_3 Glieder von e^x usw., so wird es immer, welches auch der Wert von x ist, eine gewisse Gruppe von Gliedern von $f(x)$ geben, die sie approximativ darstellen; und der zugehörige Wert von $f(x)$ wird für dieses x bald mit e^x, bald mit e^{e^x} infinitär vergleichbar sein. Vgl. Leçons sur les séries à termes positifs, Paris 1902, p. 32. Beispiele anderer Art gibt Hardy, Proc. Lond. M. S. (2) 3 (1905) S. 441.

schaft besitzt, daß ihre Unendlich vergleichbar sind, noch unbekannt; man konnte daher präzise Untersuchungen bisher nur so führen, daß man von gewissen Spezialklassen ausgeht, für die eine lineare Anordnung möglich ist.

§ 13. *Die Hausdorffschen Pantachietypen*[1]). Hausdorff hat die Pantachiebetrachtungen auf eine wesentlich allgemeinere Basis gestellt. Er hat erstens die Beschränkung auf monotone Funktionen fallen lassen, zweitens knüpft er nicht an die Unendlich direkt an, sondern an Zahlfolgen der Form

$$A = a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_\nu,\ \cdots = \{a_\nu\},$$

wo im allgemeinsten Fall jedes a_ν einen beliebigen reellen Wert haben kann; er beschränkt sich jedoch im allgemeinen auf positive a_ν. Diese Zahlfolgen lassen sich in der in Kap. I, § 6 genannten Weise mit beliebigen Funktionen, insbesondere auch mit stetigen Funktionen $f(x)$ so verbinden, daß man

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \cdots\ f(\nu) = a_\nu\ \cdots$$

setzt; man kann sie übrigens auch als transfinite Veronesesche Zahlen mit einer festen Reihe von Einheiten deuten, z. B. als Zahlen, wie sie durch § 8, 1 definiert sind, wenn man alle $A_\iota = 0$ setzt. Ihre Mächtigkeit ist, wie schon in § 8 bemerkt wurde, gleich $\mathfrak{c}$.

Für zwei Zahlfolgen

$$A = \{a_\nu\} \text{ und } B = \{b_\nu\}$$

soll nun die *finale Vergleichbarkeit* immer und nur dann vorhanden sein, wenn für ein gewisses N und *jedes* $\nu > N$ die Differenz $a_\nu - b_\nu$ *ein festes Zeichen hat*, und zwar wird

$$A \succ B,\ A \sim B,\ A \prec B$$

gesetzt, je nachdem $a_\nu > b_\nu$, $a_\nu = b_\nu$, oder $a_\nu < b_\nu$ ist.[2]) Dabei wird die Forderung, daß die a_ν wachsende Zahlen sein sollen, nicht gestellt, und daher, wenn man von den Zahlfolgen zu den Funktionen zurückkehrt, eine größere Klasse von Funktionen, als die der monotonen, in Betracht gezogen. Übrigens ist der Übergang von dem Größenverhältnis der Zahlfolgen zu dem der Unendlich der Funktionen ziemlich einfach.[3])

1) Leipz. Ber. 59 (1907) p. 105.

2) Sie ist immer nur für gewisse Teilmengen der Menge $\mathfrak{A} = \{A\}$ erfüllt.

3) Einfachste stetige Funktionen, die man zur Folge $A = \{a_\nu\}$ konstruieren kann, sind Streckenzüge, d. h. also streckenweise lineare Funktionen.

Wird eine Menge von Funktionen, die paarweise final vergleichbar sind, von denen aber keine zwei einander final gleich sind, als *Bereich* bezeichnet, so wird ein solcher Bereich dann als *Pantachie* definiert, *wenn er in keinem umfassenderen Bereich enthalten ist.* Von ihm gelten auch bei der hier zugrunde gelegten Definition alle die Sätze, die du Bois für die Unendlich bewiesen hat; man kann sie kurz folgendermaßen aussprechen:

XIV. *Jede Pantachie ist überalldicht und unbegrenzt, sie ist weder mit ω confinal, noch mit ω^* coinitial, sie enthält keine ω- oder ω^*-Elemente und keine $\omega\omega^*$-Lücken. Das gleiche gilt auch von jeder Pantachiestrecke.*

Ich will mit Hausdorff *jeden* Ordnungstypus, der die eben genannten Eigenschaften enthält, als H-Typus bezeichnen. Von ihm beweist er noch folgende Sätze:

1) Jeder H-Typus enthält jeden Typus erster oder zweiter Mächtigkeit als Teilmenge.[1]) 2) Gibt es einen H-Typus zweiter Mächtigkeit, so gibt es nur einen. 3) Jeder H-Typus ist mindestens von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und enthält stets einen gewissen homogenen H-Typus als Teilmenge.[2])

Da nun *alle* Elemente $\{A\}$, wie wir oben sahen, die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, so folgt schließlich:

XV. *Alle Pantachietypen sind von der Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$.

Falls das Kontinuum von der zweiten Mächtigkeit ist, sind sie sogar alle *ähnlich*, *homogen* und *vom Typus H.*

Auf die Elemente der Pantachien kann man die Rechnungsgesetze übertragen; dies läßt sich in einfachster Weise so ausführen, daß man

$$A \pm B = \{a_\nu \pm b_\nu\}, \quad AB = \{a_\nu b_\nu\}, \quad A : B = \{a_\nu : b_\nu\}$$

setzt. Diese Definitionen genügen den Rechnungsgesetzen. Sie gestatten andererseits die Ausführung einfacher Transformationen, wie z. B. der projektiven, und erlauben so, die Eigenschaften der Pantachie auf gewisse Strecken (Intervalle) zu übertragen. Sie führen auch zu Sätzen, die eine Spaltung einer Pantachie in mehrere sowie eine Kombination mehrerer Pantachien zu einer einzigen betreffen.

---

1) Gemäß einer Mitteilung von Hausdorff enthält jeder überalldichte Typus ohne $\omega\omega^*$-Lücken und $\omega\omega^*$-Elemente jeden Typus zweiter Mächtigkeit als Teilmenge.

2) Dieser Typus ist eine Potenz zweiter Klasse mit dem Argument Ω und der Basis 3, dessen Hauptelement das mittlere Element dieser Basis ist, also in Hausdorffscher Bezeichnung ein Typus $3'_{m}(\Omega)$. Ein H-Typus ohne $\Omega\Omega^*$-Lücken ist mindestens von der Mächtigkeit $2^{\aleph_1}$.

Den *Existenzbeweis* einer *homogenen* Pantachie führt Hausdorff so, daß er sich zunächst auf Grund obiger Rechnungsregeln einen einfach definierten Bereich vergleichbarer Zahlfolgen bildet. Bilden sie noch keine Pantachie, so gibt es Zahlfolgen, die mit ihnen vergleichbar sind, ohne dem Bereich anzugehören, und man kann den Bereich erweitern. Dies müsse aber einmal aufhören, was Hausdorff darauf stützt, daß die Pantachie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat, und daß, wenn Erweiterungen bis zu *jeder* Mächtigkeit auftreten, *ohne* daß sich eine Pantachie ergibt, das Kontinuum $\mathfrak{c}$ größer als jedes Aleph sein müßte.[1]) Jede Mittelstrecke der so definierten Pantachien ist dann insbesondere einer *homogenen* Pantachie ähnlich.

Eine letzte Frage, die Hausdorff erörtert, ist folgende. Die du Bois schen Sätze sagen bekanntlich aus, daß jede Reihe wachsender Zahlfolgen vom Typus ω

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_\nu < \cdots$$

durch eine gewisse Zahlfolge B final übertroffen werden kann. Andererseits ist die Mächtigkeit aller dieser Folgen gleich $\mathfrak{c}$, und man kann insbesondere eine Reihe wachsender Folgen

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_\omega \cdots < A_\alpha$$

konstruieren, die den Typus Ω besitzt. Man wird daher fragen, ob man diese Reihe auch so wählen kann, daß jede beliebig angenommene Folge B von gewissen ihrer Elemente schließlich übertroffen wird. Borel hat die Bejahung dieser Frage als Axiom postuliert.[2]) Sie ist gewiß zu bejahen, wenn $\mathfrak{c} = \aleph_1$ ist. Ein Beweis ist jedoch bisher nicht vorhanden; auch Hausdorff beschränkt sich auf eine Reihe aufklärender Bemerkungen.

Abschließende Ergebnisse sind also nicht vorhanden. Auch bemerke ich, daß Hausdorff sich auf den Satz stützt, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.

§ 14. *Die sogenannte Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz.* Von den analytischen Problemen, die mit der infinitären Pantachie zusammenhängen, muß ich wenigstens die Frage nach der Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz kurz erwähnen. Das uns von du Bois historisch überkommene Problem knüpft an monoton wachsende

1) Vgl. die analogen Bemerkungen über die Stetigkeit nichtarchimedischer Systeme und das Vollständigkeitsaxiom, sowie Kap. I § 8.

2) Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, S. 117. Dort ist freilich von einem engeren Funktionsbereich die Rede.

Funktionen $f(x)$ an und zerlegt die Gesamtheit dieser Funktionen so in zwei Teilmengen $\{\varphi\}$ und $\{\psi\}$, daß von den beiden Integralen

$$\int_0^\infty \varphi(x)dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \psi(x)dx$$

das erste für jedes φ konvergiert und das zweite für jedes ψ divergiert:[1]) denn es ist klar, daß für jede Funktion $f(x)$ der eine der beiden Fälle notwendig eintreten muß. Du Bois behauptet nun, daß es eine „ideale" Funktion $\tau(x)$ gibt, die die *Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz* bezeichnet und so beschaffen sei, daß das Integral für $\tau(x)$ noch konvergiert, aber für jedes $\psi(x) > \tau(x)$ divergirt[2]). Er hat die Existenz der Funktion $\tau(x)$ wohl deswegen behauptet, weil er die sämtlichen Unendlich als einen *stetigen* Ordnungstypus ansah.[3]) Pringsheim[4]) hat die Meinung von du Bois mehrfach bestritten, während sich Borel ihr wieder angeschlossen hat.[5])

Die vorstehende Definition der Funktionen φ und ψ ist damit gleichwertig, daß von den beiden Summen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi(\nu)=\sum c_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(\nu)=\sum d_\nu$$

die erste konvergiert und die zweite divergiert.[6])

Das obige Problem kann daher auch an Reihen monoton gegen Null abnehmender positiver Glieder angeschlossen werden. Ich werde wie oben (§ 13) zwei konvergente Reihen

$$C=\sum c_\nu \quad \text{und} \quad C'=\sum c'_\nu$$

wieder als final vergleichbar bezeichnen, wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ es sind, und die Funktionsbeziehung und deren Rangordnung

---

1) Man kann statt dessen auch die Integrale $\int_0^\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha}d\alpha$ betrachten.

2) Es wird also nicht etwa behauptet, daß $\tau(x)$ in die Lücke zwischen Konvergenz und Divergenz fällt.

3) Vgl. Münch. Abh. 12 (1876) S. XV und Math. Ann. 11 (1877) S. 158 f. Naturgemäß ist hier nur von Dedekindscher Stetigkeit die Rede. Er sagt daher auch, die Funktion $\tau(\alpha)$ entspreche einem irrationalen Unendlich.

4) Münch. Ber. 26 (1896) S. 609 und 27 (1897) S. 203.

5) Vgl. z. B. Leçons sur les séries à termes positifs, Paris 1902, S. 48.

6) Der Satz stammt von Cauchy. Vgl. auch Picard, Traité d'analyse 1891, Bd. I, S. 27, und Pringsheim, Math. Papers of the Intern. Math. Congr. Chicago, 1896, S. 327.

auf die Reihen übertragen und ebenso für die divergenten Reihen verfahren. Dann bestehen folgende Sätze: 1) Zu jeder konvergenten Reihe $C = \sum c_\nu$ gibt es eine konvergente Reihe $C' = \sum c'_\nu$, so daß $C < C'$ ist. 2) Bilden die konvergenten Reihen

$$\{C^{(\mu)}\} = C < C' < C'' < \cdots < C^{(\mu)} < \cdots$$

eine Folge vom Typus ω, so gibt es auch eine konvergente Reihe $\Gamma = \sum \gamma_\nu$, die mit allen final vergleichbar ist und auf alle folgt. Analoge Sätze gelten für divergente Reihen.[1]) Man kann daher sowohl konvergente wie divergente Reihen, die untereinander final vergleichbar sind, durch den Schritt von ν auf $\nu + 1$ und von $\{\nu\}$ auf ω unbegrenzt erzeugen, und sich bereits aus *einer* konvergenten oder divergenten Reihe eine Menge vom Typus Ω oder Ω^* herstellen. Andererseits folgt daraus unmittelbar, daß es weder eine letzte konvergente, noch eine erste divergente Reihe geben kann, und daß damit die Existenz der du Boisschen Funktion $\tau(x)$ eine Illusion ist.

Man kann aber das von du Bois aufgeworfene Problem so modifizieren, daß man nur eine solche Menge von konvergenten und divergenten Reihen ins Auge faßt, die sämtlich miteinander final vergleichbar sind. Wird dann ihr Ordnungstypus in die Form

$$(1) \qquad \mu = \alpha + \beta = \mathfrak{P}_c + \mathfrak{P}_d$$

gebracht, sodaß $\mathfrak{P}_c$ alle konvergenten und $\mathfrak{P}_d$ alle divergenten Reihen enthält, so kann man auch jetzt die Frage stellen, ob etwa $\mathfrak{P}_c$ ein letztes oder $\mathfrak{P}_d$ ein erstes Element enthalten kann oder ob der Teilung notwendig eine Lücke entspricht. Auch hier kann man zunächst schließen, daß, wenn $\mathfrak{P}_c$ ein letztes Element $\Gamma = \sum \gamma_\nu$ enthält, es ein Element $A = \sum \alpha_\nu$ gibt, so daß $A > \Gamma$ ist. Es könnte aber möglich sein, daß es für *jede* so konstruierte Reihe $A = \sum \alpha_\nu$ immer wieder Elemente von $\mathfrak{P}_d$ gibt, mit denen sie nicht vergleichbar ist, so daß es unmöglich ist, das Element A in den Ordnungstypus μ einzufügen. Das Analoge kann für den Fall eintreten, daß $\mathfrak{P}_d$ ein erstes Element $\Delta = \sum \delta_\nu$ enthält. Diese Möglichkeit ist erst recht vorhanden, wenn die angenommene Menge bereits eine Pantachie (§ 13) darstellt.

Eine volle Antwort auf diese Fragen ist noch nicht erfolgt. Hausdorff hat aber bereits bewiesen, daß für die von ihm betrachteten *Pantachien*, bei denen also die Monotonie der in sie eingehenden

---

1) Die Sätze stammen von du Bois. Vgl. Pringsheim, Math. Ann. 35 (1890) S. 319 ff.).

Zahlfolgen aufgegeben ist, *jeder der oben als möglich hingestellten Fälle wirklich eintreten kann.* Es kann also $\mathfrak{P}_c$ ein letztes oder $\mathfrak{P}_d$ ein erstes Element besitzen, und es kann, falls keine dieser beiden Möglichkeiten vorliegt, der unter (1) stehenden Teilung auch jede in einer Pantachie überhaupt mögliche Lückenform entsprechen. Es kann sogar auch $\mathfrak{P}_c = 0$ sein, während das gleiche für $\mathfrak{P}_d$ ausgeschlossen ist.[1])

[Eine während der Drucklegung erscheinende Arbeit von K. Th. Vahlen beschäftigt sich mit der Ausdehnung des *Fundamentalsatzes der Algebra* auf nichtarchimedische Größensysteme.[2]) Ich muß mich darauf beschränken, das in ihr behandelte Problem zu nennen.

Die betrachteten Größensysteme sind nämlich solche, bei denen sowohl die Exponenten als auch die Koeffizienten alle reellen Zahlenwerte annehmen können, während jede einzelne Zahl den Typus ω hat (§ 8). Es ist mir nicht mehr möglich, auf den Beweis einzugehen.]

---

1) a. a. O. S. 150. Nach einer brieflichen Mitteilung treten alle diese Möglichkeiten sicher auch für monotone Zahlfolgen auf, falls das Kontinuum die zweite Mächtigkeit hat.

2) Dies. Jahresber. 16 (1907) S. 409.

Kapitel III.

Allgemeine Theorie der Punktmengen.

Die allgemeine Theorie der Punktmengen im R_n hat erheblichere Fortschritte nur in methodischer Hinsicht gemacht. Ihren Beweisen konnte vielfach eine wesentlich einfachere Form gegeben werden. Man ging von der methodisch berechtigten Forderung aus, daß Sätze, in deren Inhalt die Zahl Ω nicht eingeht, ohne Benutzung von Ω abzuleiten seien, ebenso Sätze, in die die transfiniten Zahlen überhaupt nicht eingehen, ohne sie und unter Beschränkung auf das Endliche. Dem entspricht der Beweis, der kürzlich von E. Lindelöf für das Haupttheorem gegeben wurde (§ 1), ebenso derjenige, den ich selbst kürzlich für das Heine-Borelsche Theorem mitteilte (§ 2). Dagegen scheint es mir logisch unmöglich zu sein, solche Eigenschaften, die begrifflich auf den transfiniten Zahlen beruhen und durch sie erst einen Inhalt erhalten, ohne ihre Hilfe beweisen zu wollen [1]).

H. W. Young hat sich eingehend mit denjenigen Mengen beschäftigt, die ich in Bericht I S. 109 als Borelsche Mengen bezeichnete, und über sie einzelne neue Sätze ausgesprochen [2]) (§ 3).

---

1) Vgl. Anmerkung 2 auf S. 76.

2) H. W. Young hat sich auch sonst vielfach mit der Theorie der Punktmengen beschäftigt. Er bedient sich vielfach neuer, oft auch komplizierter Bezeichnungen, von deren Angabe ich teilweise abgesehen habe. Neue Resultate sind in seinen Arbeiten nur wenige enthalten; soweit solche vorliegen, habe ich sie erwähnt. Meistens handelt es sich um die bekannten Sätze unter Benutzung neuer Bezeichnungen. Außerdem findet man bei ihm eine Reihe instruktiver Beispiele und anschaulicher Figuren. Vgl. besonders Quart. Journ. 35 (1904) S. 189, 36 (1905) S. 280 u. Proc. Lond. M. S. 35 (1903) S. 245, 269, 283, 384 u. (2) 3 (1905) S. 379. Kürzlich hat er seine Arbeiten in dem Buch: Theory of sets of points, Cambridge 1906, das er zusammen mit Grace Chisholm Young herausgab, zusammengestellt. Eine ausführlichere Besprechung dieses Buches gebe ich demnächst im Archiv f. Math. [Eine solche ist soeben im Bull. des Sc. math. (2) 31 (1907) S. 129 von H. Lebesgue erschienen. Nachträglicher Zusatz.]

Der Hauptfortschritt, den die Theorie der Punktmengen gemacht hat, besteht in ihrer Ausdehnung auf den R_∞. M. Fréchet, dem wir das eingehende Studium dieser Dinge verdanken, hat sich dabei wesentlich von der Frage leiten lassen, welche Eigenschaften man dem R_∞ beilegen muß, damit in ihm die Sätze der allgemeinen Theorie der Punktmengen des R_n in Geltung bleiben. Hier spielen wesentlich drei Dinge eine Rolle: die Definition des Grenzelements, das Bolzano-Weierstraßische Theorem und der Satz, daß die Ableitung eine abgeschlossene Menge ist. Sie sind sämtlich auf den R_∞ ausdehnbar. Mit ihnen bleiben alle Sätze der Cantorschen Theorie in Geltung, besonders also auch das Haupttheorem.

Die allgemeine Bedeutung der Fréchetschen Untersuchungen liegt besonders darin, daß sie ihn nötigten, die Grundlagen der einzelnen Sätze, sowie ihr gegenseitiges Verhältnis in Betracht zu ziehen. Auf diese Weise ergab sich die Kenntnis derjenigen besonderen Voraussetzungen, unter denen die Sätze der Punktmengentheorie eine Ausdehnung auf andere unendliche Mengen gestatten, insbesondere auf den Funktionalraum. Hierauf komme ich im siebenten Kapitel näher zurück.

Einen wesentlichen Fortschritt hat auch der Begriff des *Inhalts* einer Punktmenge gemacht. Seine konsequente Ausgestaltung verdanken wir H. Lebesgue. Sein Verdienst besteht besonders darin, daß er den bereits durch Borel gepflanzten Keim weiter zu entfalten und an ihn eine konsequente und in ihren Folgen erstaunlich weittragende allgemeine Theorie anzuschließen verstand. Er geht von der ebenso einfachen, wie zweckmäßigen Forderung aus, daß eine Menge und ihre Komplementärmenge *zugleich meßbar* oder *nicht meßbar* sein sollen. Der hierdurch festgelegte Inhaltsbegriff besitzt dann die Eigenschaft, daß die Summe der Inhalte gleich dem Inhalt der Summe ist, also diejenige, die für den elementaren Begriff die fundamentalste ist. Durch diesen Inhaltsbegriff werden alle abzählbaren und alle abgeschlossenen Mengen meßbar, überdies aber auch alle, die sich aus abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen zusammensetzen. Die Meßbarkeit wird damit eine Eigenschaft beinahe aller Punktmengen, die bisher in der Analysis aufgetreten sind.

§ 1. *Neue Beweise des Haupttheorems.* Das Haupttheorem aus der Theorie der Punktmengen lautet:

I. *Jede abgeschlossene Menge Q läßt sich in die Form*

$$Q = R + S = \sum_{\beta}(Q^{\beta+1} - Q^{\beta}) + S, \quad 0 \leq \beta < \alpha$$

setzen, wo R abzählbar und S gleich Null oder perfekt ist.

Dies Theorem ist früher nur mit Benutzung der ersten transfiniten Ordnungszahl zweiter Mächtigkeit Ω bewiesen worden. Nun ergibt sich aber die Menge R durch allmähliche Abspaltung derjenigen Punkte von Q, die nicht dem perfekten Bestandteil S angehören, und der Satz kann daher auch dahin interpretiert werden, daß diese Abspaltung stets nach einer höchstens *abzählbaren* Menge von Schritten ein Ende erreicht. Die Zahl Ω wird also durch den Satz gerade *außer* Beziehung zu dem Abspaltungsprozeß gesetzt; man wird daher gern dem Beweis eine Form geben, in die Ω nicht als Hilfsmittel eingeht. Derartige Beweise sind inzwischen mehrfach gegeben worden. Ich selbst habe dies so ausgeführt, daß ich der Analyse der Menge Q einen Prozeß zugrunde legte, bei dem aus seiner Definition unmittelbar erhellt, daß er nach einer abzählbaren Menge von Schritten zu Ende führt.[1])

Für das lineare Gebiet hat G. Hardy[2]) einen Beweis gegeben, der auf einem sehr einfachen Grundgedanken beruht. Stellt man nämlich alle Zahlen des Linearkontinuums $0 \leq x \leq 1$ durch dyadische Brüche dar, so kann man sie, welches auch die Zahl ν sei, in 2^ν Klassen teilen, gemäß den 2^ν Ziffernkombinationen, die von den ν ersten Ziffern gebildet werden. Ist nun M *irgendeine* Teilmenge des Kontinuums, so kann man auch für sie diese 2^ν Teilmengen $M^{(\lambda)}$ unterscheiden, und jeder dieser Teilmengen kommt eine gewisse Mächtigkeit zu. Es besteht nun folgender leicht beweisbare Satz: Falls für *jedes* ν bekannt ist, daß unter den 2^ν Teilmengen $M^{(\lambda)}$ von M mindestens $2^\nu - 1$ abzählbar sind, so ist M selbst abzählbar. Ist also M nicht abzählbar, so gibt es notwendig eine erste Zahl ν, so daß es unter den zugehörigen Mengen $M^{(\lambda)}$ mindestens zwei gibt, die nicht abzählbar sind; der bezügliche Wert von ν sei ν_1, und M_1 und M_2 seien die entsprechenden Teilmengen von M. In jeder Menge M_i betrachte man nun die Ziffern, die auf die ersten ν_1 Ziffern folgen, so gibt es wieder je zwei analog bestimmte Zahlen ν_{11}, ν_{12}, so daß die vier zugehörigen Mengen M_{ik} ebenfalls nicht abzählbar sind, und so kann man weiterschließen.

Ist nun

$$z = 0,(\nu_1)(\nu_{1k})(\nu_{1kl})\dots$$

irgendeine Zahl, deren erste ν_1 Ziffern mit denen einer Menge M_i übereinstimmen, deren folgende ν_{1k} Ziffern mit den entsprechenden einer Menge M_{ik} usw., so ist diese Zahl notwendig in M enthalten. Denn

1) Gött. Nachr. 1903, S. 21. Vgl. auch H. W. Young, Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1904) S. 230. Ein anderer Beweis dieser Art ist in dem allgemeinen Theorem von Kap. IV § 10 enthalten.

2) Mess. of Math. 33 (1903) p. 67.

sie ist einerseits Grenzelement von M, und andererseits ist M abgeschlossen. Die Gesamtheit der Zahlen $\{z\}$ hat aber offenbar die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Daher enthält M eine Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, womit der Satz bewiesen ist.

Eine noch einfachere Methode besteht darin, daß man den Satz sozusagen wie ein Existenztheorem ansieht und zunächst nur die Abzählbarkeit von R beweist. Eine solche Beweismethode ist zunächst von H. W. Young[1]) für lineare Mengen versucht worden; später hat sie E. Lindelöf[2]) für den R_n in exakter Form durchgeführt. Sie stützt sich auf eine allgemeine Einteilung der Punktmengen, die auf Cantor zurückgeht. Cantor hat nämlich in seinen letzten allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der Punktmengen ihre Zerlegung in gewisse homogene Bestandteile steigender Mächtigkeit vorgenommen. Diese Zerlegung erscheint hier in ihrer einfachsten Form; bei den Beweisen von Young und Lindelöf kommt nur der Gegensatz von abzählbar und nicht abzählbar in Frage.

Cantor legt um einen Punkt p des R_n eine Kugel und betrachtet die in ihr enthaltene Teilmenge; diese wird eine gewisse Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ haben. Wenn sich nun diese Kugeln auf p zusammenziehen, so kann $\mathfrak{m}$ nicht zunehmen und hat daher — falls die Mächtigkeiten eine wohlgeordnete Menge bilden — einen bestimmten Grenzwert μ. Wird jetzt nur der Gegensatz zwischen abzählbar und nicht abzählbar ins Auge gefaßt, so ist ein Punkt p von *nicht* abzählbarer Ordnung, wenn *jede* ihn umgebende Kugel eine nicht abzählbare Teilmenge der gegebenen Punktmenge enthält.[3]) Im andern Fall ist er von abzählbarer Ordnung; es gibt dann auch immer eine ihn umgebende Kugel von *endlichem* Radius, in der eine abzählbare Teilmenge von Punkten liegt.[4])

Sei nun P zunächst *irgendeine* nicht abzählbare Menge, so ergibt sich bereits eine Zerfällung von P in zwei Teile

$$P = R + C,$$

wo R die Punkte abzählbarer und C die Punkte nicht abzählbarer Ordnung enthält, und man kann zunächst zeigen, daß R abzählbar ist.[5])

---

1) Quart. Journ. 35 (1904) p. 104. Der dort gegebene Beweis enthält allerdings eine Lücke und ist daher nicht exakt; vgl. meine S. 72 Anm. 2 genannte Rezension.

2) C. R. 137 (1903) 697 und Acta math. 29 (1905) S. 183.

3) Lindelöf bezeichnet diese Punkte als Verdichtungspunkte (points de condensation), und das Gleiche tut M. Fréchet in seinen Untersuchungen über Kurvenmengen, Thèse Paris und Rend. Palermo 22 (1906) S. 6. Ich kann mich diesem Sprachgebrauch nicht anschließen.

4) Isolierte Punkte p brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

5) H. W. Young bezeichnet C als nucleus; a. a. O. S. 105.

Dies folgt am einfachsten aus der Folgerung, die Lindelöf aus seiner Verallgemeinerung des Borelschen Satzes auf beliebige Mengen gezogen hat (vgl. § 2). Damit ist auch die Existenz der Menge C erwiesen. Falls nun die Menge P abgeschlossen ist, so kann der weitere Beweis, daß C abgeschlossen ist und keinen isolierten Punkt enthält, in folgender Weise geführt werden. Jede um einen Punkt c von C gelegte Kugel enthält eine nicht abzählbare Punktmenge, also da R abzählbar ist, auch Punkte von C.

Lindelöf benutzt bei seinem Beweis Cantors Zahlen der zweiten Klasse überhaupt nicht und legt hierauf besonderen Nachdruck.[1]) In der Tat dürfte der Beweis sich kaum noch vereinfachen lassen, insoweit man den Satz, wie oben erwähnt, als Existenztheorem ansieht. Aber die im Cantorschen Verfahren enthaltene Analyse verschafft uns zugleich einen Einblick in die geometrische Struktur der Punktmengen und sichert erst dadurch die Vollständigkeit unseres geometrischen Wissens. Die Analyse dieser Struktur ist aber ohne die Hilfe der transfiniten Zahlen unmöglich. Würde man zunächst nur das Lindelöfsche Existenztheorem besessen haben, so würde meines Erachtens die Cantorsche Analyse der Struktur, die in ihr enthaltene sukzessive Abspaltung der Teilmengen, die Erkenntnis, daß sie über ω hinausführen kann, und die Tatsache, daß sie bei einer gewissen transfiniten Zahl der zweiten Klasse ihr Ende erreicht, einen Fortschritt bedeuten.[2])

§ 2. *Das Heine-Borelsche Theorem.* Eine reichliche Literatur hat sich auch an dasjenige Theorem geknüpft, das ich in meinem Bericht als Heine-Borelsches Theorem bezeichnete. Der Borelsche Satz bezieht

---

1) Ich kann hierin nur die Wirkung davon sehen, daß man den Paradoxien, besonders den künstlich aufgestellten, eine ihnen nicht zukommende Bedeutung beilegt; vgl. S. 39. Andererseits sind die transfiniten Zahlen kein subjektives Produkt des menschlichen Intellekts, sondern vielmehr Bilder objektiver geometrischer Tatsachen. Diese haben Cantor zu ihrer Definition geführt, und falls wir sie nicht besäßen, würden die Bedürfnisse der Geometrie und Analysis immer wieder zu ihrer Einführung drängen.

2) H. W. Young benutzt bei seinen Beweisen, die sachlich darauf hinauslaufen, eine wirkliche sukzessive Analyse der Punktmengen vorzunehmen, nicht ausdrücklich aber doch stillschweigend die Cantorschen Zahlen der zweiten Klasse. Denn nur so kann man seinen Worten, daß die Konstruktion gewisser Intervalle $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ — die sich, wie ich hinzufüge, beliebig ins Transfinite fortsetzen kann — schließlich ein Ende finden müsse, einen Sinn beilegen. Er setzt damit zugleich die Zulässigkeit des Schlusses von $\{\nu\}$ auf ω ohne jede Begründung voraus, während wir der Mengenlehre gerade die Erkenntnis verdanken, daß jeder solche Schluß des Beweises bedarf. Vgl. Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1903) S. 240 und Quart. Journ. 35 (1904) S. 106.

sich auf gewisse Bereiche, die die Punkte einer Punktmenge umgeben, und bei denen man von jedem Bereich absehen kann, der ganz dem Innern eines andern Bereiches angehört. Er lautet in seiner allgemeinsten Form folgendermaßen[1]):

II. *Existiert um jeden Punkt einer abgeschlossenen Menge Q eines R_n ein derartiger ihn einschließender Bereich (also auch eine analoge Kugel), so gibt es unter ihnen eine endliche Menge solcher Bereiche, daß jeder Punkt von Q innerer Punkt mindestens eines dieser Bereiche ist.*[2])

Dieser Satz steht, was der Bericht bereits hervorgehoben hat, (so auch durch den Namen) in enger Beziehung zu dem Heineschen Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit, also zu dem Satz, daß es bei einer für alle Punkte einer abgeschlossenen (resp. perfekten) Menge $Q = \{q\}$ stetigen Funktion $f(q)$ zu gegebenem δ stets eine Maximalkugel vom Radius ϱ gibt, die für *alle* Punkte q die zugehörige Funktionsschwankung unterhalb δ herabdrückt. Der Unterschied beider Sätze ist nur der, daß Heine nur die Stetigkeitseigenschaft im Auge hatte, während das obige Theorem den allgemeinen geometrischen Inhalt des Schlußverfahrens enthält, mit dem Heine operiert; es gibt dem Beweisgrund des Heineschen Satzes seinen allgemeinsten geometrischen Ausdruck.[3])

Die im Bericht enthaltene einfache Ableitung des Satzes möchte ich auch jetzt noch als die durchsichtigste ansehen und setze sie deshalb nochmals hierher. Um jeden Punkt von Q als Mittelpunkt gibt es der Voraussetzung nach eine ihm zugehörige Maximalkugel vom Radius ϱ. Von ihnen behalten wir der obigen Festsetzung gemäß nur diejenigen bei, die nicht ganz innerhalb anderer Kugeln liegen. Deren Radien haben eine untere Grenze η. Wäre nun $\eta = 0$, so könnte man aus Q gewisse Punkte $q_1, q_2, \cdots q_\nu \cdots$ so auswählen, daß die zugehörigen Radien $\varrho > \varrho_2 > \cdots > \varrho_\nu > \cdots$ gegen Null konvergieren. Ist dann q_ω ein Grenzpunkt der Punkte $\{q_\nu\}$, so gehört auch zu ihm ein Wert $\varrho > 0$; dies steht aber damit im Widerspruch, daß es in jeder Nähe von q_ω Punkte q_ν gibt, deren ϱ_ν unterhalb jeder Größe bleibt. Die zugehörigen Kugeln K_ν würden nämlich ganz innerhalb der um q_ω gelegten Kugel enthalten sein.

Man denke sich jetzt eine reguläre Würfelteilung, deren Hauptdiagonale kleiner als η ist, und fasse diejenigen Würfel w ins Auge, die im Innern oder auf der Oberfläche mindestens einen Punkt q von

1) Vgl. Bericht I, S. 51 u. 119.

2) Es ist klar, daß die Menge Q ganz im Endlichen vorausgesetzt wird.

3) Vgl. auch meine Note in den C. R. 144 (1907) p. 22.

Q enthalten. Wählt man nun in jedem Würfel *je einen* solchen Punkt q beliebig aus, so schließt der zu ihm gehörige Kugelbereich den Würfel ganz ein. Die zugehörigen N Bereiche enthalten daher jeden Punkt von Q als inneren Punkt, womit der Satz bewiesen ist.[1])

Einen einfachen Beweis für das lineare Gebiet gibt auch H. Lebesgue. Er unterscheidet sich vom ursprünglichen Borelschen Beweise so, daß er von der konstruktiven Bedeckung der Geraden absieht und folgendermaßen schließt. Sei $a \cdots b$ das Intervall und x ein Punkt, so daß für jeden Punkt von $a \cdots x$ das Theorem gilt. Gilt es nun nicht für alle Punkte von $x \cdots b$, so gibt es einen letzten für den es gilt, oder einen ersten, für den es nicht gilt; beides führt aber auf den bekannten auch oben benutzten Widerspruch. Inhaltlich stützt sich also dieser Beweis auf den gleichen Beweisgrund wie der oben gegebene. Die Übertragung auf den R_2 geschieht bei Lebesgue mittels der Peanoschen Abbildung des Quadrats auf die Strecke.[2])

Ein formaler Differenzpunkt muß noch hervorgehoben werden. Borel hat den Satz II bei seiner ursprünglichen Fassung nur für eine *abzählbare* Menge von Bereichen bzw. Intervallen ausgesprochen. Dieser Unterschied ist aber nur unwesentlich. Denn das obige Beweisverfahren operiert ebenfalls nur mit einer abzählbaren Menge von Kugeln, und es ist völlig gleichgültig, ob diese Teilmenge aus einer abzählbaren oder nicht abzählbaren Gesamtmenge von Bereichen herausgehoben wird. Andererseits operiert der Heinesche Satz der damaligen

---

1) Die hier angegebene Konstruktion der N Bereiche ist im Teil I des Berichts noch nicht enthalten; sie findet sich erst in der eben genannten Note. Vgl. auch eine Bemerkung von R. Baire, C. R. 140 (1905) p. 298.

Der Heinesche Satz beruht nunmehr noch auf der Tatsache, daß, wenn eine Funktion in zwei Gebieten stetig ist, die einen gemeinsamen Bestandteil haben, sie auch im Gesamtgebiet stetig ist. Ähnlicher Schlüsse bedarf man z. B. auch beim Beweis der Existenztheoreme für die Fundamentalbereiche automorpher Funktionen. Vgl. insbesondere W. Wirtinger, Wien. Ber. 109 (1899) p. 1193, wo sich, worauf ich erst kürzlich aufmerksam gemacht wurde, der nämliche Beweis des Satzes findet, wie oben im Text.

2) Leçons sur l'intégration, Paris 1902 p. 105.

Das oben benutzte Schnittprinzip zeigt wieder den Zusammenhang des Satzes mit dem Stetigkeitsbegriff. P. Riesz hat auf die Ausdehnbarkeit dieses Schlusses vom R_n auf den R_{n+1} hingewiesen, C. R. 140 (1905) p. 224. Borel hat den Satz für den R_n im Journ. de math. (5) 9 (1903) p. 357 bewiesen. Vgl. auch O. Veblen, Bull. Am. Math. Soc. (1904) S. 436, Borels Mitteilung in den C. R. 136 (1903) p. 298 p. 1055 u. 140 (1905) S. 298, H. W. Young, Proc. Lond. M. S. 35 (1903) p. 384 und (2) 2 (1904) p. 67, sowie meine obengenannte Note. [Vgl. auch noch die Bemerkungen von Lebesgue im Bull. des Sc. math. (2) 31 (1907) S. 129. Nachträglicher Zusatz.]

Auffassung gemäß nur mit einer kontinuierlichen Menge Q, da man damals Mengen andrer Art als Existenzgebiet stetiger Funktionen nicht ins Auge faßte.

III. *Für nicht abgeschlossene Mengen besteht weder der Borelsche Satz noch auch das Heinesche Theorem.*[1])

Dieser Tatbestand ist abschließend und ist auch im Bericht I, wenigstens materiell[2]), bereits erwähnt worden.

Ist P eine *beliebige* Menge des R_n, und gehört zu *jedem* Punkt p ein Bereich in der Weise, daß die untere Grenze aller Radien *von Null verschieden* ist, so gilt das Theorem II auch dann noch; in der Tat bleibt der auf der Würfelteilung ruhende Schluß in Kraft. Hieran hat E. Lindelöf die folgende Erweiterung des Borelschen Theorems geknüpft.[3])

IV. *Ist P eine beliebige Punktmenge des R_n, so daß zu jedem Punkt von P ein ihn einschließender Bereich gehört, so ist es möglich, eine abzählbare Menge von Bereichen anzugeben, die alle Punkte von P einschließen.*

Es ist klar, daß das Theorem nur für den Fall zu beweisen ist, daß die untere Grenze aller Radien ϱ gleich Null ist. Dann nehme man eine Reihe gegen Null abnehmender Zahlen $\varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_\nu \cdots$ an und teile die Punkte von P so in Teilmengen $P_1, P_2 \cdots P_\nu \cdots$, daß die Radien der zu den Punkten von P_ν gehörigen Bereiche zwischen $\varrho_{\nu-1}$ und ϱ_ν liegen; für jede Teilmenge gibt es alsdann eine endliche Bereichmenge, und deren Gesamtheit stellt die behauptete abzählbare Menge dar.

Hieraus fließt noch die wichtige Folgerung, daß, wenn um *jeden* Punkt einer beliebigen Menge P eine Kugel existiert, in der eine höchstens abzählbare Teilmenge von P liegt, P selbst abzählbar ist. Denn eine abzählbare Menge dieser Bereiche genügt, um alle Punkte von P einzuschließen.

Auf diesen Satz stützt sich der in § 1 erwähnte Lindelöfsche Beweis des Haupttheorems. In der Tat existiert um jeden Punkt der dort auftretenden Menge R eine Kugel, in der eine abzählbare Teilmenge von R enthalten ist.

---

1) Dies ist so zu verstehen, daß der Borelsche Satz für nicht abgeschlossene Mengen nicht behauptet werden kann; naturgemäß *können* aber auch bei ihnen Bereiche um eine abzählbare oder selbst endliche Menge von Punkten existieren, die zusammen *alle* Punkte der Menge einschließen. Das gleiche gilt vom Heineschen Theorem.

2) Vgl. S. 119 u. S. 128/129 sowie meine Note C. R. (1907) p. 22.

3) C. R. 137 (1903) p. 697 sowie Acta Math. 29 (1905) p. 183.

Einen sehr einfachen Beweis des letzten Satzes gibt Bernstein.[1]) Ich stelle ihn zunächst für das lineare Gebiet dar. Hier besteht die evidente Tatsache, daß alle Intervalle, deren Endpunkte rationale Punkte sind, eine abzählbare Intervallmenge bilden. Ein den Punkt p umgebendes Intervall δ kann daher stets durch ein Teilintervall von δ ersetzt werden, dessen Endpunkte rational sind, woraus der Satz unmittelbar folgt. Im Raum kann man ebenso jeden einen Punkt p umgebenden Bereich δ durch ein in ihm enthaltenes rechtwinkliges Parallelepipedon ersetzen, dessen Ebenen rationale Koordinaten haben, und deren Gesamtheit ist wieder abzählbar.

§ 3. *Borelsche Mengen.* Mengen dieser Art stellen sich besonders dann ein, wenn man von einer *nicht* abgeschlossenen Punktmenge $P = \{p\}$ ausgeht und um jeden ihrer Punkte irgendwie Bereiche, z. B. Kugeln legt, die sich sukzessive auf die Punkte selbst zusammenziehen.[2])

Sei wieder die Punktmenge P in einem Würfel W enthalten. Ist dann K_p die um p gelegte Kugel, ist $J_p = \mathfrak{J}(K_p)$ ihr Inneres, bezeichnet man wieder gemäß Cantor (S. 11 Anm. 1) durch

$$(1) \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{M}(J_p) = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(K_p)\}$$

diejenige Menge, zu der jeder innere Punkt einer Kugel K_p gehört, und bezeichnet man endlich die Komplementärmenge von $\mathfrak{J}$ durch Q, so hat man unmittelbar

$$(2) \qquad W = \mathfrak{J} + Q,$$

wo Q offenbar eine *abgeschlossene* Menge ist.

Nun lasse man die um die Punkte p gelegten Kugeln sukzessive gegen den Punkt p konvergieren, dann ergibt sich eine Folge solcher Mengen

$$\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \cdots \mathfrak{J}_\nu, \cdots \quad \text{resp.} \quad Q_1, Q_2, \cdots Q_\nu, \cdots,$$

und es besteht für je zwei Mengen $\mathfrak{J}_\nu$ und Q_ν die Gleichung (2). Über-

1) Vgl. eine demnächst in den Acta math. erscheinende Arbeit. Den obigen Grundgedanken hat bereits H. W. Young auf Grund einer brieflichen Mitteilung von Bernstein veröffentlicht; Palermo Rend. 21 (1906) S. 125. Der Beweis des Satzes, den H. W. Young dort selber gibt, ist nicht richtig.

2) Der Gedanke, um Punkte einer linearen überalldichten abzählbaren Menge in der Weise Intervalle zu legen, daß deren Endpunkte eine nirgends dichte abgeschlossene Menge bestimmen, ist zuerst auf das eingehendste und erfolgreichste von L. Scheeffer benutzt worden, Acta math. 5 (1884) S. 49; vgl. z. B. auch das im Bericht I S. 215 angeführte Beispiel. Borel hat diese Idee so weitergeführt, daß er die Gesamtsumme dieser Intervalle gegen Null konvergieren läßt, und hat daraus sehr weitgehende Schlüsse gezogen. Vgl. auch Kap. IV § 13.

dies ist jeder Punkt, der einer Menge $\mathfrak{J}_{\nu+1}$ angehört, zugleich Punkt der Menge $\mathfrak{J}_\nu$, und umgekehrt ist Q_ν Teilmenge von $Q_{\nu+1}$. Die Gleichung (2) bleibt daher auch beim Übergang von $\{\nu\}$ zu ω bestehen, d. h. es wird

$$(3) \qquad W = \mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\} + \mathfrak{M}\{Q_\nu\},$$

wo $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{M}$ die in S. 11 Anm. 2 genannte Bedeutung haben. Die Menge P gehört zu $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$[1]).

Diese Mengen habe ich als *Borelsche Mengen* bezeichnet.[2]) Liegen die Punkte der Menge P in einem Raumteil überalldicht, so ist die Menge Q, sowie auch jede Menge Q_ν in diesem Raumteil nirgends dicht. Alsdann ist die Menge $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$ in der Bezeichnung von R. Baire eine Menge zweiter Kategorie und hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Eine solche Menge bilden beispielsweise die Stetigkeitspunkte einer in dem betrachteten Raumteil punktweise unstetigen Funktion.

Dies bleibt bestehen, falls die Menge $P = \{p\}$ nicht in einem kontinuierlichen Raumteil überalldicht ist, sondern in bezug auf *irgendeine* perfekte Menge, insbesondere auch eine nirgends dichte.

Gibt es keine perfekte Menge, in bezug auf welche die Menge $P = \{p\}$ überalldicht ist, so ist die Menge $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$ nach einem Satz von H. W. Young entweder endlich oder abzählbar.[3]) Es gilt also der folgende zusammenfassende Satz:

V. *Welches auch die Art der Menge $P = \{p\}$ sei, so ist die durch die zugehörigen Mengen $\mathfrak{J}_\nu$ bestimmte Borelsche Menge $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$ endlich oder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.*

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem Satz von Cantor, daß jede nicht abzählbare unendliche Menge einen in sich dichten Bestandteil U enthält. Daraus folgt zunächst, daß wenn die Menge $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$ nicht abzählbar ist, sie ebenfalls einen solchen Bestandteil U enthält. Jedes der verschiedenen Gebiete, aus denen eine Menge $\mathfrak{J}_\nu$ besteht[4]), und das einen Punkt u von U einschließt, muß daher für einen ge-

---

1) H. W. Young nennt, falls alle Mengen Q_ν abgeschlossen sind, und $Q_{\nu+1}$ Teilmenge von Q_ν ist, die Menge $\mathfrak{D}\{Q_\nu\}$, die nach einem Cantorschen Satz ebenfalls abgeschlossen ist, „deduced“. Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1904) S. 235. Die Menge $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$ bezeichnet er als innere Grenzmenge. Leipz. Ber. 55 (1903) S. 287.

2) Vgl. Bericht I, S. 110.

3) Leipz. Ber. 55 (1903) S. 287 und Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1904) S. 262.

4) Gemäß § 11 des nächsten Kapitels besteht $\mathfrak{J}_\nu$ als Komplementärmenge einer abgeschlossenen Menge Q_ν aus einer endlichen oder abzählbaren Menge von „Gebieten“, die übrigens auf das mannigfachste begrenzt sein können.

wissen Index $\nu_1 > \nu$ in zwei Teilgebiete zerfallen. Mit dieser Tatsache tritt alsdann dasjenige Beweisverfahren in Kraft, auf Grund dessen man für die Mengen zweiter Kategorie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ nachweist.[1])

Über lineare Mengen dieser Art gibt H. W. Young noch folgende Sätze.[2]) 1) Man kann die Intervalle, die die Menge P einschließen, so wählen, daß diejenigen Punkte der Menge $\mathfrak{D}$, die nicht zu P gehören, Grenzpunkte der größten in sich dichten Teilmenge von P sind. Dies ist eine einfache Folge der Cantorschen Zerlegung einer Punktmenge in in sich dichte Bestandteile. 2) Die Differenz von zwei abgeschlossenen Mengen kann sowohl als Menge $\mathfrak{D}\{Q_\nu\}$, wie als Menge $\mathfrak{M}\{P_\nu\}$ dargestellt werden, so daß alle Mengen Q_ν abgeschlossen sind, und jedes P_ν eine Komplementärmenge einer abgeschlossenen Menge ist.[3])

Keine der beiden Mengen $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$ und $\mathfrak{M}\{Q_\nu\}$ ist eine abgeschlossene Menge. Dies hat zur Folge, daß die gestaltlichen Verhältnisse dieser Mengen von höchst mannigfaltiger Struktur und Beschaffenheit sein können. Beschränken wir uns zunächst auf das lineare Gebiet, so haben wir es statt mit Kugeln K_p mit Intervallen δ_p zu tun, die sich ihrerseits wieder zu gewissen Gesamtintervallen $\delta^{(\nu)}$ zusammenschließen, die durch ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte die abgeschlossene Menge Q_ν bestimmen. Je nach der Verteilung der Menge $P = \{p\}$ und nach der Größe der zugehörigen Intervalle δ_p kann die Menge Q_ν den verschiedensten Bau aufweisen. Sie kann sich auf Null reduzieren, kann endlich, abzählbar oder von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ sein, kann aber auch in einzelnen Intervallen überalldicht sein und sie daher ganz erfüllen. Analoges gilt daher auch von den gestaltlichen Verhältnissen der Menge $\mathfrak{M}$ und der Komplementärmenge $\mathfrak{D}$. Ähnlich sind die Verhältnisse in der Ebene und im Raum. Hier tritt noch die Besonderheit auf, daß der Menge $\mathfrak{D}$ auch überalldicht liegende zusammenhängende Bestandteile jeder Art angehören können. Hierauf kann ich jedoch erst bei den Anwendungen näher eingehen. (Vgl. Kap. IV, § 17 und Kap. VIII, § 3).

---

1) Vgl. Bericht I, S. 108. In dieser Weise beweist auch H. W. Young den Satz an der Stelle, wo er ihn für den R_ν ausspricht, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 3 (1905) p. 371. Eine Erweiterung des Theorems findet sich Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1904) p. 262. Einen Beweis gibt auch W. Hobson, Proc. Lond. M. S. (2) 2 (1904) S. 316. Er fügt hinzu, daß auch jede reduzible Menge als Borelsche Menge darstellbar ist.

2) Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1904) S. 262.

3) Der zweite Satz ist teilweise schon im Bericht I enthalten (S. 110); er stammt von R. Baire.

Ist die Menge P und damit auch jede Menge $\mathfrak{J}_\nu$ in einem Würfel W überalldicht, so gilt dies auch von der Menge $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$, wie aus der Definition der Mengen $\mathfrak{J}_\nu$ unmittelbar folgt. Dagegen braucht die Menge $\mathfrak{M}\{Q_\nu\}$ in W nicht nirgends dicht zu sein, wenn dies für jede Menge Q_ν der Fall ist.

§ 4. *Übertragung der Punktmengensätze auf den R_∞.* Die eigentliche Grundlage der Punktmengensätze bildet das sogenannte Bolzano-Weierstraßische Theorem, daß jede in einem geschränkten Bereich eines R_ν enthaltene Punktmenge in ihm mindestens eine Häufungsstelle resp. ein Grenzelement besitzt.[1])

Sein Beweis stützt sich auf den *Abstandsbegriff*, auf den Begriff des *geschränkten Bereiches*[2]) und den Begriff des *Grenzelements*. Alle diese Begriffe müssen daher für den R_∞ zunächst festgelegt werden. M. Fréchet, der die Ausdehnung der Punktmengensätze auf den R_∞ ausführlich behandelt, macht dies folgendermaßen.[3])

Seien die Punkte p und p' durch Koordinaten $\{x_\nu\}$ und $\{x'_\nu\}$ für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ gegeben, so soll

$$\varrho(p,p')^{4)} = \frac{|x'_1 - x_1|}{1 + |x'_1 - x_1|} + \frac{1}{2!}\frac{|x'_2 - x_2|}{1 + |x'_2 - x_2|} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\frac{|x'_\nu - x_\nu|}{1 + |x'_\nu - x_\nu|} + \cdots$$

den *Abstand* von p und p' darstellen. Dieser Begriff hat folgende drei Eigenschaften. Erstens ist er für endliche Werte der x_ν und x'_ν stets endlich; zweitens befriedigt er, wie man leicht sieht, die fundamentale Abstandsrelation

$$\varrho(p,p') + \varrho(p,p'') > \varrho(p,p'');$$

drittens aber genügt er auch dem Bolzano-Weierstraßischen Theorem. Diese Eigenschaften sind es augenscheinlich, die die vorstehende Definition des Abstandes veranlaßt haben. Um sie zu beweisen, haben wir zunächst den *Grenzpunkt* p einer Punktfolge $\{p^{(\lambda)}\}$ zu definieren. Dies soll und kann auch hier durch unmittelbare Übertragung der Definitionen des R_ν geschehen, nämlich so, daß mit wachsendem λ der Abstand $\varrho(p, p^{(\lambda)})$ gegen Null konvergiert. Für den so definierten Begriff bestehen dann folgende leicht beweisbare Sätze:

---

1) Über den Ursprung des ihm zugrunde liegenden Schlußverfahrens vgl. Cantor, Math. Ann. 23 (1884) S. 455.

2) Alle Beweise operieren mit geschränkten Gebieten und übertragen deren Eigenschaften mittelst der Transformation durch reziproke Radien auf nicht geschränkte Gebiete.

3) Rend. Palermo 22 (1906) S. 38.

4) $\varrho(p, p')$ bedeutet den Abstand von p und p'; vgl. auch Kap. IV, § 2.

1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Punktfolge

$$p' = \{x'_\nu\}, \quad p'' = \{x''_\nu\}, \cdots p^{(\lambda)} = \{x^{(\lambda)}_\nu\}, \ldots$$

gegen den Punkt $p = \{x_\nu\}$ konvergiert, besteht darin, daß $x^{(\lambda)}_\nu$ für jedes ν mit wachsendem λ gegen x_ν konvergiert.

2. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine unendliche Punktfolge $\{p^{(\lambda)}\}$ einen Grenzpunkt p hat, besteht darin, daß für *gegebenes* ε ein *geeignetes* N existiert, so daß für *jedes* $\mu > N$ und *jedes* $\nu > N$ der Abstand $\varrho(p^{(\mu)}, p^{(\nu)}) < \varepsilon$ ist.

Diese Sätze lassen sich folgendermaßen beweisen. Zunächst ist ersichtlich, daß die Bedingung des ersten Satzes notwendig ist; um zu zeigen, daß sie hinreichend ist, beachte man, daß man offenbar für jedes λ

$$\varrho(p, p^{(\lambda)}) \leq \frac{|x_1 - x_1^{(\lambda)}|}{1 + |x_1 - x_1^{(\lambda)}|} + \cdots + \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{|x_\nu - x_\nu^{(\lambda)}|}{1 + |x_\nu - x_\nu^{(\lambda)}|} + \sigma_\nu = s_{\nu\lambda} + \sigma_\nu$$

hat, wo

$$\sigma_\nu = \frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \cdots$$

sein soll. Man kann nun zu gegebenem ε ein geeignetes ν finden, so daß $\sigma_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, und dann wieder ein λ, so daß auch $s_{\nu\lambda} < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist; damit ist die Behauptung erwiesen. Was den zweiten Satz betrifft, so bedarf auch bei ihm nur der Umstand eines näheren Beweises, daß die in ihm enthaltene Bedingung hinreichend ist. Dazu ist zu zeigen, daß bei gegebenem δ für jedes einzelne ν eine geeignete Zahl N existiert, so daß für jedes beliebige μ

$$|x_\nu^{(N)} - x_\nu^{(N+\mu)}| < \delta$$

ist. Nun ist für jeden Index λ

$$\frac{|x_\nu^{(\lambda)} - x_\nu^{(\lambda+\mu)}|}{1 + |x_\nu^{(\lambda)} - x_\nu^{(\lambda+\mu)}|} < \varepsilon\nu!, \quad \text{also} \quad |x_\nu^{(\lambda)} - x_\nu^{(\lambda+\mu)}| < \frac{\varepsilon\nu!}{1 - \varepsilon\nu!}.$$

Ist nun δ beliebig gegeben, so kann man, welches auch ν sei, zuerst ε so wählen, daß $\varepsilon\nu! < 1$ ist, und dann N so, daß $\varepsilon N! < \delta(1 - \varepsilon N!)$ ist. Dann ist für dieses ν die verlangte Bedingung erfüllt, und es bestimmen alle Folgen $\{x_\nu^{(\lambda)}\}$ je ein x_ν, womit der Satz bewiesen ist.

Damit sind aber alle Bedingungen erfüllt, auf denen die Sätze über den Grenzpunkt beruhen. Bezeichnet man nun noch einen Gebietsteil des R_∞ als *geschränkt*, falls die Koordinaten x_ν seiner Punkte für *irgendwelche* endliche G_ν den Relationen

$$x_1 \leq G_1, \quad x_2 \leq G_2, \ldots x_\nu \leq G_\nu \ldots$$

genügen, so besteht nunmehr der folgende Satz:

VI. *Die Gesamtheit der in einem geschränkten Bereich des R_∞ enthaltenen Punkte bildet eine abgeschlossene Menge.*[1])

Der Beweis ist eine einfache Folge des Umstandes, daß sich die vorstehende Definition der Geschränktheit an jede Koordinate x_ν *einzeln* knüpft, also die Geschränktheit des R_∞ mit der Geschränktheit jedes einzelnen x_ν äquivalent ist. In der Tat, ist $P = \{p\}$ die gegebene Punktmenge, so bestimme man zunächst beliebig einen Grenzwert ξ_1 der Koordinatenwerte x_1; man kann dann eine Punktfolge

$$P_1 = \{p^{(\lambda)}\} = \{p', p'', \ldots p^{(\lambda)}, \ldots\}$$

so auswählen, daß die zugehörigen Koordinaten $x_1^{(\lambda)}$ gegen ξ_1 konvergieren. Sei nun ξ_2 ein Grenzwert der diesen Punkten zugehörigen Koordinatenwerte $x_2^{(\lambda)}$, so gibt es in P_1 eine Teilmenge

$$P_2 = \{p^{(\lambda\mu)}\}$$

von der Art, daß die zugehörigen Koordinatenwerte $x_2^{(\lambda\mu)}$ gegen ξ_2 konvergieren. Ebenso definieren wir eine Teilmenge $P_3 = \{p^{(\lambda\mu\nu)}\}$ von P_2, deren Koordinaten $\{x_3^{(\lambda\mu\nu)}\}$ gegen einen Wert ξ_3 konvergieren, und können dies unbegrenzt fortsetzen. Dann wird jede Punktfolge

$$p^{(\lambda)},\ p^{(\lambda\mu)},\ p^{(\lambda\mu\nu)},\ \ldots$$

einen Grenzpunkt bestimmen, der der Menge P angehört, und zwar denjenigen, dessen Koordinaten

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \ldots$$

sind. Damit ist der Satz bewiesen. Hieraus zieht Fréchet noch die weitere Folgerung:

VII. *Alle Sätze der Cantorschen Punktmengentheorie, die für einen geschlossenen Bereich gelten, insbesondere also auch das Haupttheorem, sind auf einen geschränkten Bereich des R_∞ übertragbar.*

Dies bedarf freilich ausführlicher Erörterung.[2]) Hier genüge der Hinweis auf folgende zwei Tatsachen. Erstens können diese Sätze unabhängig von jeder Koordinatenbeziehung so bewiesen werden, daß man mit den Punkten p selbst operiert, und zweitens beruhen sie auf solchen Eigenschaften der Punkte p, die auf Grund der vorstehenden Definitionen

---

1) Fréchet nennt eine Menge *kompakt*, wenn sie das Bolzano-Weierstraßische Theorem vom Grenzpunkt erfüllt. Der obige Satz erhält daher folgende Form: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Punktmenge des R_∞ kompakt ist, besteht darin, daß sie in einem geschränkten Bereich des R_∞ enthalten ist. Ich komme auf diesen Begriff in Kap. VII näher zurück.

2) Vgl. Kap. VII § 5 und 8.

und Sätze auch den Punktmengen des R_∞ zukommen. Die Eigenschaft, die für den Beweis aller dieser Punktmengensätze allein in Betracht kommen, sind nämlich erstens der Satz, daß die Ableitung jeder Punktmenge eine abgeschlossene Menge ist, und zweitens die sukzessive Gebietsteilung, die dem Beweis des Satzes vom Grenzpunkt zugrunde liegt. Beide sind auf den R_∞ übertragbar.[1])

Der Fréchetsche Abstandsbegriff genügt allen formal an ihn zu stellenden Ansprüchen. Eine sonstige Anwendung hat er noch nicht gefunden. Anders ist es mit dem Abstandsbegriff, den Hilbert kürzlich für den R_∞ eingeführt hat.[2]) Er ist genau der euklidische, indem Hilbert als Abstand der Punkte p und p' mit den Koordinaten $\{x_\nu\}$ und $\{x'_\nu\}$ den Ausdruck

$$\varrho(p, p') = \sqrt{\sum (x'_\nu - x_\nu)^2}, \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

definiert, dem er dadurch einen endlichen Weg sichert, daß er sich von vornherein auf denjenigen Bereich des R_∞ beschränkt, der als Einheitskugel bezeichnet werden kann und durch die Gleichung

$$\sum x_\nu^2 \leq 1, \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

dargestellt wird, so daß also jedes $|x_\nu| \leq 1$ ist. Freilich sind für diesen Abstandsbegriff nicht alle diejenigen Eigenschaften vorhanden, die dem Fréchetschen zukommen (vgl. Kap. VII § 5). Andererseits hat er aber eine außerordentliche analytische Tragweite, denn auf den so bestimmten R_∞ lassen sich insbesondere die Stetigkeitsbegriffe in einfachster Weise übertragen.[3]) Ist nämlich p Grenzpunkt der Folge $\{p_\nu\}$, so besteht die Stetigkeit der Funktion $f(p)$ im Punkte p darin, daß

$$|f(p_\nu) - f(p)| = \varepsilon_\nu$$

mit wachsendem ν gegen Null konvergiert, welche Folge $\{p_\nu\}$ man auch benutzt. Übrigens gestatten auch die Fréchetschen Begriffsbestim-

1) Vgl. Bericht I, S. 59 ff. Fréchet gibt in seiner These eine ausführliche Ableitung. — Über den Borelschen Satz und den Satz, daß man jede abgeschlossene Menge als Ableitung einer abzählbaren Menge darstellen kann, vgl. ebenfalls Kap. VII.

2) Gött. Nachr. 1906, S. 200 und 439.

3) In analytischer Form besagt die Stetigkeit, daß

$$f(x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, \ldots) - f(x_1, x_2, \ldots)$$

gegen Null konvergiert, in welcher Weise man auch jede der Größen δ_λ für sich gegen Null konvergiert läßt. Hilbert nennt Funktionen, bei denen dies nur für solche Werte der Fall ist, für die $\sum \delta_\nu^2$ gegen Null konvergiert, halbstetig. Vgl. a. a. O. S. 177 und 440.

mungen die Übertragbarkeit der Stetigkeitsdefinition auf Funktionen des Orts (vgl. auch Kap. VII § 10).[1])

§ 5. *Der Inhalt der Punktmengen.*[2]) Die Frage, ob eine Punktmenge meßbar ist oder nicht, hängt von der zugrunde gelegten Inhaltsdefinition ab. Den Fortschritt auf diesem Gebiete verdanken wir wesentlich H. Lebesgue.[3]) Er hat die Inhaltsdefinition so zu verallgemeinern gewußt, daß die Meßbarkeit sozusagen eine allgemeine Eigenschaft der uns interessierenden Punktmengen geworden ist. Seine Ideen knüpfen an diejenige Inhaltsdefinition an, die vorher bereits Borel für besondere Zwecke ausgebildet hatte. *Ihre Eigenart liegt im Übergang vom Endlichen zum Abzählbaren;* statt einer *endlichen* Zahl von Bereichen, die die sämtlichen Punkte der gegebenen Menge einschließen, wird von vornherein eine *unendliche* Menge solcher Bereiche benutzt und mit ihr die Inhaltszahl, falls sie existiert, definiert. Dies hat den Erfolg, daß man nicht allein die einzelnen Bereiche, sondern auch ihre Summe unter jede Grenze sinken lassen kann. Auf Grund dieser Definition ist jede abzählbare Menge, mag sie nirgends dicht oder überalldicht sein, meßbar und vom Inhalt Null. Hieran dürfte Lebesgue sachlich angeknüpft haben. Die Art, in der er seine Ideen entwickelt, ist folgende.[4])

Sein Ausgangspunkt ist axiomatischer Natur. Er verlangt, daß diejenige grundlegende Inhaltseigenschaft, die dem elementaren Begriff, insbesondere dem Dreiecksinhalt, zukommt, auch für den allgemeinsten Inhaltsbegriff in Geltung bleiben soll. Diese Eigenschaft besagt, daß

---

1) Formale Begriffsbestimmungen der Stetigkeit und Konvergenz im R_∞ gibt Le Roux, Nouv. Ann. (4) 4 (1904) p. 448; sie beziehen sich übrigens nicht auf einen in dem obigen Sinne geschränkten Bereich.

Diejenige *spezielle* Funktion des R_∞, die bisher am meisten untersucht wurde, ist der Konvergenzradius der Taylorschen Reihe in seiner Abhängigkeit von den Koeffizienten a_i. Um zu zeigen, daß bei dieser allgemeinen Auffassung schon die einfachsten Sätze des R_n Ausnahmen erleiden können, erwähne ich folgenden von G. Vivanti gefundenen Satz. Sind alle Koeffizienten a_i rationale ganze Funktionen eines Parameters t, so braucht der Konvergenzradius keine stetige Funktion von t zu sein. Ann. di mat. (2) 21 (1893) p. 25.

2) Eine ausführliche Erörterung des Inhaltsbegriffs nach Cantor, Peano, Jordan und Borel enthält die Dissertation von C. Gunderson, New York 1901, ohne sonst wesentlich Neues zu bringen.

3) Thèse, Paris 1902; abgedruckt in Ann. di mat. (3) 7 (1902) S. 231.

4) Die Teilung in unendlich viele Intervalle bei Prozessen, wo man sonst gewöhnlich mit einer endlichen Zahl operiert, hat übrigens schon L. Scheefer in seinen Arbeiten über die Bogenlänge systematisch benutzt; Acta math. 5 (1884), vgl. besonders S. 70 ff.

für zwei Flächenstücke ohne gemeinsame innere Punkte die Summe der Inhalte beider Flächen gleich dem Inhalt der von ihnen gebildeten Gesamtfläche ist. Sie ist es, die das charakteristische Merkmal der *meßbaren* Punktmengen abgeben soll. Sie wird von ihm analog für alle besonderen Meßbarkeitsbegriffe zugrunde gelegt, denen wir in Kap. VI begegnen werden. Daher definiert Lebesgue:

VIII. *Ist P irgendeine in dem Würfel W enthaltene Punktmenge und $\mathfrak{K}(P)$ ihre Komplementärmenge, so daß also*

$$W = P + \mathfrak{K}(P)$$

ist, so wird die Menge P dann und nur dann als meßbar bezeichnet, wenn die zugrunde gelegte Inhaltsdefinition die Gleichung

$$M(\mathfrak{W}) = M(P) + M(\mathfrak{K})$$

ergibt. ($M(P)$ bedeutet den Inhalt von P).

Das Wesentliche ist nun, daß dieser axiomatischen Forderung weder der Cantorsche noch der Peano-Jordansche allgemeine Inhaltsbegriff, wohl aber der Borelsche entspricht.[1]) Für *abgeschlossene Mengen* stimmt der Cantorsche Begriff mit demjenigen von Lebesgue überein; für sie ist er mit dem, was Peano und Jordan als äußeren Inhalt einer Menge bezeichnen, identisch. Für solche Mengen war es überhaupt allgemein üblich, mit diesem Inhaltsbegriff zu operieren, und vielleicht ist auch hierin ein Anstoß für die Begriffsbildung von Lebesgue zu suchen.

Auch der Lebesguesche Meßbarkeitsbegriff kann formal an die Definition eines *äußeren* und *inneren* Inhalts angeschlossen werden. Werden die sämtlichen Punkte einer im Würfel W enthaltenen Punktmenge P in eine endliche oder abzählbare Menge von Bereichen eingeschlossen, die die Summe S haben, so stellt die untere Grenze von S wieder den äußeren Inhalt $M_a(P)$ dar. Wird der äußere Inhalt der Komplementärmenge $\mathfrak{K}(P) = \mathfrak{K}$ in analoger Weise definiert, so ist jedenfalls

$$M_a(P) + M_a(\mathfrak{K}) \geqq M(W),$$

und es wird die Differenz $M(W) - M_a(\mathfrak{K})$ als der innere Inhalt von P bezeichnet; Gleichheit des äußeren und inneren Inhalts bewirkt daher die *Meßbarkeit* beider Mengen und damit den Übergang der vorstehenden Relation in eine Gleichung.[2])

1) Vgl. Bericht I, S. 93.

2) G. Vitali zeigt in bekannter Weise die Unabhängigkeit dieser Inhaltsdefinition von der Art der benutzten Intervalle; Pal. Rend. 18 (1904), p. 116, eine ausführliche Darstellung dieses Inhaltsbegriffes nebst der Ableitung der für ihn geltenden Gesetze gibt H. W. Young, Proc. L. M. S. 2 (1905) p. 16 ff., stellt jedoch statt der obigen natürlichen Definition die folgende künstlichere an die Spitze. Der innere Inhalt einer Menge ist die obere Grenze der Inhalte ihrer abgeschlossenen

Für diesen Inhaltsbegriff bestehen folgende aus seiner Definition sich unmittelbar ergebende Sätze:

1. Jede abzählbare Menge ist meßbar und vom Inhalt Null; damit ist auch jede Menge meßbar, deren Komplementärmenge abzählbar ist.

2. Auch jede abgeschlossene Menge ist meßbar. Ihr Inhalt stimmt, wie bereits erwähnt, mit dem überein, was Peano und Jordan als ihren äußeren Inhalt bezeichneten.

Die Inhaltsfrage bleibt also nur für solche nicht abgeschlossenen Mengen offen, die selbst, ebenso wie ihre Komplementärmenge, nicht abzählbar sind. Mengen dieser Art werden z. B. von den Stetigkeits- und Unstetigkeitspunkten einer punktweise unstetigen Funktion gebildet, falls die letzteren ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen; doch sind diese Mengen, wie aus dem alsbald abzuleitenden Satze IX folgt, sämtlich noch meßbar.[1])

Die Bedeutung dieses Borel-Lebesgueschen Inhaltsbegriffes liegt in der großen Tragweite seiner Folgerungen. Eine erste und zugleich besonders wichtige lautet:

IX. *Jede endliche, sowie auch jede abzählbare Menge meßbarer Mengen ohne gemeinsame Punkte ist selbst meßbar und ihr Inhalt gleich der Summe der Einzelinhalte.*

Ein einfachstes Beispiel hierzu bilden die unendlich vielen Intervalle, die eine nirgends dichte, lineare Menge bestimmen. Den allgemeinen Beweis kann man folgendermaßen führen.[2])

Sei eine meßbare Menge P in einem Würfel W enthalten, und sei $A = \{\alpha\}$ eine endliche oder abzählbare Menge von Bereichen, in die man die Punkte von P einschließen kann, und $B = \{\beta\}$ die analoge Bereichmenge für die Komplementärmenge $\mathfrak{K}(P)$ in bezug auf den Würfel W. Dann folgt aus der obigen Definition VIII, daß sich die Mengen A und B so wählen lassen, daß bei beliebig vorgegebenem ε die Relation

$$M(A) + M(B) - M(W) < \varepsilon$$

besteht. Nun seien

$$P_1, P_2, \ldots P_\nu \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_\nu$$

Teilmengen, der äußere Inhalt die untere Grenze der Intervallmengen, die die sämtlichen Punkte einschließen; naturgemäß darf diese Intervallmenge aus unendlich vielen Intervallen bestehen. Vgl. auch einen in Kap. IV, § 2 erwähnten Satz, der vielleicht den Anlaß hierzu bot.

1) Eine Menge, für die sich die Meßbarkeit nicht behaupten läßt, ist z. B. die oben S. 22 erwähnte Hardysche Punktmenge der Mächtigkeit $\aleph_1$.

2) Lebesgue führt den Beweis nur für das lineare Gebiet; er kann, sobald die geometrischen Verhältnisse der Ebene und des Raumes präzis definiert sind, wie es in den folgenden Kapiteln geschehen wird, analog für jeden R_ν geführt werden. Dies habe ich oben getan.

irgendwelche in W enthaltene meßbare Mengen ohne gemeinsame Punkte nebst ihren Komplementärmengen; ferner sei

$$P^{(\nu)} = \sum_1^\nu P_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}^{(\nu)}$$

die von ihnen gebildete Gesamtmenge und deren Komplementärmenge, so hat man gemäß der Cantorschen Bezeichnung (S. 11) zugleich

$$P^{(\nu)} = \mathfrak{M}\,\{P_i\},\ \mathfrak{R}^{(\nu)} = \mathfrak{D}\,\{\mathfrak{R}_i\}. \qquad (i = 1, 2 \ldots \nu.)$$

Seien ferner

$$A_\nu = \sum \alpha_\nu \quad \text{und} \quad B_\nu = \sum \beta_\nu$$

die zu P_ν gehörigen Bereichmengen, so kann durch geeignete Wahl von A_ν und B_ν für beliebiges ε_ν

(1) $$M(A_\nu) + M(B_\nu) - M(W) < \varepsilon_\nu$$

gemacht werden. Wir setzen nun weiter

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{M}\,\{A_i\},\ \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{D}\,\{B_i\}, \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu.)$$

so daß $\mathfrak{A}_\nu$ die kleinste Menge ist, der jeder derjenigen Bereiche $\{\alpha_i\}$ als Bestandteil angehört, der in einem A_i enthalten ist, und $\mathfrak{B}_\nu$ die größte, die jeden Teil eines der Bereiche $\{\beta_i\}$ enthält, der in jeder der Mengen $B_1, B_2 \ldots B_\nu$ enthalten ist. Daher sind $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ Bereichmengen für $P^{(\nu)}$ und $\mathfrak{R}^{(\nu)}$, und man hat

(2) $$M(\mathfrak{A}_\nu) + M(\mathfrak{B}_\nu) - M(W) < \sum_1^\nu \varepsilon_i.$$

Diese Relation kann einerseits von ν auf $\nu + 1$, andererseits aber auch von $\{\nu\}$ auf ω ausgedehnt werden. In der Tat, setzt man noch

$$P^{(\omega)} = \sum_1^\infty P_\nu,\quad \mathfrak{A}_\omega = \mathfrak{M}\,\{A_\nu\},\quad \mathfrak{B}_\omega = \mathfrak{D}\,\{B_\nu\},$$

so ist auch jetzt noch $\mathfrak{A}_\omega$ die kleinste Bereichmenge, die *jedes* α_ν als Bestandteil enthält, und ebenso $\mathfrak{B}_\omega$ die größte Bereichmenge, die in *jedem* $B_\nu = \sum \beta_\nu$ als Bestandteil enthalten ist. Also folgt wieder, daß erstens $\mathfrak{A}_\omega$ und $\mathfrak{B}_\omega$ zwei der Gesamtmenge $P^{(\omega)}$ und ihrer Komplementärmenge zukommende Bereichmengen sind, und daß zweitens für sie die Relation

(3) $$M(\mathfrak{A}_\omega) + M(\mathfrak{B}_\omega) - M(W) < \sum \varepsilon_\nu$$

besteht. Da man nun $\sum \varepsilon_\nu$ durch geeignete Wahl aller ε_ν ebenfalls beliebig klein machen kann, so ist damit sowohl die Meßbarkeit von $P^{(\omega)}$ bewiesen, wie auch die Geltung der grundlegenden Inhaltseigenschaft.[1])

1) Vgl. auch den Beweis von Vitali, a. a. O.

Wir können dies kürzer auch so aussprechen, daß die Meßbarkeit auch beim Übergang von $\{\nu\}$ zu ω bestehen bleibt. *Sie gilt daher für alle Mengen, die sich durch den Fortgang von ν zu $\nu + 1$ und von $\{\nu\}$ zu ω aus meßbaren Mengen ergeben.*

In diesem Satz ist der wichtigste Unterschied zwischen dem Lebesgueschen Inhaltsbegriff und den älteren enthalten. Für den Cantorschen oder Peano-Jordanschen Inhaltsbegriff besteht ein solcher Satz nicht. Andererseits liegt in diesem Satz auch der wichtigste Erfolg des Begriffs, sowie seine außerordentliche Tragweite. In der Analysis treten nämlich fast durchgängig entweder solche Mengen auf, wie wir sie eben betrachtet haben, oder aber deren Komplementärmengen; es sind dies Mengen, wie sie z. B. § 3 enthält. In der Tat hat man für die dort auftretenden Mengen die Beziehung

$$Q_{\nu+1} = Q_\nu + Q'_\nu, \quad \mathfrak{J}_\nu = \mathfrak{J}_{\nu+1} + \mathfrak{J}'_{\nu+1},$$

daher kann man die Gesamtmenge $\mathfrak{M}\{Q_\nu\}$ in die Form

$$\mathfrak{M}\{Q_\nu\} = Q_1 + (Q_2 - Q_1) + (Q_3 - Q_2) + \cdots$$

setzen, und es folgt nunmehr aus dem obigen Satz, daß die Meßbarkeit für die Mengen $\mathfrak{M}\{Q_\nu\}$ und für ihre Komplementärmenge $\mathfrak{D}\{\mathfrak{J}_\nu\}$ unmittelbar vorhanden ist, falls sie für jedes Paar Q_ν und $\mathfrak{J}_\nu$ besteht.[1]) Unter Ausdehnung der im Bericht I S. 110 gebrauchten Bezeichnung kann man diese Mengen als *meßbare Borelsche Mengen* bezeichnen.[2])

Der obige Satz führt übrigens auch zu einer formalen Vereinfachung mancher Resultate. So kann man z. B. die Integrierbarkeitsbedingung kurz folgendermaßen aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit einer Funktion besteht darin, daß die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte den Inhalt Null hat.[3])

1) Werden unendlich viele Punktmengen Q_ν betrachtet, die nicht in dem Verhältnis stehen, daß Q_ν Teilmenge von $Q_{\nu+1}$ oder $Q_{\nu+1}$ Teilmenge von Q_ν ist, so braucht ein bestimmter Grenzwert für die Inhalte $J(Q_\nu)$ naturgemäß überhaupt nicht zu existieren. Man kann dann zwar noch einen obersten oder untersten Limes ins Auge fassen, aber analoge Sätze allgemeiner Art, die seine Größe und die Größe der Inhalte $J(Q_\nu)$ betreffen, existieren dann nicht mehr. Beispiele gibt F. Hartogs, Math. Ann. 62 (1906) S. 7. Mengen dieser Art kommen aber für das folgende, wie überhaupt für die hier vorliegenden Probleme nicht in Betracht. Man vgl. auch die allgemeinen Erörterungen von Kap. IV, § 2 und 5.

2) Vgl. auch Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris 1904, p. 102 ff. Borel gibt noch einige spezielle Sätze über unendlich viele *meßbare* Mengen; vgl. Kap. IV § 2.

3) Lebesgue, Leçons S. 28; vgl. auch G. Vitali Rend. Ist Lomb. (2) 34 1904) p. 69.

Dies gilt sowohl für Funktionen einer wie mehrerer Variabeln.

Man kann den Inhaltsbegriff auch auf nicht geschränkte Mengen ausdehnen. Dies hat E. Bortolotti[1]) für das lineare Gebiet getan unter Benutzung des älteren Inhaltsbegriffs; doch ist sein Verfahren auf jeden Inhaltsbegriff und jeden R_n ausdehnbar. Er definiert den Inhalt in derselben Weise, wie man den Inhalt eines über ein unendliches Intervall erstreckten Integrals definiert. Der Inhalt der sich ins unendliche erstreckenden Punktmenge P wird nämlich als Grenzwert derjenigen Inhalte eingeführt, die den gegen die Gesamtmenge P konvergierenden geschränkten Teilmengen $\{P_\nu\}$ entsprechen; er setzt also

$$M(P) = \lim_{\nu=\infty} M(P_\nu).$$

Es liegt mithin ein doppelter Grenzübergang vor, der im allgemeinen nicht vertauschbar ist.

§ 6. *Inhaltsbegriffe besonderer Art.* Sei zunächst $Q = \{q\}$ eine abgeschlossene nirgends dichte ebene Menge, so kann man für sie auf folgende Weise einen *Längeninhalt* definieren.

Im Anschluß an Cantors allgemeine Bestimmung des Inhalts lege man zunächst um jeden Punkt q von Q eine Kreisfläche $K_{(\varrho)}$ mit dem Radius ϱ und fasse den Flächeninhalt $\mathfrak{F}_{(\varrho)}$ der Menge $\mathfrak{M}\{K_{(\varrho)}\}$ ins Auge, dem also jede Kreisfläche $K_{(\varrho)}$ angehört.[2]) Man nehme nun an, daß $\mathfrak{F}_{(\varrho)}$ mit ϱ gegen Null konvergiert, daß wir es also mit einer Menge zu tun haben, die im Sinne von Cantor den ebenen Inhalt Null hat. Für diese Menge bilde man den Quotienten

$$l = \frac{\mathfrak{F}(\varrho)}{2\varrho},$$

so wird dieser Quotient mit abnehmendem ϱ einen obersten Grenzwert besitzen; ihn kann man als *Längeninhalt L der Menge Q* betrachten. Dieser Wert hat insbesondere für funktionentheoretische Untersuchungen eine Bedeutung erlangt (vgl. Kap. IV § 18).

1) Rend. Acc. Linc. (5) 11, 2 (1902) S. 45.

2) Genauer gesprochen muß man mit dem äußeren Inhalt der Fläche $\mathfrak{F}_{(\varrho)}$ operieren (vgl. Kap. VI, § 18) oder sich auf eine endliche Zahl von Kreisen beschränken, die alle Punkte der Menge Q einschließen, was gemäß dem Borelschen Theorem stets möglich ist. Noch einfacher ist es, die in Kap. IV § 3 eingeführten approximierenden Figuren Π zu benutzen und die Menge $\mathfrak{M}\{K_{(\varrho)}\}$ durch das innere Gebiet $\mathfrak{J}(\Pi)$ zu ersetzen, das seiner Definition nach aus einer endlichen Zahl kongruenter Quadrate besteht.

In ähnlicher Weise kann man für räumliche Mengen $Q = \{q\}$ verfahren, die Kreise durch Kugeln ersetzen und in derselben Weise die obersten Grenzwerte der Quotienten

$$l = \frac{V(\varrho)}{\pi \varrho^2} \quad \text{und} \quad O = \frac{V(\varrho)}{2\varrho}$$

ins Auge fassen und sie als Längeninhalt und als Oberflächeninhalt der Menge Q einführen[1]) (vgl. auch Kap. VI § 18). In den einfachen Fällen decken sich diese Begriffe mit den gewöhnlichen; doch gilt dies keineswegs allgemein. Selbst für solche Mengen, die keinen kontinuierlichen Bestandteil enthalten (punkthafte Mengen gemäß Kap. IV § 4), kann der so definierte Längeninhalt endlich und sogar unendlich groß werden.[2])

Wir gehen zu dem einfacheren Fall der ebenen Mengen zurück und nehmen insbesondere an, daß es sich um eine *perfekte* Menge S handelt. Dann kann man für deren Punkte eine Unterscheidung einführen, die derjenigen von Lindelöf (§ 2) analog ist. Dies ist von D. Pompeju[3]) ausgeführt worden. Es soll nämlich ein Punkt s ein Punkt *erster Gattung* heißen, falls es eine um ihn mit endlichem Radius ϱ gelegte Kreisfläche von der Art gibt, daß sich alle ihr angehörigen Punkte $\{s\}$ auf eine *abzählbare* Menge von Teilmengen mit *endlichem* Längeninhalt verteilen lassen. Wenn dagegen eine solche Kreisfläche nicht existiert, wie klein man auch den Radius ϱ wählen mag, so soll q ein Punkt zweiter Gattung heißen. Seien S_1 und S_2 die entsprechenden Teilmengen von S, so hat man

$$S = S_1 + S_2$$

und kann nun ähnlich, wie beim Lindelöfschen Beweis des Haupttheorems zeigen, daß S_2 abgeschlossen und insichdicht, also perfekt ist, und daß S_1 in eine abzählbare Menge von Teilmengen mit endlichem Längeninhalt zerlegt werden kann.

Diese Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf den Raum übertragen.

---

1) In dieser Weise verfährt H. Minkowski, um die Bogenlänge einer Kurve und die Oberflächenzahl einer Fläche zu definieren, wesentlich für die Theorie der konvexen Körper; vgl. dies. Jahresber. 9 (1901) S. 115.

2) Einfache Beispiele gibt H. W. Young, Proc. Lond. M. S. (2) 3 (1905) S. 461. Er zeigt auch, daß sich der Längeninhalt unendlich vieler Kurvenbögen nicht mit ihrer Gesamtlänge zu decken braucht.

3) Ann. Fac. Toulouse (2) 7 (1905) S. 287.

Kapitel IV.

Die gestaltlichen Grundbegriffe.

Die mengentheoretische Klärung der Tatsachen, mit denen Geometer und Analytiker wie mit selbstverständlichen Dingen operieren, bildet eine der wesentlichsten Aufgaben dieses Berichts.[1] Sie erscheint um so notwendiger, als die außerordentliche Fülle der möglichen Gestalten, die den grundlegenden Begriffen entsprechen, die herrschenden Vorstellungen erheblich hinter sich lassen dürfte.

Die Ausführung dieser Aufgabe erfolgt im Anschluß an das in der Einleitung angedeutete Programm, also ohne Benutzung analytischer Symbole. Sie knüpft einerseits an gestaltliche Sätze über Polygone und die durch sie bewirkte Gebietsteilung an, andrerseits an Sätze metrischer und mengentheoretischer Art, in die Größenbegriffe eingehen. Ich lege als Maßbestimmung die euklidische zugrunde (§ 1 u. 2).

Als methodisches Hilfsmittel allgemeinster Art erscheint eine gewisse eine gegebene Punktmenge *approximierende Polygonfigur*, deren Seiten zwei zueinander senkrechten Richtungen parallel laufen. Eine solche Figur, die für jede beliebige Menge existiert, die andrerseits jede beliebige positive oder negative Zusammenhangszahl haben kann, bietet in keiner Weise etwas Neues dar; approximierende Kurven oder Polygone pflegt man auf jedem Gebiet und zu jedem Zweck mannigfach zu benutzen. Andere methodisch ebenso einfache Figuren dürften auch kaum existieren.[2] Wesentlich ist nur, daß mir diese Figuren für alle allgemeineren Begriffe den Ausgangspunkt abgeben, daß ich mich dabei auf Polygone einfachster Form beschränke[3]), und daß ich sie fast zur ausschließlichen Grundlage aller Schlüsse mache. Auch dies erfolgt in der üblichen Weise, nämlich so, daß ich prüfe, welche Eigenschaften

---

1) Dahinzielende Untersuchungen dürfte zuerst R. de Paolis ausgeführt haben; Mem. Linc. (3) 9 (1880/81).

2) Man vgl. auch die neueren Beweise des Cauchyschen Integralsatzes.

3) Polygone ähnlicher Art hat A. Pringsheim für die Theorie der Kurvenintegrale benutzt. Vgl. z. B. Münch. Ber. 25 (1895) S. 56. Er bezeichnet sie als Treppenwege.

der Polygonfigur sich von $\{\nu\}$ auf ω übertragen lassen. Hierzu bedarf zunächst die Festlegung der wichtigsten Eigenschaften dieser Figuren, sowie auch die Mannigfaltigkeit ihrer möglichen Gestalten einer ausführlicheren Erörterung (§ 3).

Der erste geometrische Begriff, der mengentheoretisch festgelegt wird, ist der der zusammenhängenden Menge oder des *Kontinuums*. Von solchen unterscheidet man zweckmäßig drei Arten. Die erste stellt das *abgeschlossene* Kontinuum dar; es wird so definiert, daß es nicht in zwei abgeschlossene Teilmengen zerlegbar ist (§ 4). Unendlich viele Kontinua dieser Art besitzen ein Grenzgebilde, dessen Eigenschaften näher betrachtet werden (§ 5). Die nicht abgeschlossenen Kontinua werden keiner erschöpfenden Einteilung unterworfen. Es genügt, sie in eine *engere* und eine *weitere* Gattung zu spalten, es sind diejenigen, die sich im Gebiet der Funktionentheorie am natürlichsten einstellen. Die engere Gattung ist mit dem Weierstraßischen Gebietsbegriff identisch (§ 6). Für den weiteren Begriff des nicht abgeschlossenen Kontinuums wird nur verlangt, daß je zwei seiner Punkte einem abgeschlossenen Kontinuum angehören müssen, das Teilmenge des gesamten Kontinuums ist (§ 9).

Der Notwendigkeit, für die allgemeinsten Gebiete eine *Zusammenhangszahl* zu definieren, kann man in der Weise nachkommen, daß man sie als obere Grenze der Zusammenhangszahlen gewisser approximierenden Polygonfiguren einführt (§ 7).

Von grundlegender Bedeutung ist der Begriff der *geschlossenen Kurve*, die hier als rein geometrischer Begriff mengentheoretisch einzuführen ist, unter ausdrücklichem Verzicht auf jegliches analytische Symbol (§ 10). Ihre wesentliche geometrische Eigenschaft besteht darin, daß sie eine Gebietsgrenze oder genauer die gemeinsame Grenze zweier durch sie getrennter Gebiete ist. Jede geschränkte Punktmenge dieser Art wird als geschlossene Kurve definiert. Sie stellt die allgemeinste begriffliche Verallgemeinerung des Polygons dar, sowie der ihm eigentümlichen Anordnungseigenschaft, die Ebene in bekannter Weise in ein Inneres und ein Äußeres zu zerlegen. Die Fülle der gestaltlichen Formen, die dieser Begriff zuläßt, ist eine sehr hohe; ich erwähne ein Beispiel, in dem einer geschlossenen Kurve Strecken der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ angehören, die sämtlich gleiche Länge haben.

Einen erheblich weiteren Begriff stellt bereits die *volle Grenze* eines einfach zusammenhängenden Gebietes dar (§ 8). Wichtig ist, daß ihm eine geschlossene Kurve als äußere Randkurve angehört, wie es analog für polygonal begrenzte Gebiete der Fall ist (§ 11). Die Eigenschaften, die die Zerlegung und Zusammensetzung von Polygonen betreffen, über-

tragen sich übrigens nur in modifizierter Form auf die allgemeineren Gebiete. Wir bedürfen auch eines Satzes, der die Zerlegung in *unendlich viele* Gebiete betrifft (§ 12.) Einen wichtigen Hilfssatz bildet auch die Tatsache, daß ein geschränktes Gebiet durch seine Grenze bestimmt ist (§ 13).

Gemäß dem Haupttheorem aus der Lehre der Punktmengen zerfällt jede abgeschlossene Menge in einen abzählbaren und einen perfekten Bestandteil. Hier erhebt sich sofort die weitere Frage, wie dieser perfekte Bestandteil *gestaltlich* beschaffen ist. Ihre Beantwortung wird in der Weise gegeben, daß der Zusammenhangsbegriff den Einteilungsgrund bildet. Die perfekten Mengen sind in zwei Gattungen von verschiedenem Typus zu zerfällen. Für den ersten stellt eine lineare zusammenhangslose (also nirgends dichte) Menge ein einfachstes Beispiel dar; sie läßt sich auf unbegrenzte Art immer wieder in zwei Teilmengen spalten, die von der gleichen Art sind wie die Gesamtmenge, und gestattet insofern *keine* weitere gestaltliche Analyse. Für die zweite Gattung besteht ein Theorem, das dem oben erwähnten Haupttheorem parallel geht. Ist eine Punktmenge dieser Art nämlich nicht selbst ein Kontinuum, so gestattet sie eine *sukzessive Abspaltung* einzelner abgeschlossener Kontinua; und dieser Prozeß kann einerseits bis zu transfiniter Ordnung fortgesetzt werden, wie er andrerseits für eine transfinite Zahl der zweiten Zahlklasse ein Ende finden muß. Dann wird die gesamte Menge entweder erschöpft sein, oder aber es bleibt noch eine Menge der ersten Gattung als letzter Rest zurück (§ 14).

Eine kurze Darlegung gibt an, ob und wieweit die vorstehenden Ergebnisse auf den Raum übertragbar sind (§ 15). Für die meisten trifft es zu, insbesondere für den Begriff der approximierenden polygonalen Figur und für ihre Eigenschaften. Eine wesentliche Schranke der unmittelbaren Übertragbarkeit besteht hier wie auch sonst darin, daß im Raum die Zusammenhangszahl eine wichtige Rolle spielt, und daß wir eine präzise Theorie der räumlichen Ordnungstypen noch nicht besitzen.

Ich schließe mit einigen Anwendungen auf die *Funktionentheorie.* Eine eingehendere Darstellung des befruchtenden Einflusses, den die Mengentheorie auf die Funktionentheorie ausgeübt hat, würde den Rahmen dieses Berichts weit übersteigen. Ich beschränke mich auf einige Tatsachen, bei denen die *gestaltlichen* Begriffe eine wesentliche Rolle spielen. Dazu erörtere ich zunächst zwei Probleme, in denen das engere und das weitere nicht abgeschlossene Kontinuum ihre Hauptanwendung finden. Das erste betrifft das Existenzgebiet einer eindeutigen analytischen Funktion (§ 16). Mengentheoretisch steht hier der Satz im Vordergrund, daß jede perfekte Punktmenge als Ableitung einer abzählbaren Menge darstellbar ist; mit ihm hat man Funktionen von

vorgeschriebenem Verhalten in einfachster Weise zu bilden vermocht. Das zweite betrifft die Konvergenzmenge eines eindeutigen analytischen Ausdrucks. Hier ist einerseits ein Theorem von Osgood zu erwähnen, andrerseits ein Satz von Borel. Das Verdienst Borels besteht besonders darin, daß er uns die geradezu erstaunliche Fülle der gestaltlichen Möglichkeiten erschlossen hat, die sich als Konvergenzmenge eines analytischen Ausdrucks einstellen können, und die Verallgemeinerungsfähigkeit einer Reihe wichtiger Eigenschaften nachwies, die wir gemeinhin als ausschließlichen Besitz der analytischen Funktionen zu betrachten pflegen (§ 17).

Über das Verhalten einer eindeutigen analytischen Funktion in ihren singulären Punkten liegen neuere Resultate vor, die den Einfluß der gestaltlichen Struktur der singulären Punkte auf dies Verhalten dartun. Wir verdanken sie P. Painlevé und seinen Schülern (§ 18).

§ 1. *Anordnungssätze.* In die Grundlagen der Geometrie gehen Begriffe von zweierlei Art ein, *Anordnungsbegriffe* und *Größenbegriffe.*[1]) Die Anordnungsbegriffe sind diejenigen, die projektiv invariant sind, während in den Größenbegriffen die Kongruenzaxiome zum Ausdruck kommen.

Der grundlegende Anordnungssatz lautet:

I. *Jedes Dreieck und jedes Polygon teilt die Ebene in der Weise in ein Äußeres $\mathfrak{A}$ und ein Inneres $\mathfrak{J}$, daß zwei Punkte von $\mathfrak{J}$ oder zwei Punkte von $\mathfrak{A}$ durch einen Weg, d. h. einen Streckenzug endlicher Streckenzahl verbindbar sind, der ganz zu $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$ gehört, während ein Weg, der einen Punkt von $\mathfrak{J}$ mit einem Punkt von $\mathfrak{A}$ verbindet, mindestens einen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthält.*

Dieser Satz ist gemäß M. Pasch für das Dreieck axiomatisch zu fordern und kann daraus für jedes Polygon endlicher Seitenzahl gefolgert werden.[2])

Ist $\mathfrak{P}$ das Polygon, und bedeutet $\mathfrak{E}$ die Ebene[3]), so setze ich

$$(1) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{J}(\mathfrak{P}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{P}),$$

$$(2) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} + \mathfrak{J}(\mathfrak{P}),$$

so daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{P})$ die Polygon*fläche* darstellt.

1) Die Verknüpfungsbegriffe (vgl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1903, S. 2) können hier außer Betracht bleiben.

2) Vgl. M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 20, sowie D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl. (1903) S. 4. Einen Beweis des Polygonsatzes gibt auf Grund des Axioms für das Dreieck O. Veblen Trans. Am. Math. Soc. 5 (1904) p. 365.

3) Alle im folgenden zu betrachtenden abgeschlossenen Punktmengen sind im *Endlichen* enthalten und werden also als *geschränkt* (borné) vorausgesetzt. Man kann daher in Gl. (1) unter $\mathfrak{E}$ auch alle Punkte eines die Menge einschließenden

Es erscheint zweckmäßig, *beide* Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ als *einfach zusammenhängend* zu bezeichnen. Diese Bezeichnung entspricht dem Umstand, daß die Gebiete auf der Kugel gleichberechtigt sind.

Spezielle Anordnungssätze, deren wir bedürfen, sind die folgenden:[1])

1. Ein geschlossener Streckenzug $\mathfrak{p}$ endlicher Streckenzahl, der sich beliebig oft kreuzen kann, teilt die Ebene in eine endliche Zahl polygonal berandeter *Gebiete*, nämlich in *ein* äußeres unbegrenztes Gebiet A und eine *endliche* Zahl begrenzter Gebiete J_ν, die ich im Gegensatz zu A als innere Gebiete bezeichne. Jedes Gebiet wird von einem Streckenzug begrenzt, der seine *volle Grenze* bildet. Bei jedem *inneren* Gebiet gehört zur vollen Grenze auch ein gewöhnliches *äußeres Randpolygon*. Dieses Randpolygon und die volle Grenze können aber voneinander verschieden sein (Fig. 1).[2]) In diesem Fall sage ich, daß die Grenze des Gebiets *Doppelpunkte* oder *vielfache* Punkte hat. Die volle Grenze besteht dann aus dem äußeren Randpolygon und einer endlichen Zahl weiterer Polygone, die höchstens je einen Punkt mit dem Randpolygon gemein haben und sonst in seinem Innern enthalten sind.[3]) (*Innere* Randpolygone).

Beim äußeren Gebiet besteht die volle Grenze in allen Fällen aus einem oder mehreren gewöhnlichen Polygonen, während ein sie umschließendes äußeres Randpolygon nicht zu existieren braucht.[4]) (Fig. 2.)[5])

2. Wenn zwei gewöhnliche Polygone $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Punkte gemein haben, so kann unter den durch sie bestimmten Gebieten nur dann ein inneres Gebiet $\mathfrak{J}$ mit Doppelpunkt vorhanden sein, wenn kein Punkt des einen Polygons außerhalb des andern liegt. Dies folgt daraus, daß ein solches Gebiet $\mathfrak{J}$ notwendig ein äußeres Randpolygon und mindestens

---

Quadrates oder Kreises verstehen. Übrigens liegt durchgehends die Annahme einer einfachen Überdeckung der Ebene zugrunde. Es hat jedoch keine Schwierigkeit, zu mehrfach bedeckten Gebieten überzugehen; man vgl. z. B. meine einschlägigen Arbeiten, Math. Ann. 42 (1893) S. 377 u. 44 (1894) S. 105.

1) Ein Teil dieser Sätze bildet die geometrische Grundlage für den Beweis der Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes, deshalb habe ich sie ausführlicher dargestellt und die Beweise, soweit erforderlich, angedeutet.

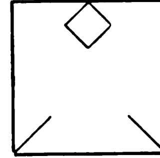
2) Die inneren Stacheln des Quadrats kommen hier in § 1 nicht in Betracht. Sieht man von ihnen ab, so bildet für dasjenige Gebiet, dem sie angehören, das große Quadrat die äußere Randkurve, das große und das kleine die volle Grenze.

3) Es ist allerdings möglich, daß sich an eine Ecke des inneren Polygons in Fig. 1 noch ein *ganz* im Innern liegendes Polygon anschließt. Dies kommt aber hier nicht weiter in Betracht.

4) Die Übereinstimmung mit den Eigenschaften des inneren Gebiets J_ν ergibt sich, wenn man die Ebene so eineindeutig abbildet, daß ein Punkt des Gebietes J_ν in den unendlich fernen Punkt übergeht.

5) Die punktierten Linien dieser Figur kommen hier nicht in Betracht.

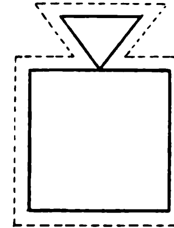
ein inneres Grenzpolygon haben muß, und daß beide nur einen Punkt gemein haben; dies ist aber, da $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Polygone sind, nur so möglich, daß das eine $\mathfrak{P}_1$ und das andere $\mathfrak{P}_2$ ist. (Fig. 1.) Analog muß, wenn die Grenze des äußeren Gebiets aus mehr als einem gewöhnlichen Polygon bestehen soll, das eine Polygon außerhalb des andern liegen. (Fig. 2.)


Fig. 1.

Sind daher $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei gewöhnliche Polygone, die sich wirklich *durchdringen*, so ist jedes durch sie bestimmte Teilgebiet von einem *gewöhnlichen* Polygon begrenzt, insbesondere existiert auch ein gewöhnliches äußeres Randpolygon $\mathfrak{P}_{12}$ als Grenze des äußeren Gebietes $\mathfrak{A}_{12}$. Diejenigen Punkte von $\mathfrak{P}_{12}$, die nicht Kreuzungspunkte von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind, gehören entweder zu $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(\mathfrak{P}_1)$ oder zu $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}(\mathfrak{P}_2)$, je nachdem sie Punkte von $\mathfrak{P}_2$ oder $\mathfrak{P}_1$ sind.[1])

3. Die Durchdringungsfigur zweier Polygone $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ kann die Ebene in mehrere Teilgebiete zerlegen. Wir können vier Arten unterscheiden, je nachdem ein solches Gebiet zu

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_1, \mathfrak{J}_2, \quad \mathfrak{A}_2, \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$$


Fig. 2.

gehört. Für sie besteht folgender Satz: Die Zahl der Gebiete, die zu $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gehören, ist gleich der Zahl derer von $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, und ebenso sind Gebiete, die zu $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gehören, in gleicher Zahl vorhanden, wie die zu $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{A}_1$ gehörigen.[2]) Man beweist ihn z. B., indem man auf jedem Polygon eine Umlaufsrichtung annimmt, und beachtet, daß für die Kreuzungspunkte, die eine jede Gattung charakterisieren, die Eigenschaften rechts, links, vorwärts, rückwärts in einheitlicher Weise in Betracht kommen.

4. Eine endliche Menge von Polygonen $\{\mathfrak{P}_\nu\}$, von denen je zwei außerhalb voneinander liegen, läßt sich stets in eine solche cyklische Anordnung bringen, daß je zwei konsekutive Polygone durch Streckenzüge verbindbar sind, die einander nicht kreuzen.

Um dies zu bewirken, ziehe man von einem Punkt m außerhalb aller Polygone einen Weg $\mathfrak{l}_\nu$ zu je einem Punkt p_ν von $\mathfrak{P}_\nu$. Diese Wege können einander kreuzen. Man kann aber den Weg $\mathfrak{l}_2$ so abändern, daß er $\mathfrak{l}_1$ nicht kreuzt, dann den Weg $\mathfrak{l}_3$ so, daß er $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ nicht

1) Es wird hier und im folgenden stets angenommen, daß die Polygone keinen Streckenzug gemein haben.

2) Vgl. Math. Ann. 59 (1904) S. 150. Es ist mir nicht möglich, ein anderes Zitat für diesen Satz beizubringen.

kreuzt, und kann das analoge für jeden Weg $\mathfrak{l}_\nu$ bewirken. Damit stellt sich die verlangte cyklische Anordnung von selbst ein.

Sind

$$\{P_\nu\} = P_1,\ P_2,\ \ldots.\ P_\nu,\ \ldots\ P_N$$

die cyklisch geordneten Polygone, so sei noch $\mathfrak{w}_\nu$ der von P_ν zu $P_{\nu+1}$ führende Weg. Setzt man dann (vgl. S. 11 Anm. 2)

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{M}\{\mathfrak{F}(P_\nu),\ \mathfrak{w}_\nu\},$$

so daß zu $\mathfrak{T}$ alle Wege $\mathfrak{w}_\nu$ und alle Polygonflächen $\mathfrak{F}(P_\nu)$ gehören, so bestimmt die ringartige Menge $\mathfrak{T}$ in der Ebene gemäß der Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{J} + \mathfrak{A}$$

zwei Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, die von je einem einfachen Polygon begrenzt sind, und es gehört der Punkt m zum Gebiet $\mathfrak{J}$.

5. Sei a ein Punkt außerhalb, und m_1 und m_2 zwei Punkte innerhalb eines Polygons $\mathfrak{P}$, und seien $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ zwei Wege von a zu m_1 und m_2, die sich nicht kreuzen. Dann kann man von a aus zwei Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ ziehen, die in das Gebiet $\mathfrak{J}(\mathfrak{P})$ eindringen, im gleichen Punkt p' innerhalb $\mathfrak{P}$ endigen, $\mathfrak{P}$ je einmal schneiden, die Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ nicht kreuzen und überdies so liegen, daß die Paare $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ einander trennen. Sie kreuzen das Polygon $\mathfrak{P}$ auf zwei wohl bestimmten Streckenzügen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$, deren Endpunkte zu $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ gehören, während sie sonst keinen weiteren Punkt von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ enthalten. Diese Streckenzüge $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ bilden mit den bezüglichen Teilen von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ zwei Polygone; nämlich ein Polygon $\mathfrak{P}'$, das die Punkte m_1 und m_2 ausschließt, und ein Polygon $\mathfrak{P}''$, das sie einschließt.

Die so definierten Polygone $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ behalten offenbar ihre Eigenschaft, wenn man die Streckenzüge $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, ohne daß sie sich oder $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ kreuzen, beliebig über m_1 und m_2 hinaus innerhalb von $\mathfrak{P}$ fortsetzt.

6. Hierauf läßt sich eine *Verallgemeinerung des Polygonbegriffs* gründen. Zunächst soll ein Streckenzug als *einfach* bezeichnet werden, wenn er sich nirgends selber kreuzt, wenn also zwei nicht konsekutive Seiten keinen gemeinsamen Punkt enthalten. Wir lassen jetzt auch zu, daß er aus *unendlich vielen* Strecken besteht. In diesem Fall sollen aber deren Endpunkte nur *einen einzigen* Grenzpunkt besitzen, der zugleich der eine Endpunkt des Streckenzuges ist.

Wir betrachten nun zwei einfache Streckenzüge, die von demselben Punkt a ausgehen, *unendlich viele* Strecken enthalten und ohne sich zu kreuzen in demselben Punkt m innerhalb eines um m gelegten

Quadrats $\mathfrak{q}$ der Seite ε endigen[1]), dessen Seiten zwei festen Richtungen parallel sind. Seien $\mathfrak{a} = aa_1 \ldots a_\nu \ldots m$ und $\mathfrak{b} = ab_1 \ldots b_\nu \ldots m$ die beiden Streckenzüge, und P und Q die eben mit $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ bezeichneten Polygone, so werden, wenn ε eine gegen Null konvergierende Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ durchläuft, die Polygone P_ν und Q_ν immer mehr Strecken von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in sich aufnehmen, und zwar ist $J_\nu = \mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)$ Teilmenge von $J_{\nu+1} = \mathfrak{J}(\mathfrak{P}_{\nu+1})$, und ebenso $A_\nu = \mathfrak{A}(Q_\nu)$ Teilmenge von $A_{\nu+1} = \mathfrak{A}(Q_{\nu+1})$. Man betrachte nun die beiden Punktmengen, die durch

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{J_\nu\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{M}\{A_\nu\}$$

darstellbar sind (S. 11), so wird jeder Punkt der Ebene, der nicht zu $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ gehört, für geeignetes ε_ν notwendig einmal außerhalb des Quadrates $\mathfrak{q}_\nu$ liegen. Er braucht dann allerdings noch nicht zu J_ν oder A_ν zu gehören. Tut er dies nicht, so gehört er zum Innern eines Polygons P_ν, dessen Umfang teils zu $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ und teils zu $\mathfrak{q}_\nu$ gehört. Es gibt dann sicher für ein geeignetes ϱ auch ein Quadrat $\mathfrak{q}_{\nu+\varrho}$, das alle diese Polygone ausschließt, und daraus folgert man leicht, daß der bezügliche Punkt zu $J_{\nu+\varrho}$ oder $A_{\nu+\varrho}$ gehört (Fig. 3).[2]) Man hat daher

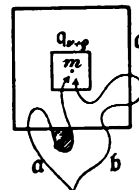


Fig. 3.

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J} + \mathfrak{A} + \mathfrak{L},$$

wo $\mathfrak{L}$ die Gesamtheit der Punkte von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ darstellt. Ferner sind auch je zwei Punkte von $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{A}$ durch einen Weg endlicher Streckenzahl verbindbar, da es stets ein solches ν gibt, daß beide Punkte demselben J_ν oder A_ν angehören. Endlich muß jeder Weg, der einen Punkt von $\mathfrak{J}$ mit einem Punkt von $\mathfrak{A}$ verbindet, mindestens einen Punkt von $\mathfrak{L}$ enthalten. Also folgt:

II. *Für die durch den Streckenzug* $\mathfrak{L}$ *bewirkte Teilung der Ebene besteht volle Analogie mit einem gewöhnlichen Polygon; ich bezeichne deshalb auch* $\mathfrak{L}$ *als Polygon.*

Man sieht leicht, daß der Polygonbegriff und seine grundlegende Anordnungseigenschaft auch auf solche Gebiete übertragen werden kann, deren Grenze aus einer *endlichen* Zahl solcher Streckenzüge besteht,

---

1) Ich benutze hier bereits gewisse erst im nächsten Paragraphen einzuführenden Begriffe des Maßes. Aber es handelt sich in diesem Kapitel in erster Linie um eine vollständige Zusammenstellung von Tatsachen, und nicht so sehr um ihre methodische Reihenfolge.

2) Die Figur ist nur schematisch gezeichnet. Das bezügliche Teilpolygon ist schraffiert.

Der Beweisgrund des obigen Schlusses beruht darauf, daß die Zahl der in Betracht kommenden Polygone P_ν endlich ist. Einen andern Beweis enthalten meine Beiträge, Math. Ann. 58 (1904) S. 200.

die in ihren Endpunkten einen Grenzpunkt unendlich vieler Strecken besitzen. Die Übertragung ist selbst auf unendlich viele solche Streckenzüge möglich und kann sogar bis zu transfiniter Ordnung fortgesetzt werden.

§ 2. *Größenbegriffe und Größensätze.* Die für uns in Frage kommenden grundlegenden Größenbegriffe sind *Abstand* und *Flächeninhalt*. Ihre arithmetische Definition hängt davon ab, mit welcher Maßbestimmung man operiert.[1]) Welche dies auch sei, so bestehen für Abstand und Fläche gewisse Grundeigenschaften, die ich hier kurz folgen lasse.

Der Abstand eines Punktes m von einem Punkte t einer *geschränkten*[2]) *abgeschlossenen* Menge $T = \{t\}$ ist eine in T *stetige* Funktion und hat daher alle Eigenschaften, die einer stetigen Funktion in Bezug auf eine geschränkte abgeschlossene Menge zukommen; er hat insbesondere ein Minimum, das *Abstand des Punktes m von T* heißt, und das für mindestens einen Punkt von T realisiert ist.[3])

Sind ferner $T' = \{t'\}$ und $T'' = \{t''\}$ zwei geschränkte abgeschlossene Mengen, so gibt es mindestens ein Wertepaar t' und t'', dessen Abstand ein Minimum für T' und T'' liefert; dieses Minimum heißt *Abstand von T' und T''*.[4])

Ich benutze folgende Bezeichnungen: 1) Unter

$$(1)\ \varrho(t', t'') = \overline{t' t''};\quad (2)\ \varrho(m, T);\quad (3)\ \varrho(T', T'')$$

soll erstens der Abstand von t' und t'', zweitens der Abstand des Punktes m von T, und drittens der Abstand der Mengen T' und T'' verstanden werden. 2) Sind t_1 und t_2 zwei Punkte von $T = \{t\}$, so soll das Maximum von $\varrho(t_1, t_2)$ die *größte Breite* von T oder kürzer *Breite* von T heißen und durch

$$\mathfrak{B}(T) = \varrho_{\max}(t_1, t_2)$$

bezeichnet werden.

Weitere für die Theorie der Punktmengen wichtige Größensätze betreffen den *Flächeninhalt* polygonaler Gebiete. Sie lauten:

---

1) Der Abstand zweier Punkte möge der Einfachkeit halber im euklidischen Sinn verstanden werden. C. Jordan setzt dafür die Summe der absoluten Beträge der Koordinatendifferenzen, also den Ausdruck $|x' - x| + |y' - y|$; cours d'analyse, Paris 1893, Bd. 1, S. 18. Einen noch allgemeineren Abstandsbegriff benutzt H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, S. 1.

2) D. h. in einem endlichen Gebiet gelegen (borné).

3) Vgl. Bericht I. S. 115. Diese Sätze wurden zuerst von C. Jordan gegeben, vgl. cours d'analyse I, S. 46.

4) Man kann diesen Abstand auch anders definieren, und es ist dies für gewisse Zwecke auch geschehen (vgl. S. 109 Anm. 4).

1. Jedem gewöhnlichen Polygon kann man in der Art eine *Flächenzahl* beilegen, daß, wenn die Polygonfläche in eine endliche Zahl von polygonalen Teilen zerfällt, kurz gesprochen, sein Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte seiner Teile ist.

2. Man kann jeden geschränkten Bereich so in eine endliche Zahl von Teilen zerlegen, daß die Flächenzahl eines jeden unter einer vorgeschriebenen Größe σ bleibt.

3. Eine Folge von Quadraten $\{\mathfrak{q}_\nu\}$ bestimmt einen und nur einen allen Gebieten $\mathfrak{J}(\mathfrak{q}_\nu)$ gemeinsamen Punkt q, falls $\mathfrak{J}(\mathfrak{q}_{\nu+1})$ Teil von $\mathfrak{J}(\mathfrak{q}_\nu)$ ist, und die Seite von $\mathfrak{q}_\nu$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert.[1])

Dem zuletzt genannten Satz kommt eine Bedeutung prinzipieller Art zu. Auf ihm beruht nämlich der Bolzano-Weierstraßsche Satz, daß für jede unendliche Menge von Punkten mindestens ein Grenzpunkt existiert (vgl. auch Kap. VII, § 5). Er ist unmittelbar auf Gebiete $\{\mathfrak{G}_\nu\}$ anderer Art übertragbar[2]), falls das Gebiet $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ Teilgebiet von $\mathfrak{G}_\nu$ ist. Eine weitere einfache Verallgemeinerung ist die folgende. Seien $P_1, P_2, \ldots P_\nu \ldots$ *irgend* welche meßbare ebene Punktmengen, so daß $P_{\nu+1}$ wieder Teilmenge von P_ν ist. Wenn dann der Inhalt einer jeden eine Größe $g > 0$ übertrifft, so ist der Inhalt der Menge $\mathfrak{D}(P_\nu)$, die allen Mengen P_ν gemeinsam ist, mindestens gleich g.[3]) Ein weiteres Resultat besagt, daß in der Menge $\mathfrak{D}\{P_\nu\}$ *abgeschlossene* Teilmengen existieren, deren Inhalt beliebig wenig kleiner ist, als g.[4])

1) Dieser Satz ist für das lineare Gebiet gleichwertig mit Dedekinds Definition der Irrationalzahl.

2) Die allgemeine Definition des Gebiets enthält § 5. Den Satz erwähnt auch P. Painlevé; vgl. eine Bemerkung von L. Zoretti im Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 8. Speziellere Sätze gibt H. W. Young; Quart. Journ. 37 (1906) S. 545.

3) Der Satz findet sich, wenn auch nicht in dieser präzisen Form, bei Borel, C. R. 137 (1903) S, 966. Er wird von ihm für die Punkte ausgesprochen, die *irgend* welchen unendlich vielen meßbaren Mengen P_ν gemeinsam sind, was freilich nicht zutrifft. Man wähle z. B. einerseits alle $P_{2\nu+1}$ und andererseits alle $P_{2\nu}$ als identisch und sonst beliebig, so brauchen *alle* P_ν keine gemeinsamen Punkte zu haben. Vgl. hierzu auch die allgemeine Bemerkung am Schluß von § 5. Den Satz gibt auch H. W. Young, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 2 (1904) p. 28. Der Inhalt ist hier im Sinn von Kap. III, § 5 gemeint. Der Satz gilt daher auch für den äußeren Inhalt im Peano-Jordanschen Sinn.

Für den inneren Inhalt im Sinne von Peano-Jordan kann der Satz nicht behauptet werden. Der innere Inhalt der Menge $\mathfrak{D}\{P_\nu\}$ kann sogar Null sein. Man wähle z. B. eine abzählbare im Quadrat $\mathfrak{q}$ überall dichte Menge $\{p_\nu\}$ beliebig aus und verstehe unter P_ν die Quadratfläche mit Ausschluß der Punkte $p_1, p_2 \ldots p_\nu$, so ist der innere Inhalt von $\mathfrak{D}\{P_\nu\}$ gleich Null. Vgl. F. Hartogs, Math. Ann. 62 (1906) p. 4.

4) Dies zeigt H. W. Young; vgl. das vorstehende Zitat.

Borel gibt noch folgende weitere Verallgemeinerung: 1. Hat man eine abzählbare Menge von meßbaren Gebieten $\{\mathfrak{J}_\nu\}$, so daß jeder Punkt eines Gebietes $\mathfrak{G}$ innerer Punkt von *unendlich vielen* dieser Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$ ist, so ist $\sum v_\nu$ divergent, wenn v_ν die Flächenzahl von $\mathfrak{J}_\nu$ ist. 2. Sind dagegen unendlich viele meßbare Gebiete $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ so beschaffen, daß $\sum v_\nu$ konvergent ist, und ist dann H diejenige Punktmenge, deren Punkte wiederum unendlich vielen Gebieten $\mathfrak{J}_\nu$ angehören, so kann man, bei gegebenem ε', eine endliche oder abzählbare Menge von Gebieten $\mathfrak{J}'_\nu$ so konstruieren, daß jeder Punkt von H innerer Punkt von mindestens einem von ihnen ist, und daß, wenn v'_ν die Flächenzahl von $\mathfrak{J}'_\nu$ ist, $\sum v'_\nu < \varepsilon$ ist.[1])

§ 3. *Die approximierenden Polygone.* Ein Satz von methodisch prinzipieller Bedeutung ist der folgende:

III. *Zu jeder geschränkten Punktmenge $\mathfrak{T} = \{t\}$ kann man eine polygonale Figur Π bestimmen, die sie in einem gegebenen Abstand ε approximiert.*[2])

Man gelangt zu ihr am einfachsten nach einem von C. Runge erdachten Verfahren.[3]) Man gehe dazu von einer quadratischen Teilung der Ebene mit der Quadratseite $\frac{1}{4}\varepsilon$ aus und bestimme alle Quadrate $\mathfrak{q}$ von der Art, daß sie selbst, nebst den acht umliegenden, von Punkten der Menge $\mathfrak{T}$ frei sind; und zwar soll ein Quadrat $\mathfrak{q}$ *von $\mathfrak{T}$ frei* heißen, falls seine *Fläche* von $\mathfrak{T}$ frei ist, so daß es also *weder im Innern noch auf dem Umfang* einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält. Diese Quadrate $\{\mathfrak{q}\}$ bilden gewisse von einer endlichen Zahl von Polygonen begrenzte Flächenstücke von irgend welchem Zusammenhang, und die sie begrenzenden Polygone stellen die Figur Π dar.

Ich bezeichne als das *Innere* $\mathfrak{J}(\Pi)$ von Π den Teil der Ebene, der die Menge $\mathfrak{T}$ enthält; die inneren Punkte der Quadrate $\{\mathfrak{q}\}$ gehören daher sämtlich zu den Gebieten von $\mathfrak{A}(\Pi)$.[4])

Diese Polygonfiguren bilden die methodische Grundlage der meisten folgenden Entwicklungen; ich leite deshalb einige elementare Eigenschaften von ihnen ab. Zunächst ist klar, daß die Figur Π aus einer endlichen Zahl von Polygonen besteht. Ein Polygon, das nicht inner-

1) Journ. de math. (5) 9 (1903) S. 360. Borel spricht die Sätze dort für den R_n aus.

2) $\mathfrak{T}$ braucht nicht abgeschlossen zu sein.

3) Acta math. 6 (1895) S. 230.

4) Bei einem Kreise oder einer Ellipse ist also das Gebiet $\mathfrak{J}(\Pi)$ ein Ringgebiet, während $\mathfrak{A}(\Pi)$ in zwei Gebiete zerfällt.

halb eines andern liegt, soll *äußeres Randpolygon* heißen, die übrigen *innere Randpolygone.*[1])

Es soll nun jedem Punkt p von Π ein gewisser Punkt von $\mathfrak{T}$ zugeordnet werden; dabei beschränke ich mich auf *abgeschlossene* Mengen $\mathfrak{T}$.

Sei P eines der Polygone von Π, das sich also aus lauter Seiten der Quadrate $\mathfrak{q}$ aufbaut, und sei (Fig. 4) p ein Punkt von P, der der Seite qq' eines solchen Quadrates $\mathfrak{q}$ angehört. Da $\mathfrak{J}(\mathfrak{q})$ selbst zu den Gebieten von $\mathfrak{A}(\Pi)$ gehört, sind gemäß der Definition von Π die Quadrate 1 2 3 4 5 unserer quadratischen Teilung ebenfalls von $\mathfrak{T}$ frei. Da aber das Quadrat 3 zu $\mathfrak{J}(\Pi)$ gehört, muß mindestens eine der Quadratflächen 6 7 8 einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthalten; denn sonst wären alle das Quadrat 3 umgebenden Quadrate von $\mathfrak{T}$ frei und es würde auch 3 zu $\mathfrak{J}(\Pi)$ gehören. Man hat daher, wenn p irgend ein Punkt von qq' ist, und t ein solcher Punkt eines der Quadrate 6, 7, 8, der am *nächsten* zu p liegt,

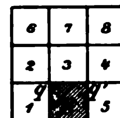


Fig. 4.

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varrho(p,\, t) = \varrho(p,\, \mathfrak{T}) < \tfrac{3}{2}\varepsilon.$$

Der so zu p zugeordnete Punkt[2]) t hat folgende Eigenschaften: 1. Er entspricht dem Minimum von $\varrho(p,\, \mathfrak{T})$; 2. er genügt der vorstehenden Relation (1); 3. die ganze Strecke pt gehört zu $\mathfrak{J}(\Pi)$. Dies ist eine unmittelbare Folge davon, daß die Quadrate 2, 3, 4 von $\mathfrak{T}$ frei sind. 4. Man kann daher jeden Punkt m, der zu $\mathfrak{A}(\Pi)$ gehört, mit t durch einen Weg *endlicher* Seitenzahl verbinden.

Mit Rücksicht auf die Relation (1) sage ich, daß *die polygonale Figur Π die Menge $\mathfrak{T}$ im mittleren Abstand ε* oder kürzer *im Abstand ε approximiert.*

Ferner ist noch klar, daß für jeden Punkt m von $\mathfrak{A}(\Pi)$ die Relation

$$(2) \qquad \varrho(m,\, \mathfrak{T}) > \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

besteht, und daß jeder Punkt m, für den

$$(3) \qquad \varrho(m,\, \mathfrak{T}) > \tfrac{3}{2}\varepsilon$$

ist, zu $\mathfrak{A}(\Pi)$ gehört.

Die approximierenden Polygonfiguren werden wir stets in der Weise benutzen, daß wir eine Folge von Figuren $\{\Pi_\nu\}$ betrachten, die

1) Man könnte die Bezeichnung auch davon abhängen lassen, wie die Polygone zu $\mathfrak{J}(\Pi)$ und $\mathfrak{A}(\Pi)$ liegen. Dies ist methodisch richtiger, aber hier entbehrlich.

2) Gibt es mehrere Punkte t, für die $\varrho(p,\, t)$ das Minimum darstellt, so wählt man einen von ihnen beliebig aus.

einer Folge abnehmender Zahlen $\{\varepsilon_\nu\}$ *mit* $\lim \varepsilon_\nu = 0$ entsprechen. Um die Anschauung zu unterstützen, wählt man sie zweckmäßig in der Weise, daß man von einer *festen* quadratischen Teilung der Ebene ausgeht und die zu kleineren Werten von ε gehörige Quadratteilung so entstehen läßt, daß man jedes vorhandene Quadrat immer wieder in kongruente Teilquadrate zerlegt.

Die Fülle gestaltlicher Möglichkeiten der Figur Π ist eine außerordentlich große. Sie erhellt aus folgenden Beispielen, bei denen übrigens der Begriff der approximierenden Figur etwas allgemeiner gefaßt worden ist.[1]

1. Auf der Strecke g sind Lote errichtet in Punkten p_ν, die gegen einen einzigen Grenzpunkt p_ω konvergieren; diese Lote *ohne* die Strecke g bilden die Menge $\mathfrak{T}$. Bei geeigneter Größe von ε besteht die approximierende Polygonfigur zunächst aus *einem einzigen* Polygon, das alle Lote einschließt; mit abnehmendem ε trennen sich von ihm schmale Rechtecke in immer wachsender Zahl ab. Jedes so entstehende Rechteck wird sich für ein gewisses ε nicht weiter spalten.

2. Die Lote mögen jetzt in den Punkten $\{p\}$ einer nirgends dichten perfekten Menge errichtet sein. Auch hier wird bei geeignetem ε die approximierende Figur zunächst aus einem einzigen Polygon bestehen. Dies spaltet sich für ein gewisses ε_1 in zwei andere Polygone; jedes von ihnen für ein gewisses ε_2 wieder in zwei andere usw. Es gibt kein Polygon, das sich bei abnehmendem ε nicht weiter spaltet.

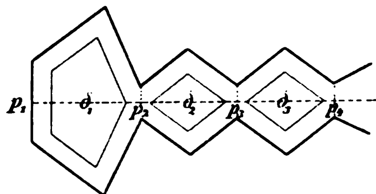


Fig. 5.

3. In den Punkten $\{p_\nu\}$ des ersten Beispiels errichte man Lote der Länge λ_ν, die gegen Null konvergieren, und verbinde die Endpunkte von je zwei benachbarten Loten durch gleichschenklige Dreiecke, deren Höhen h_ν ebenfalls gegen Null konvergieren. Diese Figur spiegele man gegen die Gerade g, so bestimmen die äußeren Seiten aller Dreiecke ein einfaches Polygon P (Fig. 5).[2]

1) Die approximierenden Polygone bilden einen sehr zweckmäßigen Ersatz für die aus Rechtecken aufgebauten polygonalen Bereiche, mit denen ich im Bericht I (S. 81) die ebenen Mengen approximierte. Man kann das dortige Verfahren übrigens in der Weise vereinfachen, daß man das erste Rechteck mit demjenigen Punkt m als Ausgangspunkt bildet, für den $\varrho(m, \mathfrak{T})$ ein Maximum ist, und in dieser Weise auch die weiteren Punkte auswählt. Eine, hiermit im wesentlichen übereinstimmende Art, die Menge $\mathfrak{T}$ zu approximieren, findet sich bei L. Zoretti C. R. 138 (1904) p. 674 u. Journ. de Mat. (6) 1 (1905) p. 1, nur daß dort statt der Rechtecke Kreise benutzt werden.

2) In Fig. 5 ist es stark gezeichnet; die Grundlinien der Dreiecke fehlen.

Man ziehe nun in seinem Innern Parallelen zu seinen Seiten im Abstand ε, so wird die von ihnen gebildete approximierende Figur Π im allgemeinen in mehrere Polygone P_i zerfallen. Die Zahl dieser Polygone kann sogar mit abnehmendem ε über alle Grenzen wachsen. Um dies zu erreichen, wähle man die Intervalle $\delta_\nu = p_\nu p_{\nu+1}$ so, daß

$$\delta_2 = \delta_3, \quad \delta_4 = \delta_5 = \delta_6, \quad \delta_7 = \delta_8 = \delta_9 = \delta_{10}, \ldots$$

ist, und überdies $\Sigma\delta_\nu$ konvergiert. Ebenso wähle man

$$\lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10}, \ldots,$$
$$h_2 = h_3, \quad h_4 = h_5 = h_6, \quad h_7 = h_8 = h_9 = h_{10}, \ldots,$$

so muß in der Figur Π bei geeigneter Wahl von δ_μ, λ_μ, h_μ und von ε ein Teilpolygon P_i auftreten, das zwischen zwei vorgegebenen benachbarten Punkten der Folge $\{p_\nu\}$ liegt. Ist σ die Länge des zugehörigen Intervalles, und gibt es ϱ Intervalle δ_ν von der gleichen Länge σ, so gibt es auch mindestens $\varrho - 1$ gleiche Polygone P_i, die zu Π gehören. Die Zahl der Polygone, in die Π zerfällt, wächst also für limes $\varepsilon = 0$ über alle Grenzen.

4. Wird in der S. 99 stehenden Figur 1 das Gebiet, zu dessen Grenze die beiden Stacheln gehören, von *innen* durch Polygone P_ν approximiert, so konvergieren sie gegen die beiden Quadrate und die beiden Stacheln. Die Gebiete $\mathfrak{J}(P_\nu)$ konvergieren daher gegen ein zusammenhängendes Gebiet, dagegen konvergieren die äußeren Gebiete $\mathfrak{A}(P_\nu)$ gegen zwei getrennte Gebiete, nämlich gegen das Äußere des großen und das Innere des kleinen Quadrats. Ähnlich ist es bei Figur 2 (S. 99) für die von außen approximierenden Polygone.

§ 4. *Die abgeschlossenen Kontinua.* Sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ zwei abgeschlossene Mengen, deren Abstand $\varrho(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') = \sigma > 0$ ist, und legt man um jede von ihnen die im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{3}\sigma$ approximierende Figur Π resp. Π', so folgert man aus den Grundeigenschaften dieser Figuren leicht, daß erstens Π und Π' keinen Punkt gemein haben, und daß zweitens auch die Gebiete $\mathfrak{J}(\Pi)$ und $\mathfrak{J}(\Pi')$, die die Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ einschließen, *außerhalb* von einander liegen.[1]) Wir nennen daher die Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ *getrennt.* Ist dagegen $\sigma = 0$, so sagen wir, daß $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{T}'$ *zusammenhängt.*

---

1) Ist m irgend ein Punkt von $\mathfrak{J}(\Pi)$, und m' irgend ein Punkt von $\mathfrak{J}(\Pi')$, so hat man

$$\varrho(m, \mathfrak{T}') > \varrho(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') - \varrho(m, \mathfrak{T}) > \tfrac{2}{3}\varepsilon.$$

Daher gehört *jeder* Punkt von $\mathfrak{J}(\Pi)$ zu $\mathfrak{A}(\Pi')$ und umgekehrt.

Hierauf beruht die allgemeine Definition des *Zusammenhangs* einer abgeschlossenen Menge. Sie lautet:

IV. *Eine abgeschlossene Menge heißt dann und nur dann zusammenhängend, falls sie nicht in zwei Teilmengen zerlegbar ist, deren jede abgeschlossen ist.*

Die Berechtigung dieser Definition ist im vorstehenden enthalten. Da jede abgeschlossene Menge in bekannter Weise in zwei Summanden R und S zerlegbar ist (Kap. III, § 1), folgert man noch, daß eine zusammenhängende abgeschlossene Menge notwendig *perfekt* ist.

Eine *allgemeine* gestaltliche Einteilung aller abgeschlossenen Mengen werde ich alsbald vornehmen (§ 14). Hier führe ich zunächst folgende Bezeichnungen ein.[1]

1. Eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{T}$, die keine zusammenhängende Teilmenge besitzt, soll *durchweg zusammenhanglos* oder kurz *zusammenhanglos* oder auch *punkthaft* heißen. Das einfachste Beispiel bilden die linearen perfekten nirgends dichten Mengen. 2. Eine abgeschlossene *zusammenhängende* Menge soll als *abgeschlossenes Kontinuum* bezeichnet werden. Sie wird immer als *geschränkt* angenommen. 3. Wenn einem solchen Kontinuum keinerlei Gebietsteil angehört, soll es *linienhaft* oder auch *kurvenhaft*[2]) heißen. Ein Beispiel eines allgemeineren linienhaften Kontinuums bildet eine Einheitsstrecke mit den in den rationalen Punkten p/q errichteten Loten der Länge $1/q$. 4. Ein abgeschlossenes Kontinuum, das nicht linienhaft ist, möge *flächenhaft* heißen. Zwei Kreisflächen, die sich von außen berühren, zwei Quadratflächen, die außerhalb von einander liegen und durch einen Streckenzug verbunden sind, eine Quadratfläche, auf deren Seiten man nach außen die eben genannten Lote der Länge $1/q$ errichtet, bilden Beispiele allgemeinster flächenhafter Kontinua. 5. Ein abgeschlossenes Kontinuum, das keine linienhaften Teilmengen besitzt, soll als *Fläche* bezeichnet werden, ins-

1) Definitionen dieser Art gibt auch P. Painlevé, Ann. Fac. Toul. **2** (1884) S. 4, sie enthalten aber Definitionsmomente, die sich durch die spätere Entwicklung als irrig herausgestellt haben. Er legt nämlich dem kurvenhaften Kontinuum den Flächeninhalt Null bei; vgl. dagegen Kap. VI § 17.

L. Zoretti bezeichnet *jedes* linienhafte abgeschlossene Kontinuum als ligne Cantorienne oder kürzer als ligne, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 8. Endlich erwähne ich, daß H. W. Young folgende Definition einer Kurve aufstellt. Eine Kurve ist eine nirgends dichte ebene Punktmenge, so daß, wie man auch Dreiecke um ihre Punkte beschreiben mag, die sämtlichen Dreiecke ein einfach zusammenhängendes Gebiet bilden. Er fügt ausdrücklich hinzu, daß er für diesen Kurvenbegriff die Abgeschlossenheit nicht voraussetzt, und sieht darin einen Vorteil seiner Formulierung. Quart. Journ. 37 (1906) S. 4. Vgl. auch S. 29, wo die Definition etwas modifiziert wird.

2) Dies bedeutet nur den Gegensatz zu flächenhaft.

besondere als *einfaches Flächenstück* oder *einfache Fläche*, wenn es ein mit seiner vollen Grenze versehenes *Gebiet* (§ 6) ist. Zwei sich von außen berührende Kreisflächen bilden also zwar eine Fläche, aber kein einfaches Flächenstück. Das einfache Flächenstück braucht übrigens nicht einfach zusammenhängend im Sinne Riemanns zu sein.[1])

Es ist leicht ersichtlich, daß eine abzählbare Menge zusammenhangloser Mengen keinen zusammenhängenden Bestandteil enthält, und eine abzählbare Menge linienhafter Kontinua keinen flächenhaften.[2])

Über die approximierende Polygonfigur Π eines abgeschlossenen Kontinuums $\mathfrak{T}$ gilt, wie man leicht erkennt, folgendes. Sie kann niemals zwei äußere Randpolygone enthalten, da jedes von ihnen außerhalb des andern liegen müßte. Sie besitzt daher *ein und nur ein* äußeres Randpolygon, analog zu dem, was oben (§ 1) über einen geschlossenen Streckenzug bemerkt wurde. Die Zahl der inneren Randpolygone kann Null sein; sie kann aber mit abnehmendem ε auch über alle Grenzen wachsen. Ein Beispiel liefert das oben in § 3 unter (3) genannte Polygon als Menge $\mathfrak{T}$.

§ 5. *Grenzgebilde unendlich vieler abgeschlossener Mengen.*[3]) Jede Menge $M = \{\mathfrak{T}\}$ unendlich vieler abgeschlossener Mengen $\mathfrak{T}$, die nicht Kontinua zu sein brauchen, bestimmt ein *Grenzgebilde*. Es genügt, daß wir uns auf die Betrachtung solcher Grenzgebilde beschränken, die durch *abzählbare* Mengen $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ bestimmt werden. Für sie ergibt sich unmittelbar folgende Definition:

V. *Jede Folge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ abgeschlossener geschränkter Mengen definiert ein Grenzgebilde $\mathfrak{T}_\omega$, dem jeder Punkt t_ω zugehören soll, der Grenzpunkt unendlich vieler Punkte $\{t_\nu\}$ ist, die auf je einer der Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ beliebig angenommen werden können.*[4])

1) Bei der großen Mannigfaltigkeit der abgeschlossenen Kontinua ist es durchaus nötig, einerseits der allgemeinen Definition des abgeschlossenen Kontinuums seine volle Allgemeinheit zu lassen, andererseits nachträglich die obigen Unterscheidungen einzuführen, zumal wenn man, wie hier, eine gestaltliche Analyse und Einteilung aller Punktmengen zu geben hat. Vgl. auch § 9.

2) Vgl. Osgood, Bull. Am. M. Soc. (2) 5 (1898) S. 82, Zoretti, C. R. 138 (1904) p. 674 u. Journ. de math. (6) 1 (1905) p. 11, sowie Dehn, Math. Ann. 59 (1904) S. 84.

3) Die Beschränkung auf abgeschlossene Mengen ist nicht nötig, aber ausreichend.

4) D. Pompéju hat die Definition in folgende formal abweichende und weniger durchsichtige Form gesetzt. Seien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ irgend zwei abgeschlossene Mengen und sei δ_{12} das Maximum, das der Abstand $\varrho(t_1, \mathfrak{T}_2)$ für die Punkte t_1 haben kann, ebenso δ_{21} das Maximum der Abstände $\varrho(t_2, \mathfrak{T}_1)$ für die Punkte t_2. Dann bezeichnet er eine Menge $\mathfrak{T}_\omega$ als Grenzgebilde einer Folge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$, falls $\delta_{\nu\omega} + \delta_{\omega\nu}$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Dies ist mit der obigen

Aus der Definition der Menge $\mathfrak{T}_\omega$ folgt unmittelbar, daß sie ebenfalls *abgeschlossen* ist. Wird ferner aus $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ eine unendliche Teilmenge $\{\mathfrak{T}_\nu'\}$ ausgewählt, so ist jeder Punkt von $\mathfrak{T}_\omega'$ auch Punkt von $\mathfrak{T}_\omega$, was gleichfalls eine unmittelbare Folge der Definition ist.

Setzt man die Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ insbesondere so voraus, daß in beliebig gegebener Nähe eines Punktes t_ω von $\mathfrak{T}_\omega$ Punkte t_ν für *jedes* $\nu > N$ und geeignetes N liegen (das von t_ω abhängen kann), so beweist man leicht folgende Sätze:

1. Sind alle $\mathfrak{T}_\nu$ Kontinua, so ist auch die Menge $\mathfrak{T}_\omega$, falls sie nicht etwa aus einem einzigen Punkte besteht, ein Kontinuum.[1])

2. Ist für jedes ν die Breite $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu) > e$, (§ 2), so hat man $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\omega) \geq e$. Dies ergibt sich unmittelbar, indem man die Grenzpunkte t_ω und t' derjenigen Punkte $\{t_\nu\}$ und $\{t_\nu'\}$ ins Auge faßt, für die $\varrho(t_\nu, t_\nu') = \mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu)$ ist.

3. Ist $\mathfrak{T}_{\nu+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{T}_\nu$, und konvergiert die Breite $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null, so ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\omega) = 0$, es besteht also $\mathfrak{T}_\omega$ aus einem einzigen Punkt.[2])

Im allgemeinen treten bei den einzelnen Problemen nur Mengen auf, die den eben genannten Bedingungen genügen. Werden jedoch die Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ diesen Bedingungen nicht unterworfen, so trifft der erste der vorstehenden Sätze nicht mehr zu. Man kann offenbar Kontinua $\mathfrak{T}_\nu$ in abzählbarer oder nicht abzählbarer Menge so annehmen, daß das Grenzgebilde in beliebig viele Bestandteile zerfällt; um solche Mengen zu erhalten, braucht man nur zwei *getrennte* Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ durch Polygone zu approximieren und hat in deren Gesamtheit bereits ein Beispiel.[3])

§ 6. *Die engeren nicht abgeschlossenen Kontinua* (*Gebiete*). Den Begriff des *zusammenhängenden Gebiets* $\mathfrak{G}$ hat wohl zuerst Weierstraß

Definition durchaus gleichwertig. Denn man folgert leicht, daß wegen $\lim \delta_{\nu\omega} = 0$ jeder Grenzpunkt einer Folge $\{t_\nu\}$ zu $\mathfrak{T}_\omega$ gehört, und daß wegen $\lim \delta_{\omega\nu} = 0$ auch jeder Punkt t_ω Grenzpunkt einer solchen Folge sein muß. Er nennt überdies $\delta_{12} + \delta_{21}$ den Abstand der Mengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$. Ann. Fac. Toulouse (2) 7 (1905) S. 281.

1) Einen ausführlichen Beweis gebe ich Math. Ann. 59 (1904) S. 141; vgl. auch eine demnächst dort erscheinende Berichtigung dazu.

2) Diesen Satz gibt auch P. Painlevé; vgl. das Zitat in Anm. 1 S. 108.

3) Man vgl. die S. 91 Anm. 1 erwähnten einfachen Beispiele von Hartogs. Hierauf weist auch Zoretti hin. Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 8. Übrigens ist dies nicht immer beachtet worden; vgl. die Bemerkung zu Borel S. 108 Anm. 3, sowie meine eigene in Anm. 1 erwähnte Berichtigung.

in bindender auch heute noch giltiger Form festgelegt.[1]) Es stellt einen Teil der Ebene dar, dem folgende zwei Eigenschaften zukommen:

1. Ist m ein Punkt des Gebiets $\mathfrak{G}$, so gibt es auch eine gewisse *Umgebung* von m (Kreisfläche), deren Punkte zu $\mathfrak{G}$ gehören; 2. irgend zwei Punkte m und m' von $\mathfrak{G}$ sind durch einen ganz zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Streckenzug endlicher Streckenzahl verbindbar. Hieraus folgt noch, daß auch jeder Punkt m', der mit m in dieser Weise verbindbar ist, zu $\mathfrak{G}$ gehört.[2])

Die nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Punkte der Ebene zerfallen nun in zwei Klassen; ist a ein Punkt, der nicht zu $\mathfrak{G}$ gehört, so kann es auch eine gewisse Umgebung von a (Kreisfläche) geben, die ebenfalls nicht zu $\mathfrak{G}$ gehört; diese Punkte bezeichnen wir als das *Äußere* $\mathfrak{A}$ des Gebiets $\mathfrak{G}$. Oder dies ist nicht der Fall; dann giebt es also in jeder Umgebung eines solchen Punktes auch Punkte von $\mathfrak{G}$ selbst. Diese Punkte heißen *Grenzpunkte* von $\mathfrak{G}$; ihre Gesamtheit bildet die *volle Grenze von* $\mathfrak{G}$. Man erkennt leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes:

---

1) Vgl. z. B. Berl. Berichte 1880 S. 721, Ges. Werke 2, S. 71.

H. W. Young gibt Quart. Journ. 37 (1906) p. 1 eine Reihe von Definitionen und Sätzen über Gebiete und Gebietsgrenze, die jedoch, abgesehen von seinem Gebietsbegriff, nichts wesentlich Neues enthalten. Sein Ausgangspunkt ist der, das Gebiet durch eine *abzählbare* Menge einander sich teilweise *überdeckender* Dreiecke irgend welcher Art zu definieren, und zwar müssen je nach der Art der verwendeten Dreiecke die Grenzpunkte des Gebiets ihm ganz oder teilweise oder gar nicht hinzugerechnet werden. Ein um seinen Schwerpunkt rotierendes Dreieck erzeugt in diesem Sinne ein Gebiet, dem nur eine *abzählbar* unendliche Menge von Punkten des Kreises hinzuzurechnen ist, den seine Eckpunkte beschreiben, da doch nicht sämtliche Punkte des Kreises Ecken der *abzählbaren* Menge von Dreiecken sein können, die das Gebiet ausmachen. Auf das Künstliche dieser Auffassung braucht kaum hingewiesen zu werden. Ich sehe deshalb davon ab, die von Young eingeführten Bezeichnungen näher anzuführen. Vgl. auch S. 108 Anm. 1.

2) Der Anlage des Berichts entspricht die methodische Beschränkung auf Streckenzüge. Andere setzen dafür gewisse analytisch definierte Kurven besonderer Gattung, vgl. z. B. Osgood, Encyc. Math. 2 S. 9, Bull. Am. math. Soc. (2) 10 (1904) p. 294 und Funktionentheorie S. 123. Da aber derartige Kurven hier erst selbst genauerer Definition bedürften, ist der Gebrauch der Streckenzüge methodische Notwendigkeit. Die Erweiterung auf „einfache" Kurven geschieht Kap. V, § 17, wo überhaupt die Gleichwertigkeit der allgemeinsten einfachen Kurve mit Streckenzügen im Gebiete der Analysis situs gezeigt wird. Dagegen halte ich den Hinweis nicht für überflüssig, daß die obige methodische Beschränkung keine sachliche Beschränkung darstellt. Dies ist eine unmittelbare Folge des Borelschen Theorems. Man denke sich nämlich eine irgendwie definierte analytische Kurve, die ganz *innerhalb* des Gebiets liegt. Dann gibt es zu jedem ihrer Punkte eine dem Gebiet angehörige Umgebung, also gibt es auch eine endliche Zahl solcher Umgebungen (z. B. Quadrate), die alle Kurvenpunkte einschließen. Durch sie erhält man unmittelbar statt der Kurve einen Streckenzug.

VI. *Die Gebietsgrenze eines Gebietes $\mathfrak{G}$ ist eine abgeschlossene nirgends flächenhafte Menge $\mathfrak{T}$.*[1])

Für einen Punkt von $\mathfrak{T}$ gibt es nun wieder zwei Möglichkeiten; er ist entweder Grenzpunkt nur von $\mathfrak{G}$ oder aber von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$; sind $\mathfrak{T}_g$ und $\mathfrak{T}_{ga}$ die entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{T}$, so haben wir

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_{ga};$$

und zwar *ist $\mathfrak{T}_{ga}$ wieder eine abgeschlossene Menge.*[2])

Das um seine volle Grenze vermehrte Gebiet stellt gemäß § 4 ein *einfaches Flächenstück* oder eine *einfache Fläche* dar; ich bezeichne es auch als *Bereich* und setze

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} + \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_{ga}.$$

Durch einen seiner Punkte und die volle Grenze ist das Gebiet eindeutig bestimmt.

Die Form der Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ kann sehr mannigfach sein. Sie unterliegt wesentlich nur den allgemeinen Sätzen von § 14 die die Gestalt eines abgeschlossenen Kontinuums betreffen, und kann sowohl eine Menge erster wie zweiter Gattung sein. Die einzige Besonderheit, die dem dort abgeleiteten sehr allgemeinen Strukturcharakter zukommt, ist die, daß $\mathfrak{T}$ Grenze eines einzigen Gebietes ist.

§ 7. *Die Zusammenhangszahl.* Einem Gebiet $\mathfrak{G}$ kommt eine *Riemannsche Zusammenhangszahl* zu. Sie kann zweckmäßig mittelst der in $\mathfrak{G}$ selbst approximierenden Polygonfiguren definiert werden, und zwar auf Grund folgender einfacher Tatsachen, die ich in aller Kürze erwähne.[3])

Sei der Einfachheit halber $\mathfrak{G}$ ein geschränktes Gebiet, $\mathfrak{T}$ seine volle Grenze, Π die zu $\mathfrak{T}$ gehörige approximierende Figur und Π_g derjenige Teil von Π, der in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Er besteht aus einer endlichen

1) Der obige Gebietsbegriff deckt sich nicht mit demjenigen von C. Jordan. Bei Jordan ist das Gebiet (domaine) ein *abgeschlossenes* Kontinuum, aus $\mathfrak{G}$ *und* seiner Grenze bestehend. Für nicht abgeschlossene Mengen P verfährt er so, daß er die Komplementärmenge $\mathfrak{R}(P)$ in Betracht zieht und als *Grenze* der Menge P die Punkte definiert, die $\mathfrak{R}(P)$ und der Ableitung P' oder aber P und der Ableitung $\mathfrak{R}'$ gemeinsam sind. Diesem Sprachgebrauch gemäß besteht also die Grenze der Menge aller rationalen Punkte einer Strecke aus sämtlichen Punkten dieser Strecke. Vgl. cours d'analyse I, S. 20. Die französischen Mathematiker bezeichnen die inneren Punkte des Gebiets auch als innere Punkte im engern Sinn (au sens étroit).

2) Es gibt daher eine Menge isolierter Punkte von $\mathfrak{G}$, so daß deren Ableitung mit $\mathfrak{T}_{ga}$ identisch ist; vgl. Bendixson, Stockh. Vet. Bihg 9, 7 (1884).

3) Es hat keine Schwierigkeit, dies eingehender auszuführen. Man vgl. noch meine Beiträge, Math. Ann. 59 (1904) S. 129.

Zahl von Polygonen P_i. Ferner gibt es ein oder mehrere zu $\mathfrak{A}(\Pi)$ gehörige Gebiete $\mathfrak{G}'$, die Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ sind, und deren Begrenzung durch die Polygone P_i gebildet wird. Diesem Gebiet kommt eine Zusammenhangszahl N' zu, die übrigens auch negativ sein kann.

Man lasse nun ε eine Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ durchlaufen (§ 3). Dann kann die Zahl N' zwar abnehmen, aber nur so, daß sie *den Wert, den sie für irgend ein* ε_ν *hat, für ein gewisses* $\varepsilon_{\nu+\varrho}$ *wieder erreicht.*

Dies ergibt folgende Betrachtung. Von den Polygonen P_i, die die Gebiete $\mathfrak{G}'$ begrenzen, kann bei wachsendem ν keines für einen endlichen Wert von ν ganz verschwinden. Eine Änderung der Zahl N' kann daher nur dadurch entstehen, daß für irgend einen Wert von ν entweder Polygone neu auftreten, oder aber mehrere Polygone sich zu einem einzigen verbinden.

Sei nun P' ein für einen Wert ν neu auftretendes Polygon, so hat man zu unterscheiden, ob sämtliche Punkte des Inneren $\mathfrak{J}(P')$ von P' zum Gebiet $\mathfrak{G}$ gehören oder nicht. Im ersten Fall tritt das Polygon P' in einem Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ auf, das *nicht* bereits zu $\mathfrak{G}'$ gehört. Dadurch nimmt N' zwar um eine Einheit ab; da aber $\mathfrak{G}$ zusammenhängend ist, so gibt es einen Wert $\nu + \varrho$, bei dem sich P' mit einem bereits vorhandenen Polygon vereinigt, und N' nimmt dadurch wieder um eine Einheit zu. Im zweiten Fall umschließt P' eine Teilmenge $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$; alsdann verschwindet es zwar nicht wieder, bedingt aber andererseits eine Zunahme von N'. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Würde man nun die Zusammenhangszahl von $\mathfrak{G}$ als Grenzwert aller Zahlen N' definieren, so würde man jedoch fehlgehen; das Beispiel 3 in § 3 zeigt, daß man auf diese Weise für N den Wert $-\infty$ erhält. Man hat vielmehr von jedem Polygon P_ν abzusehen, das sich für einen Wert $\nu + \varrho$ mit einem für ν bereits vorhandenen Polygon verbindet, die Zahl N' durch die sich so ergebende Zahl N'' zu ersetzen, und den Grenzwert aller Zahlen N'' zu ermitteln.

Man kann daher die Zusammenhangszahl von $\mathfrak{G}$ als *obere Grenze dieser Zusammenhangszahlen N'' der Gebiete* $\mathfrak{G}'$ definieren. Diese obere Grenze kann auch unendlich groß werden. Dies findet schon immer dann statt, wenn das Gebiet $\mathfrak{G}$ die ganze Ebene erfüllt, und die Grenze von $\mathfrak{G}$ eine punkthafte Menge ist (§ 4), die aus unendlich vielen Punkten besteht, mögen sie abzählbar sein oder nicht. Die Menge der Schnitte, die zur Umwandlung eines solchen Gebiets in ein einfach zusammenhängendes erforderlich ist, ist stets abzählbar.[1])

1) Der Beweis kann auf Grund der in § 14 enthaltenen Strukturanalyse leicht geführt werden.

Ich führe endlich noch folgende zwei Sätze an, die sich unmittelbar aus dem vorstehenden ergeben.

1. Ist das geschränkte Gebiet 𝔊 *einfach zusammenhängend*, so kann die in 𝔊 enthaltene Figur Π_g niemals zwei einander einschließende Polygone $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ enthalten. 2. Ist 𝔊 nicht einfach zusammenhängend, so kann seine Grenze kein Kontinuum sein.

§ 8. *Einfach zusammenhängende Gebiete.* Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet 𝔊, seine volle Grenze $\mathfrak{T}$ und seine Figur Π_g bestehen einige für das folgende notwendige Sätze.

Sei zunächst 𝔊 ein *geschränktes* Gebiet, so besteht dem vorstehenden Satz 1) zufolge die Figur Π_g aus einem oder mehreren Polygonen, die einander *aus*schließen. Ist μ der Punkt von 𝔊, der von $\mathfrak{T}$ den größten Abstand hat, so gibt es unter ihnen eins, das den Punkt μ einschließt; dieses soll *das die Menge $\mathfrak{T}$ im Abstand ε von 𝔊 aus approximierende Polygon $\mathfrak{P}$ heißen.* Ist andrerseits $\mathfrak{T}$ Grenze des Gebietes $\mathfrak{A}$, das den unendlich fernen Punkt enthält (§ 1), so folgert man ähnlich, daß die in $\mathfrak{A}$ enthaltene Figur Π_a entweder aus einem einzigen Polygon besteht, oder aber es gibt eines, das die anderen *ein*schließt; wir bezeichnen es ebenfalls als *das die Menge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{A}$ aus approximierende Polygon $\mathfrak{Q}$.*

Das eben definierte Polygon $\mathfrak{P}$ kann man insbesondere auch so bestimmen, daß es einem gegebenen Punkt t von $\mathfrak{T}$ beliebig nahe kommt. Um dies auszuführen, wähle man zunächst ε' beliebig, bestimme einen Punkt m des Gebietes 𝔊 so, daß $\overline{mt} < \frac{1}{2}\varepsilon'$ ist, ziehe von μ zu m in 𝔊 einen Weg $\mathfrak{w}$, bestimme für ihn das Minimum σ von $\varrho(\mathfrak{w}, \mathfrak{T})$ und wähle das Polygon $\mathfrak{P}$ so, daß $\varepsilon < \varepsilon'$ und $\varepsilon < \frac{1}{2}\sigma$ ist. Dann enthält dieses Polygon den Weg $\mathfrak{w}$ in seinem Innern und genügt daher der Bedingung. Wir sagen, daß *das Polygon $\mathfrak{P}$ auch den Punkt t approximiert.*

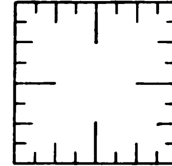
Man sieht in ähnlicher Weise, daß ein Polygon $\mathfrak{P}$ so gewählt werden kann, daß es jede endliche Zahl von Punkten t_i approximiert. Denkt man sich nun wieder in der Ebene eine quadratische Teilung von der Seite $\frac{1}{2}\varepsilon$ und faßt diejenigen Quadrate $\mathfrak{q}_\nu$ ins Auge, die im Innern oder auf dem Umfang mindestens einen Punkt t von $\mathfrak{T}$ enthalten, so ist deren Zahl *endlich.* In jedem Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$ greife man einen dieser Punkte t_ν beliebig heraus. Man kann dann das Polygon $\mathfrak{P}$ so wählen, daß es alle diese Punkte t_ν im Abstand $\frac{1}{2}\varepsilon$ approximiert.[1]) Damit approximiert es aber *jeden* Punkt von $\mathfrak{T}$ mindestens im Abstand ε; also folgt:

1) Z. B. so, daß man in jedem Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$ einen Punkt m_ν von 𝔊 auswählt, zu ihm den Weg $\mathfrak{w}_\nu = \mu m_\nu$ legt und $\mathfrak{P}$ so bestimmt, daß es alle diese Wege einschließt.

VII. *Ist $\mathfrak{T}$ Grenze eines einfach zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{G}$, so kann man ein in $\mathfrak{G}$ approximierendes Polygon $\mathfrak{P}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{P}$ jeden Punkt von $\mathfrak{T}$ approximiert, daß also bei gegebenem ε für* **jeden** *Punkt t von $\mathfrak{T}$ die Relation $\varrho(t, \mathfrak{P}) < \frac{3}{2}\varepsilon$ erfüllt ist.*

Hieraus folgt noch, daß die so definierten Polygone $\mathfrak{P}_\nu$, die einer Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ für $\lim \varepsilon_\nu = 0$ entsprechen, in dem Sinne gegen die Grenze $\mathfrak{T}$ konvergieren, daß erstens jede Folge von Punkten $\{p_\nu\}$, die beliebig auf den Polygonen $\mathfrak{P}_\nu$ gewählt werden, mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ liefert, und daß zweitens jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ als Grenzpunkt einer solchen Folge darstellbar ist. Man hat daher auch

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)\}, \qquad \mathfrak{T} = \text{limes}\, \mathfrak{P}_\nu.$$


Fig. 6.

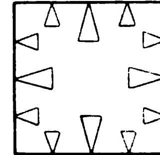
Analoge Verhältnisse bestehen für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{A}$. Hier tritt nur der eine Unterschied ein, daß in der vorstehenden Gleichung $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)$ durch $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_\nu)$ zu ersetzen ist. Man hat also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\{\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_\nu)\}, \qquad \mathfrak{T} = \text{limes}\, \mathfrak{Q}_\nu.$$

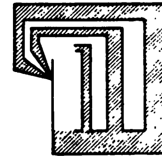
Gemäß Satz 1 von § 5 ist daher die Grenze eines einfach zusammenhängenden Gebiets *stets ein Kontinuum.*

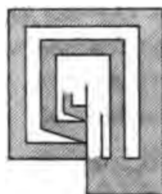
Für die Mannigfaltigkeit der Formen, die Grenze eines einfach zusammenhängenden Gebietes sein können, verweise ich zunächst auf die oben (S. 106) gegebenen Beispiele; ihnen füge ich noch folgende hinzu. Fig. 6 zeigt das überalldicht mit inneren Stacheln besetzte Quadrat über der Einheitsstrecke; in den dyadischen Punkten $\{\xi\}$ sind Lote der Länge l errichtet, so daß

$$\xi = \frac{2k+1}{2^\nu}, \quad l = \frac{1}{2^{\nu+1}}$$


Fig. 7.

ist. In Fig. 7 ist es so abgeändert, daß die Lote durch gleichschenklige Dreiecke mit der Höhe $h = \lambda/2^\nu$ und der Basis $b = \mu/2^\nu$ ersetzt sind, so daß ihre Spitzen wiederum den Quadratumfang überalldicht erfüllen; λ und μ müssen mit $1/\nu$ in geeigneter Weise unendlich klein werden. Man kann jedes Dreieck auch noch durch eine endliche oder unendliche Zahl von Stacheln ersetzen, die von seiner Spitze ausgehen und in seinem Innern verlaufen; ihre Mächtigkeit kann sogar in jedem Dreieck gleich $\mathfrak{c}$ sein. Fig. 8 zeigt ein Flächenstück, das aus einer zur Kurve $y = \sin 1/x$ analogen Figur in der Weise gewonnen wird, daß sämt-


Fig. 8.


Fig. 9.

liche Gebietsteile sich bis zu einem und demselben Punkt der y-Achse hinziehen. Fig. 9 zeigt, daß derartige Gebiete auch so möglich sind, daß die Grenze eines jeden Teilgebietes mit der y-Achse ein Stück gemein hat und daß zugleich jedes Stück der y-Achse einer dieser Grenzen angehört (vgl. auch noch § 11).

Wird einem Gebiet ein Teil seiner Grenze hinzugefügt, so bleibt es ein nicht abgeschlossenes Kontinuum. Einen eigenen Namen dafür besitzen wir nicht. Solche Mengen kommen jedoch im Folgenden nicht weiter in Betracht.

§ 9. *Die allgemeinsten nicht abgeschlossenen Kontinua.* Eine allgemeinere Gattung zusammenhängender nicht abgeschlossener Mengen erhalten wir dadurch, daß wir die erste der beiden Forderungen des § 6 fallen lassen.[1])

Wird in einem Kreis ein vertikaler Durchmesser gezogen, von dem man den Mittelpunkt absondert, so bilden alle Punkte des Kreisinnern mit Ausnahme dieses Durchmessers, aber mit Einschluß des Mittelpunktes ein solches Kontinuum $\mathfrak{U}$. Da nämlich der horizontale Durchmesser ihm angehört, so sind immer noch je zwei seiner Punkte durch einen gewöhnlichen Streckenzug verbindbar. Ein Beispiel andrer Art bilden die sämtlichen Punkte einer beiderseits unbegrenzten Epizykloide, wenn die Radien R und ϱ der Rollkreise ein irrationales Verhältnis haben; die so definierte Epizykloide kommt jedem Punkt des Kreisringes mit den Radien ϱ und R, durch den sie nicht hindurchgeht, beliebig nahe. Hier liegt das Kontinuum, wie auch dessen Komplementärmenge im Kreisring überalldicht. Ähnlich kann es, wie Stäckel bemerkte, bei den Bahnkurven gewisser dynamischer Probleme sein.[2]) Auf Kontinua dieser Art hat übrigens bereits Cantor hingewiesen.[3]) Er zeigte, daß in einer Ebene auch dann noch stetige Bewegung möglich ist, wenn man alle Punkte, deren beide Koordinaten rational sind, tilgt. Sind nämlich m und m_1 zwei der übrigen Punkte, und konstruiert man zu ihnen eine Menge gleichschenkliger Dreiecke der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, die mm_1 als Basis haben, so gibt es unter ihnen notwendig auch solche, die keinen der ausgeschlossenen Punkte enthalten, denn diese bilden eine abzählbare Menge.

---

1) Über das Auftreten solcher Kontinua in der Analysis vgl. besonders § 17.
2) Vgl. besonders Math. Ann. 54 (1901) S. 86.
3) Math. Ann. 20 (1882) S. 119.

Die Abzählbarkeit der ausgeschlossenen Punkte ist keineswegs eine notwendige Bedingung, um derartige Kontinua zu erhalten. Tilgt man aus dem Innern eines Quadrats Parallelen zu einer Seite, die das Quadrat überalldicht durchsetzen, und deren Menge nicht abzählbar ist, so besitzt die Restmenge, wenn man ihr den Quadratumfang hinzurechnet, immer noch die Eigenschaft, daß irgend zwei ihrer Punkte durch einen gewöhnlichen Streckenzug verbindbar sind.

Noch allgemeinere Kontinua dieser Art erhält man, wenn man den Streckenzug durch eine einfache Kurve[1]) ersetzt. Um die allgemeinste Erweiterung zu erhalten, haben wir aber den Streckenzug durch *irgend ein abgeschlossenes Kontinuum* zu ersetzen, das derjenigen Punktmenge, die wir als weiteres Kontinuum definieren, angehört. Wir definieren also:

VIII. *Eine Punktmenge P soll ein weiteres Kontinuum heißen, wenn es für je zwei ihrer Punkte m_1 und m_2 ein abgeschlossenes Kontinuum gibt, das Teilmenge von P ist und m_1 und m_2 enthält.*[2])

Wir werden also den *weiteren* und den *engeren* Begriff der nicht abgeschlossenen Kontinua unterscheiden, so daß das *Gebiet* den engeren Begriff darstellt.

Ein allgemeineres Beispiel eines weiteren Kontinuums ist noch das folgende: Auf der x-Achse errichte man in allen rationalen Punkten[3]) zwischen -1 und $+1$ Lote von der Länge 1, so bilden diese Lote im Verein mit der Kurve $y = \sin {}^1/_x (-1 < x < +1)$ ein weiteres Kontinuum. Nimmt man insbesondere einen Punkt mit positiver und einen Punkt mit negativer Abszisse, so sind sie immer noch durch eine zusammenhängende Menge, aber nicht durch eine einfache Kurve verbindbar. Anderen Beispielen werden wir in § 17 begegnen.

Es bedarf keines ausdrücklichen Beweises, daß beide Gattungen der nicht abgeschlossenen Kontinua, wenn man ihnen ihre Grenzpunkte hinzufügt, ein abgeschlossenes Kontinuum liefern. Es gilt in der Tat der Satz:

Jedes nicht abgeschlossene Kontinuum geht durch Hinzufügung seiner Grenzpunkte in ein abgeschlossenes Kontinuum über.

Endlich ist noch zu erwähnen, daß Cantor die folgende Definition des Zusammenhangs einer Menge M aufgestellt hat.[4])

1) Den Begriff der einfachen Kurven behandelt Kap. V § 11.

2) Diese Definition findet sich auch bei E. Study, Geometrie der Dynamen (1903) S. 248 Anm.

3) Einschließlich des Nullpunktes.

4) Math. Ann. 21 (1883) S. 575.

Sind m und m_1 zwei Punkte der Menge, so muß es möglich sein, zwischen sie eine endliche Zahl andrer Punkte der Menge so einzuschalten, daß der Abstand von je zwei konsekutiven Punkten kleiner als eine beliebig vorgeschriebene Größe ausfällt.

Diese Eigenschaft ist für alle drei Arten der Kontinua realisiert, sowohl für die abgeschlossenen wie für die nicht abgeschlossenen.[1]) Sie ist aber keine *ihnen ausschließlich* zukommende Eigenschaft, da sie jeder in einem Gebiet überalldichten Menge ebenfalls zukommt. Cantor unterscheidet nämlich die *hier* gleichwertigen Begriffe *Zusammenhang* und *Kontinuum*; als Kontinuum bezeichnet er eine Menge, die perfekt und im Sinne der vorstehenden Definition zusammenhängend ist, was sich mit meinem Begriff des abgeschlossenen Kontinuums deckt. Die nicht abgeschlossenen Kontinua nennt er *Semikontinua*.[2])

§ 10. *Die geschlossene Kurve.* Der Begriff der geschlossenen Kurve bildet die Grundlage der Analysis Situs und beherrscht die gesamte gestaltliche Analyse der ebenen Mengen. Ihn haben wir im Sinne der Einleitung mengentheoretisch und gestaltlich einzuführen, und ihn damit auf eine von jeder analytischen Darstellung unabhängige Basis zu stellen.

Mengentheoretisch gelangt man nur so zu einem präzisen Begriffe, daß man der Punktmenge, die man als Kurve einführt, jedenfalls *Zusammenhang* und *Abgeschlossenheit* resp. *Perfektheit* auferlegt. Dies deckt sich freilich nicht ganz mit dem in der Analysis gebräuchlichen Kurvenbegriff. Der Analytiker betrachtet mit Recht die *sämtlichen* in § 9 genannten Epizykloidenbogen als eine einzige Kurve; ist sie doch sozusagen stetiges Bild der unbegrenzten Geraden. Sie entspricht auch dem in § 9 genannten weiteren Zusammenhangsbegriff, ist aber nicht abgeschlossen, da ihre Punkte in einem Kreisring überalldicht liegen, ohne ihn ganz zu erfüllen.[3])

---

1) Im allgemeinen pflegt man die obigen drei Gattungen der Kontinua nicht weiter voneinander zu trennen, was zum Teil auf der einseitigen Bevorzugung analytischer Gesichtspunkte beruhen dürfte. Die Definitionen leiden dann aber leicht an Unbestimmtheit und werden auch nicht allen Möglichkeiten gerecht. Auf einen solchen Umstand hat E. Maccaferri wohl zuerst hingewiesen. Riv. di Mat. 4. (1894) p. 97.

2) Math. Ann. 21 (1883) S. 590.

3) Der Analytiker wird auch die durch $y = \sin {}^1/_x$ für $-1 \leq x < 0$ und $0 < x \leq 1$ dargestellten Punkte, wenn man ihnen z. B. den Punkt $x = 0$, $y = 0$ hinzufügt, als Kurve betrachten, da ihre Punkte einer für jedes x eindeutigen Funktion entsprechen.

Gestaltlich hat sich die Einführung der geschlossenen Kurve an die Eigenschaften des Polygons anzulehnen. Als *geschlossene ebene Kurve* soll daher eine abgeschlossene Punktmenge dann und nur dann bezeichnet werden, wenn sie in dem Sinne die Verallgemeinerung des Polygons ist, daß sie die Ebene in gleicher Weise in zwei Teile zerlegt wie das Polygon. Wir definieren also:

IX. *Eine geschränkte abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{C}$, die die Ebene so in zwei Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ zerlegt, daß jeder ihrer Punkte gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ ist, heißt eine geschlossene Kurve; für sie besteht also die Relation*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} + \mathfrak{J}(\mathfrak{C}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{C}).$$

Von der so definierten Punktmenge beweisen wir nun die folgenden Eigenschaften. Sie kann erstens keine isolierten Punkte enthalten und ist somit *perfekt*. Sie ist zweitens *linienhaft* und drittens *zusammenhängend*[1]).

Da wir es hier mit einem der wichtigsten Grundbegriffe zu tun haben, sollen alle diese Eigenschaften ausführlich bewiesen werden.

Die erste folgt unmittelbar daraus, daß ein isolierter Punkt nur Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ oder nur Grenzpunkt von $\mathfrak{A}$ sein kann.

Die zweite folgt ebenso unmittelbar daraus, daß ein flächenhafter Bestandteil auch Punkte enthält, die Grenzpunkte weder von $\mathfrak{J}$ noch von $\mathfrak{A}$ sind.

Um die dritte Eigenschaft zu erweisen, zeige ich zunächst, daß jedes der Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ *einfach* zusammenhängend ist. Sei $\mathfrak{J}$ das Gebiet, dem der unendlich ferne Punkt p_∞ nicht angehört. Wäre dies nicht einfach zusammenhängend, so enthielte der in $\mathfrak{J}$ liegende Bestandteil der approximierenden Figur II gemäß § 7 notwendig zwei Polygone $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$, deren eines das andere einschließt, die also ein Ringgebiet bilden, das ganz zu $\mathfrak{J}$ gehört. Sei $\mathfrak{P}'$ das innere Polygon, so gehören dann Punkte von $\mathfrak{C}$ auch zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}')$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn diese Punkte müßten einerseits Grenzpunkte von $\mathfrak{A}$ sein, während jeder Weg, der von p_∞ in ihre Nähe führt, das Ringgebiet kreuzt, also kein zu $\mathfrak{A}$ gehöriger Weg ist. Ähnlich beweist man die gleiche Eigenschaft für $\mathfrak{A}$.

1) Einen etwas engeren Satz gab zuerst E. Phragmén, Acta math. 7 (1885), p. 43. Er bewies nämlich, daß, wenn eine Punktmenge T volle Grenze eines Gebietes ist, und es Punkte außerhalb dieses Gebietes gibt, ein Teil von T zusammenhängend sein muß. Ferner hatte er gezeigt, daß, wenn kein Teil von T zusammenhängend ist, die Komplementärmenge ein einziges Gebiet bildet. Stockh. Ak. Öfv. 41, 1 1884 p. 121. Vgl. auch § 11. Sein Beweis benutzt ebenfalls approximierende Polygone.

Hieraus folgt schließlich, daß $\mathfrak{C}$ eine zusammenhängende Menge ist. Gemäß § 8 gibt es nämlich in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{J}$ eine Folge von Polygonen $\{\mathfrak{P}_\nu\}$, die gegen die gesamte Grenze von $\mathfrak{J}$ in der Weise konvergieren, wie es den Sätzen von § 8 entspricht. Daher ist ihr Grenzgebilde ebenfalls zusammenhängend. Also folgt:

X. *Die ebene geschlossene Kurve ist eine perfekte, linienhafte, zusammenhängende Menge.*

In Anlehnung an § 1 setze ich

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} + \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$$

und bezeichne $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ als die *Kurvenfläche.*

Endlich füge ich hinzu, daß die vorstehenden Betrachtungen sich sinngemäß auf den Fall übertragen, daß man nicht die ganze Ebene als Operationsobjekt zu Grunde legt, sondern die Fläche eines Polygons oder eines Ringgebiets. Denn man kann beide Flächen zur ganzen Ebene so erweitern, daß die obigen Voraussetzungen für die ganze Ebene gelten, wenn sie für die Fläche des Polygons oder Ringgebiets erfüllt sind.

Zwei Beispiele mögen zeigen, wie reichhaltig die Gestaltenfülle der Mengen ist, die unter den Begriff der geschlossenen Kurve fallen.

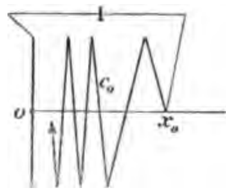


Fig. 10.

1. Ist x_0 ein Punkt, in dem die Kurve $y = \sin {}^1\!/x$ die positive x-Achse trifft, c_0 das Stück dieser Kurve, das den Werten $0 < x \leq x_0$ entspricht, und $\mathfrak{l}$ ein Linienzug, der c_0 nicht kreuzt und den Punkt x_0 mit dem Punkt $y = 1$ der y-Achse verbindet, so bestimmen $\mathfrak{l}$ und c_0 mit dem Stück der y-Achse zwischen $+1$ und -1 eine geschlossene Kurve (Fig. 10).

2. Ich gehe von einem Quadrat $\mathfrak{Q}$ über der Einheitsstrecke aus, nehme auf einer Seite eine nirgendsdichte perfekte Menge T an, der die Endpunkte der Seite angehören sollen, und errichte in $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q})$ in den Punkten von T Lote von der Länge l, so bildet die Menge T zusammen mit dem Quadrat $\mathfrak{Q}$ ein abgeschlossenes Kontinuum $\mathfrak{T}$. Sei $\{\delta_\nu\}$ die zu T gehörige Intervallmenge. Ist δ eines dieser Intervalle, so bleibt $\mathfrak{T}$ offenbar ein Kontinuum, falls man δ zwischen den in seinen Endpunkten errichteten Loten in das Innere des Quadrates parallel mit sich verschiebt, insbesondere auch bis zu den oberen Endpunkten der Lote.

Dies führt zu folgender Konstruktion einer geschlossenen Kurve. Seien, um einfachste Verhältnisse zu wählen,

$$\{\delta_N\} = \delta,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_{11},\ \delta_{12},\ \delta_{21},\ \delta_{22} \ldots$$

die in bekannter Weise geordneten Intervalle, so führe man die Verschiebung der Intervalle zunächst für δ_{11}, δ_{12}, δ_{21} und δ_{22} aus, und zwar für jedes bis zu den oberen Endpunkten der es begrenzenden Lote. Dann entsteht das Bild der Figur 11, bei dem die vorhandenen Intervalle δ, δ_i, δ_{ik} abwechselnd auf der unteren Quadratseite und im Quadratinnern liegen. Man verschiebe nun wieder weitere Intervalle so, daß die neue Figur die gleiche Eigenschaft besitzt, und setze dies unbegrenzt fort, so wird die so entstehende Menge alle Eigenschaften der geschlossenen Kurve besitzen.

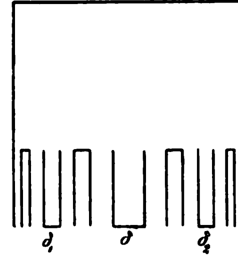


Fig. 11.

Wichtig ist noch, daß zwei Mengen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ der oben genannten Art auch dann eine geschlossene Kurve bestimmen, falls man von ihnen nur weiß, daß sie weitere Kontinua allgemeinster Art sind. Es besteht nämlich der Satz:

XI. *Zerfällt die Ebene in der Weise in drei Kontinua $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, daß $\mathfrak{T}$ abgeschlossen ist, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ ist, und $\mathfrak{T}$ auch alle gemeinsamen Grenzpunkte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ enthält, so ist $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Kurve.*

Zunächst ist klar, daß *jeder* Punkt m von $\mathfrak{J}$ Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{J}$ ist, und *jeder* Punkt a von $\mathfrak{A}$ Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{A}$. Dies ist eine unmittelbare Folge des Kontinuumbegriffs. Daraus folgt, daß jeder Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{J}$, der nicht zu $\mathfrak{T}$ gehört, notwendig zu $\mathfrak{J}$ gehört. Denn sonst gehörte er zu $\mathfrak{A}$, wäre also damit auch Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{A}$, und wäre nun auch Punkt von $\mathfrak{T}$, was der über ihn gemachten Annahme widerspricht. Das gleiche folgt ebenso für $\mathfrak{A}$.

Sei nun m' *irgend* ein Punkt von $\mathfrak{J}$, so ist, da $\mathfrak{T}$ abgeschlossen ist,

$$\varrho(m', \mathfrak{T}) = \eta > 0 \cdot$$

Ein um m' mit η geschlagener Kreis K kann daher nur Punkte von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$ enthalten. Andererseits gehört auch *jeder* Punkt von $\mathfrak{J}(K)$ zu $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$. Falls es nun in $\mathfrak{J}(K)$ einen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Punkt a' gäbe, so enthielte die Strecke ma' sowohl Punkte von $\mathfrak{J}$ wie von $\mathfrak{A}$, und dem obigen gemäß bilden die auf ihr liegenden Punkte von $\mathfrak{J}$ wie von $\mathfrak{A}$ je eine *abgeschlossene* Menge. Ist nun a der Punkt von $\mathfrak{A}$, der m' am nächsten liegt, so ist er einerseits Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{J}$ und als Punkt von $\mathfrak{A}$ auch Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{A}$. Er müßte daher zu $\mathfrak{T}$ gehören, was unmöglich ist.

Es gehört daher das ganze Gebiet $\mathfrak{J}(K)$ zu $\mathfrak{J}$, und da dies für jeden Punkt m' von $\mathfrak{J}$ gilt, so ist die Menge $\mathfrak{J}$ ein Gebiet. Das gleiche folgt für $\mathfrak{A}$, womit der Satz bewiesen ist.

§ 11. *Gestaltliche Struktur der abgeschlossenen Kontinua.* Jedes abgeschlossene *Kontinuum* $\mathfrak{T}$ bestimmt in der Ebene eine gewisse *Gebietsteilung*, die genauer gesprochen die Gebietsteilung der Komplementärmenge $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ von $\mathfrak{T}$ ist. Von jedem dieser Gebiete ergibt sich aus § 8 zunächst unmittelbar, daß es *einfach zusammenhängend* ist.

Sei $\mathfrak{T}$ zunächst eine linienhafte Menge. Dann ist wiederum der einfachste Fall der, daß $\mathfrak{R}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{R}$ ein einziges zusammenhängendes Gebiet ist; hierüber ist nichts besonderes zu bemerken.

Zerfällt $\mathfrak{R}$ in zwei Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, so liegen für einen Punkt von $\mathfrak{T}$ drei Möglichkeiten vor; er kann Grenzpunkt nur von $\mathfrak{J}$ oder nur von $\mathfrak{A}$ oder von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ sein, demgemäß hat man, wenn $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{T}_a$, $\mathfrak{T}_{ia}$ die so definierten Teilmengen von $\mathfrak{T}$ sind,

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{R} = \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_{ia} + \mathfrak{A} + \mathfrak{J}.$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_{ia} = \mathfrak{T}_i', \quad \mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_{ia} = \mathfrak{T}_a', \quad \text{also} \quad \mathfrak{T}_{ia} = \mathfrak{D}(\mathfrak{T}_i', \mathfrak{T}_a'),$$

so ist $\mathfrak{T}_i'$ und $\mathfrak{T}_a'$ die *volle Grenze* von $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{A}$; jede dieser beiden Mengen ist daher abgeschlossen, und dasselbe gilt von $\mathfrak{T}_{ia}$.

Setzt man ferner

$$\mathfrak{J} + \mathfrak{T}_i = \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{T}_a = \mathfrak{A}_1,$$

so sind, wie man leicht sieht, auch $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{A}_1$ zusammenhängende Gebiete, und es ist jeder Punkt von $\mathfrak{T}_{ia}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{A}_1$; ferner stellt $\mathfrak{T}_{ia}$ die *volle Grenze sowohl von* $\mathfrak{J}_1$ *wie von* $\mathfrak{A}_1$ *dar.*[1]) Gemäß § 10 folgt daher:

XII. *Zerfällt die Komplementärmenge des abgeschlossenen Kontinuums* $\mathfrak{T}$ *in zwei Gebiete* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{A}$, *so gibt es eine geschlossene Kurve, die* $\mathfrak{T}$ *angehört und* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{A}$ *trennt.*

Wenn die Menge $\mathfrak{R}$ in mehr als zwei Gebiete zerfällt, so ist zunächst klar, daß die Zahl dieser Gebiete *endlich* oder *abzählbar* ist, und daß jedes Gebiet einfach zusammenhängend sein muß.

Sei nun $\mathfrak{G}'$ irgend eines dieser Gebiete, das den unendlich fernen Punkt nicht enthält, so besteht auch für dieses Gebiet der Satz XII.

1) Alle diese Tatsachen lassen sich auf das einfachste aus den obigen Definitionen beweisen. Ausführlichere Beweise enthalten meine Beiträge Math. Ann. 59 (1904) S. 129.

Dies will ich ausführlich beweisen, zumal es für Gebiete, die den unendlich fernen Punkt enthalten, nicht zutrifft, in voller Analogie zu den Polygonsätzen von § 1. Den Beweis stützt man am einfachsten auf die Polygone $\mathfrak{P}_\nu$, die von $\mathfrak{G}'$ aus gegen seine Gebietsgrenze approximieren. Wird wieder $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu) = J_\nu$ gesetzt, so hat man, wenn $\mathfrak{T}'$ die volle Grenze von $\mathfrak{G}'$ ist (§ 8),

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{M}\{J_\nu\}, \quad \mathfrak{T}' = \text{limes}\{\mathfrak{P}_\nu\},$$

und daher

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{T}' + \mathfrak{K}',$$

wenn $\mathfrak{K}'$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{G}' + \mathfrak{T}'$ ist. Da $\mathfrak{T}'$ die volle Grenze von $\mathfrak{G}'$ ist, gehört ihr kein Punkt an, der Grenzpunkt nur von $\mathfrak{K}'$ ist.

Die Menge $\mathfrak{K}'$ teilen wir wieder in zwei Bestandteile $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$, und zwar soll $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der Punkte bedeuten, die mit dem unendlich fernen Punkt ein zusammenhängendes Gebiet bilden, so wird

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{T}' + \mathfrak{A} + \mathfrak{H}.^{1)}$$

Eine ähnliche Teilung können wir auch mit $\mathfrak{T}'$ vornehmen. Sei zunächst $\mathfrak{T}_a$ die *volle* Grenze von $\mathfrak{A}$, so folgt sofort

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_h + \mathfrak{T}_{gh},$$

wo $\mathfrak{T}_g$, $\mathfrak{T}_h$ und $\mathfrak{T}_{gh}$ die oben angegebene Bedeutung haben. Da aber $\mathfrak{T}'$ keinen Punkt enthält, der Grenzpunkt nur von $\mathfrak{K}'$ ist, so ist $\mathfrak{T}_h = 0$, und man hat daher

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_{gh}.$$

Nun ist leicht ersichtlich, daß die Mengen

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{H} + \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_{gh}$$

ein zusammenhängendes Gebiet darstellen. Dies ist einerseits klar für $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}' + \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_{gh}$, andererseits auch für $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} + \mathfrak{T}_{gh}$. Ist ferner t_{gh} irgendein Punkt von $\mathfrak{T}_{gh}$, und $\sigma = \varrho(t_{gh}, \mathfrak{T}_a)$ sein Abstand von $\mathfrak{T}_a$, so können in dem um t_{gh} mit dem Radius $\frac{1}{2}\sigma$ geschlagenen Kreise nur Punkte von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ liegen; andererseits liegen in ihm auch wirklich sowohl Punkte von $\mathfrak{G}_1$ wie von $\mathfrak{H}_1$. Damit ist der Beweis geliefert.

Es besteht also die Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T}_a + \mathfrak{J} + \mathfrak{A}$$

in der Weise, daß $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ zusammenhängende Gebiete sind, und $\mathfrak{T}_a$ die volle Grenze von $\mathfrak{A}$ ist. Da nun, wie bereits bemerkt $\mathfrak{T}'$ keinen

1) Man vgl. besonders die Figuren 7, 8 und 9, in denen man die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ sowie die im Satz XII genannte geschlossene Grenzkurve leicht erkennt.

Punkt enthält, der Grenzpunkt nur von $\mathfrak{K}'$ ist, so enthält auch $\mathfrak{T}_a$ keinen Punkt, der Grenzpunkt nur von $\mathfrak{A}$ ist; daher ist $\mathfrak{T}_a$ gemeinsame Grenze von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, also eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, und der Satz ist bewiesen. Also folgt:

XIII. *Für jedes geschränkte, einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}$ gibt es eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, die mit seiner vollen Grenze identisch oder aber eine Teilmenge der vollen Grenze ist.*

Falls $\mathfrak{G}'$ den unendlich fernen Punkt enthält, besteht ein solcher Satz nicht. Der Beweis versagt, weil hier eine Zerlegung von $\mathfrak{K}'$, die der obigen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ entspricht, nicht möglich ist. Ein einfachstes Beispiel liefert Fig. 2 von S. 99.

Ich bezeichne die Kurve $\mathfrak{C}$ als *äußere Randkurve des Gebietes* $\mathfrak{G}$.

Daß das Gebiet $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ Teilgebiete enthalten kann, die nicht zu $\mathfrak{G}$ gehören, möge ausdrücklich erwähnt werden. Einfache Beispiele liefern die Figuren 7, 8, 9 von § 8.

Ein analoger Satz besteht übrigens für jede Folge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ einander *ausschließender* Polygone, d. h. solcher, bei denen $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)$ Teilmenge von $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_{\nu+1})$ ist.[1]) Dagegen besteht er wiederum nicht für eine Folge *einschließender* Polygone, bei denen also $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_{\nu+1})$ Teilmenge von $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)$ ist.[2])

Wir folgern schließlich noch den Satz:

XIV. *Ein geschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ ist durch seine Grenze $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt.*

Ist nämlich $\mathfrak{C}$ die äußere Randkurve von $\mathfrak{G}$, so gehört der gegen $\mathfrak{T}$ approximierenden Figur Π jedenfalls ein in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ enthaltenes Polygon $\mathfrak{P}$ und ein in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ enthaltenes Polygon $\mathfrak{Q}$ an. Da nun $\mathfrak{G}$ den unendlich fernen Punkt nicht enthält, so gehört $J = \mathfrak{J}(\mathfrak{P})$ zu $\mathfrak{G}$, und es ist deshalb $\mathfrak{G}$ mit dem Gebiet $\mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)\} = \mathfrak{M}\{J_\nu\}$ identisch. Damit ist der Satz bewiesen.[3])

Falls die Zahl der Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ unendlich groß ist, braucht übrigens keineswegs jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ zur Grenze $\mathfrak{T}_\nu$ eines Gebietes $\mathfrak{G}_\nu$ zu gehören. Er gehört aber jedenfalls zum Grenzgebilde $\mathfrak{T}_\omega$ der Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ (§ 5), und ist dann immer auch Grenzpunkt von Punkten, die unendlich vielen Gebieten $\mathfrak{G}_\nu$ angehören. Die Menge $\mathfrak{T}_\omega$ braucht im allgemeinsten Falle keineswegs ein Kontinuum zu sein; sie unterliegt dem allgemeinen Satz von § 14.

---

1) Solche Polygone benutzt auch Mittag Leffler zur Definition seines Sterns. Das Gebiet $\mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)\}$ kann hier freilich unendlich sein.

2) Die obigen Sätze bilden die unmittelbare Verallgemeinerung derjenigen, die in § 1 für einen geschlossenen Streckenzug ausgesprochen wurden.

3) Er gilt auch für geschränkte Gebiete von beliebigem Zusammenhang.

Ich schließe mit folgendem Satz:

XV. *Das allgemeinste linienhafte ebene Kontinuum bewirkt eine Gebietsteilung, die aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Gebieten besteht. Jedes Gebiet wird von einer geschlossenen Kurve begrenzt, die aber nicht mit seiner vollen Grenze identisch zu sein braucht. Ist die Gebietsmenge unendlich, so kann es in dem Grenzgebilde aller Gebiete auch solche Punkte geben, die nicht zur Grenze eines einzelnen Gebietes gehören. Diese Punkte brauchen jedoch keine abgeschlossene Menge zu bilden.*[1])

Beispiele: 1. Bei einer Schar von Kreisen, die sich in demselben Punkte von innen berühren, und deren Radien gegen Null abnehmen, besteht die Grenzmenge $\mathfrak{T}_\omega$ aus dem Berührungspunkt. Er gehört zugleich *jeder* Menge $\mathfrak{T}_\nu$ an.

2. Wird in einer Schar einander einschließender paralleler Quadrate mit demselben Mittelpunkt, deren Seiten gegen Null abnehmen, eine durch ihn gehende Gerade gezogen, so besteht $\mathfrak{T}_\omega$ aus dem Mittelpunkt. Er gehört *keiner* Menge $\mathfrak{T}_\nu$ an.

3. Wenn man in einem Quadrat eine innere Teilungslinie l zieht, und Parallelen sich von beiden Seiten gegen sie häufen läßt, so bestimmen je zwei konsekutive Parallelen ein Teilgebiet $\mathfrak{G}_\nu$, während kein innerer Punkt der Strecke l zu einer Grenzmenge $\mathfrak{T}_\nu$ gehört.

4. Konstruiert man innerhalb eines Kreises k zwei Kreise k_1 und k_2 mit halbem Radius, die sich im Mittelpunkt m berühren, tut dasselbe für die Kreise k_1 und k_2 und setzt dies unbegrenzt fort, so daß die Berührungspunkte einen Durchmesser d überalldicht erfüllen, so stellt d die Menge $\mathfrak{T}_\omega$ dar, und es gibt auf $\mathfrak{T}_\omega$ nur eine abzählbare überalldichte Punktmenge, deren Punkte Grenzpunkte einzelner Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ sind (Fig. 12).

Fig. 12.

1) Einfachste Beispiele linienhafter Mengen $\mathfrak{T}$ mit endlichen und unendlich vielen Gebieten liefern auch die automorphen Funktionen, bei denen sich die geschilderten Verhältnisse auf das einfachste realisiert finden. Hat man es mit einer eigentlich diskontinuierlichen Kugelgruppe zu tun, bei der die Kugel von mehr als einem Polygonnetz bedeckt ist, so ist die Zahl dieser Netze entweder zwei oder unendlich und demgemäß zerfällt die Kugel in zwei oder aber unendlich viele Netze, deren jedes wieder beliebig hohen, auch unendlich hohen Zusammenhang haben kann. Vgl. z. B. [illegible] Fricke, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen Bd. I, S. 134 f.

Damit ist die Gebietsteilung, die durch ein linienhaftes Kontinuum $\mathfrak{T}$ erzeugt wird, erledigt, und ihre Struktur kenntlich gemacht. Enthält $\mathfrak{T}$ auch flächenhafte Bestandteile, so bewirkt dies nur, daß es Teilgebiete der Ebene gibt, die der Menge $\mathfrak{T}$ zugehören. Diese brauchen jedoch nicht einfach zusammenhängend zu sein, obwohl $\mathfrak{T}$ ein Kontinuum ist.

Ich habe den obigen Beweis auch deshalb ausführlich gegeben, weil die durch Polygonfolgen entstehenden Gebiete nicht immer eine richtige Auffassung gefunden haben. Man kann den Tatbestand auch so ausdrücken, daß *der Satz der Gebietsteilung, der für jedes einzelne Polygon* $\mathfrak{P}_\nu$ *gilt, sich nicht von* $\{\nu\}$ *auf* ω *überträgt.* Dies wird übrigens auch schon durch die Überlegung nahegelegt, daß man, gemäß § 8, *jede* Gebietsgrenze eines einfach zusammenhängenden Gebiets durch Polygone $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ approximieren kann, und daß diese Gebietsgrenze der mannigfachsten Formen fähig ist.

§ 12. *Zerlegungssätze.* Die Zerlegung, die Inneres und Umfang eines Polygons durch Streckenzüge erfahren, soll auf Gebiete allgemeinster Art übertragen werden, insbesondere auf die geschlossene Kurve. Zwei Gründe machen es nötig, derartige Sätze ausführlicher darzulegen. Erstens müssen auch die Abweichungen angegeben werden, die dem Polygon gegenüber bei allgemeineren Gebietsgrenzen auftreten können, und zweitens ist auch die Zerlegung in unendlich viele Gebiete in Betracht zu ziehen. Folgende Definitionen schicke ich voraus:

1. *Unter einem einfachen Weg (oder kürzer einem Weg), der von einem Punkt* m *eines Gebietes* $\mathfrak{G}$ *zu einem Punkt* t *seiner Grenze* $\mathfrak{T}$ *führt, verstehe ich einen Streckenzug endlicher Streckenzahl oder einen solchen Streckenzug unendlicher Streckenzahl, dessen Strecken in* t *ihren einzigen Grenzpunkt besitzen.*[1])

2. Ein Punkt t der Grenze $\mathfrak{T}$ eines Gebietes $\mathfrak{G}$ heißt für $\mathfrak{G}$ *erreichbar,* wenn er mit einem, also auch mit jedem Punkt von $\mathfrak{G}$ durch einen einfachen in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Weg $\mathfrak{l}$ verbindbar ist.[2])

Diese Wege bilden ein wichtiges Hilfsmittel der weiteren Untersuchungen. Es ist zu zeigen, daß man auch eine unendliche Menge von ihnen so zeichnen kann, daß keine zwei einander kreuzen. Dazu sollen sie zunächst noch weiterer Festsetzung unterworfen

1) Dies ist die natürliche Verallgemeinerung der Definition von § 1. Beispiele enthält Kap. V § 10.

2) Näher komme ich auf diesen Begriff in Kap. V § 10 zurück. Ist t von m durch den Weg $\mathfrak{l}$ erreichbar, so auch von m' aus unter Hinzufügung des Streckenzuges $m' \ldots m$.

werden.[1]) Wir nehmen von vornherein an, daß sie sämtlich von einem festen Punkte m ausgehen, und wollen sie so bestimmen, daß sie jedes approximierende Polygon nur je einmal kreuzen.

Dazu gehen wir von einer *festen* Folge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ approximierender Polygone aus, die im Gebiet $\mathfrak{G}$ enthalten ist, und legen um t einen Kreis K mit beliebigem Radius ϱ. Sei nun der von m zu t führende Weg $\mathfrak{l}$ irgendwie gezeichnet, so gibt es ein erstes Polygon $\mathfrak{P}_\nu$, das auch den Punkt t approximiert und überdies die Eigenschaft hat, daß der Weg $\mathfrak{l}$ sowohl es selbst, wie auch alle Polygone $\mathfrak{P}_{\nu+\varrho}$ innerhalb des Kreises K kreuzt. Sei p_ν sein *erster* Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{l}$; durch ihn zerfällt $\mathfrak{l}$ in einen Streckenzug $l'_\nu = t \ldots p_\nu$, der in $\mathfrak{J}(K)$ liegt, und einen Streckenzug l_ν, der in $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}_\nu)$ enthalten ist. Dies ist ein Streckenzug endlicher Seitenzahl. Ihn wählen wir noch so, daß er jedes in $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)$ enthaltene Polygon der Folge je einmal kreuzt.

Da nun K ein *beliebiger* Kreis ist, so kann man den zu t führenden Weg sukzessive auch so wählen oder abändern, daß er *alle* Polygone der Folge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ nur *je einmal* kreuzt. *In dieser Weise sollen die Wege sämtlich gewählt werden.*

Um nun zu zeigen, daß man jede endliche oder abzählbare Menge solcher Wege so zeichnen kann, daß keine zwei einander kreuzen, ist nur nachzuweisen, daß diese Eigenschaft sich von ν auf $\nu + 1$ übertragen läßt. Seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \ldots \mathfrak{l}_\nu$ die ν bereits vorhandenen Wege. Wird nun noch ein Punkt $t_{\nu+1}$ hinzugenommen, so kann man um ihn einen Kreis $K_{\nu+1}$ legen, der alle Wege $\mathfrak{l}_i$ *ausschließt*. Man kann daher innerhalb $K_{\nu+1}$ den Weg $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ den obigen Bedingungen gemäß wählen; und da die Erfüllung dieser Bedingung das außerhalb $K_{\nu+1}$ liegende Stück nicht beeinflußt, so läßt sich auch dieses Stück in der verlangten Weise zeichnen. Also folgt:

XVI. *Hat man auf $\mathfrak{T}$ eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von erreichbaren Punkten t, so kann man die zu ihnen führenden Wege so bestimmen, daß keine zwei einander kreuzen.*

Dagegen läßt sich der Satz von $\{\nu\}$ auf ω nicht ohne weiteres ausdehnen.

Nunmehr lassen sich die Zerlegungssätze fast unmittelbar aussprechen.

---

1) Später werden wir die im folgenden abgeleiteten Sätze auf beliebige Wege übertragen; die obige Beschränkung bewirkt eine Vereinfachung der Beweisführung (vgl. Kap. V § 17).

Zwei Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, die den Punkt m von $\mathfrak{J}$ (oder $\mathfrak{A}$) mit zwei Punkten c' und c'' einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ verbinden, zerlegen $\mathfrak{J}$ (oder $\mathfrak{A}$) in zwei eindeutig bestimmte Gebiete J_1 und J_2 (bzw. A_1 und A_2) und bestimmen eindeutig zwei Kurvenbogen C_1 und C_2.

Die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zerlegen nämlich jedes Polygon $\mathfrak{P}_\nu$, da sie es nur je einmal kreuzen, in zwei Streckenzüge $\mathfrak{p}_\nu'$ und $\mathfrak{p}_\nu''$. Sie zerlegen daher das Gebiet $J_\nu = \mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)$ in zwei Teilgebiete J_ν' und J_ν'' und bestimmen zwei Polygone P_ν' und P_ν'', so daß $J_\nu' = \mathfrak{J}(P_\nu')$ und $J_\nu'' = \mathfrak{J}(P_\nu'')$ ist. Setzt man nun

$$J_1 = \mathfrak{M}\{J_\nu'\} = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(P_\nu')\} \quad \text{und} \quad J_2 = \mathfrak{M}\{J_\nu''\} = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(P_\nu'')\},$$

so gehört jeder Punkt von $\mathfrak{J}$, der nicht Punkt von $\mathfrak{l}'$ oder $\mathfrak{l}''$ ist, entweder zu J_1 oder J_2. Ferner konvergieren die Streckenzüge $\{\mathfrak{p}_\nu'\}$ und $\{\mathfrak{p}_\nu''\}$ gegen zwei zusammenhängende Mengen C_1 und C_2, die im allgemeinen Teilmengen von $\mathfrak{C}$ sind und *Kurvenbogen* heißen sollen. Damit ist der Satz bewiesen.

Übrigens können die Kurvenbogen C_1 und C_2 Punkte außer c' und c'' gemeinsam haben; es kann sogar der eine Bogen Bestandteil des anderen sein, auch kann C_1 oder C_2 mit $\mathfrak{C}$ identisch sein.[1]) Man beweist noch leicht, daß die Kurvenbogen C_1 und C_2 durch die Punkte c' und c'' eindeutig bestimmt sind. Dagegen kann C_1 *niemals mit C_2 identisch sein*, wie sich aus Satz XIV unmittelbar ergibt.

In gleicher Weise führt man den Beweis für das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$.

Der Beweis für die *Gebiets*zerlegung bleibt bestehen, wenn man das Kurveninnere $\mathfrak{J}$ durch ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ ersetzt und eine in $\mathfrak{G}$ approximierende Folge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ benutzt. Man erhält wieder zwei Gebiete

$$G_1 = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(P_\nu')\} \quad \text{und} \quad G_2 = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(P_\nu'')\},$$

die Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ sind, und zwei Grenzmengen T_1 und T_2 der Streckenzüge $\{\mathfrak{p}_\nu'\}$ und $\{\mathfrak{p}_\nu''\}$, deren jede im allgemeinen wieder eine Teilmenge von $\mathfrak{T}$ ist. Überdies gehört jeder Punkt von T_1 zur Grenze von G_1, und jeder Punkt von T_2 zur Grenze von G_2.

Dies gilt allgemein, welche Lage die Punkte t' und t'' auch haben mögen. Nehmen wir t' und t'' zunächst wieder als Punkte der äußeren Randkurve $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$, so bestimmen sie zwei Kurvenbogen C_1 und C_2 von $\mathfrak{C}$, und es wird C_1 entweder mit T_1 identisch sein oder

1) Ein Beispiel liefert Figur 10 (S. 120). Wird ein Punkt von $\mathfrak{A}$ mit den Punkten $y = -1$ und $y = +1$ verbunden, so besteht C_1 aus dem Stück der y-Achse, während C_2 mit $\mathfrak{C}$ identisch ist.

aber Teilmenge von T_1, und ebenso C_2 Teilmenge von T_2 oder gleich T_2. Nehmen wir jedoch t' und t'' als zwei *beliebige* Punkte, so bestimmen sie immer noch zwei Gebiete G_1 und G_2, und jedes dieser Gebiete besitzt wiederum eine äußere Randkurve, die aus $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ und je einem Kurvenbogen C_1' bzw. C_2' besteht. Die Kurvenbogen C_1' und C_2' brauchen aber in diesem Falle *nicht* zugleich Teilmengen der Randkurve $\mathfrak{C}$ zu sein.[1]) Wir haben also dem Zerlegungssatz hier folgende Form zu geben:

Zwei Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, die den Punkt m eines einfach zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{G}$ mit zwei Punkten seiner Grenze $\mathfrak{T}$ verbinden, zerlegen $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete und bestimmen zwei Kurvenbogen, die Teilmengen von $\mathfrak{T}$ sind.

Im Gegensatz zur geschlossenen Kurve sind übrigens die Mengen T_1 und T_2 durch die Punkte t' und t'' im allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt; sie können vielmehr von den Wegen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ abhängen. Ferner können wieder sowohl T_1 und T_2, sowie C_1 und C_2 bezw. C_1' und C_2' Punkte außer t' und t'' gemein haben.

Die den Polygonen zukommenden Eigenschaften der Gebietsteilung übertragen sich also, falls man für die Teilung einfache Wege benutzt, unmittelbar auf jedes einfach zusammenhängende Gebiet. Die gestaltliche Teilung des Polygons selbst überträgt sich jedoch im allgemeinen nur in modifizierter Form.[2])

Werden auch metrische Eigenschaften in Betracht gezogen, so können noch erheblich tiefere Unterschiede Platz greifen. Ein Polygon kann nur in eine *endliche* Zahl getrennter Streckenzüge zerlegt werden, deren Breite eine Größe σ übersteigt. Bei einer geschlossenen Kurve kann die Menge solcher Streckenzüge *unendlich* werden. Dies lehren schon die einfachsten Typen. Bemerkenswert ist aber der zunächst paradox scheinende Satz, daß diese Menge auch *die Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$ haben kann. Dies wird durch das in § 10 erwähnte Beispiel (2) dargetan.

§ 13. *Anordnungssätze.* Es bedarf kaum besonderer Begründung, daß auch alle Sätze, die die Anordnung und Zerlegung polygonaler Ringgebiete betreffen, sich unverändert auf solche Gebiete übertragen lassen, bei denen die Polygone durch geschlossene Kurven ersetzt werden.

1) Ein Beispiel erhält man, wenn man in dem mit Stacheln besetzten Quadrat (vgl. Fig. 6 auf S. 115) die inneren Endpunkte von zwei Stacheln mit der Mitte des Quadrates verbindet. Die Kurvenbogen C_1' und C_2' bestehen aus den beiden Stacheln und je einem Teil des Quadratumfanges.

2) Besondere Sätze über Gebietsteilung und Zusammensetzung findet man im Beitrag II, Math. Ann. 59, S. 155, sowie auch bei Osgood, Bull. Am. Math. Soc. (1904) S. 94. Vgl. auch sein Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig (1906) S. 148.

Es genüge der Hinweis, daß es sich hier nur um die Anordnung von *Gebieten* handelt, und daß deren Anordnung sich deshalb von $\{\nu\}$ auf ω überträgt, weil stets das Gebiet $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu)$ Teilgebiet von $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_{\nu+1})$ bleibt. Beispielsweise bestimmt also jede einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ angehörige geschlossene Kurve mit dessen voller Grenze ein *Ringgebiet* usw. Ein Satz soll noch besonders bewiesen werden.

Es kann nämlich der Fall eintreten, daß man über die gegenseitige Lage von zwei Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, die keine gemeinsamen Punkte besitzen, nichts weiß, daß man aber Beziehungen ihrer Grenzen kennt, und es kann erforderlich sein, daraus auf ihre Lage zu schließen. In dieser Hinsicht besteht folgender Satz:[1])

XVII. *Gehört jeder Punkt einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{T}$ zur Grenze zweier Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, die keinen Punkt gemein haben, und gehört auch umgekehrt jeder Grenzpunkt von $\mathfrak{G}_1$ und jeder Grenzpunkt von $\mathfrak{G}_2$ zu $\mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Kurve, für die $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ Inneres und Äußeres bilden.*

So einfach dieser Satz scheint, so bedarf er doch eines ausführlichen Beweises.

Sei $\mathfrak{T}_1$ die volle Grenze von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ die von $\mathfrak{G}_2$. Da jeder Punkt von $\mathfrak{T}_1$ zu $\mathfrak{T}$ gehört, und jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist, also auch zu $\mathfrak{T}_2$ gehört, so gehört auch jeder Punkt von $\mathfrak{T}_1$ zu $\mathfrak{T}_2$. Ebenso ist das umgekehrte der Fall, d. h. $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ sind identisch. Daher haben $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ dieselbe Grenze.

Da sie nun keinen Punkt gemein haben, ist mindestens eines von ihnen geschränkt; es sei dies $\mathfrak{G}_1$, und $\mathfrak{C}_1$ sei seine äußere Randkurve. Nach § 11 ist aber ein geschränktes Gebiet durch seine Grenze eindeutig bestimmt; deshalb ist $\mathfrak{G}_2$ nicht geschränkt und liegt mithin in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$. Nun ist endlich jeder Punkt von $\mathfrak{T}_1$ auch Punkt von $\mathfrak{T}_2$, deshalb kann $\mathfrak{G}_2$ keine weiteren Grenzpunkte außer $\mathfrak{C}_1$ enthalten, und ist daher mit $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}_1)$ identisch. Ebenso folgt nun, daß $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}_1)$ identisch ist.

§ 14. *Gestaltliche Struktur der allgemeinsten perfekten Mengen.* Jede abgeschlossene nicht etwa abzählbare Punktmenge zerfällt nach dem Haupttheorem (III, § 1) in eine abzählbare Menge R und einen perfekten Bestandteil S. Es erhebt sich sofort die weitere Frage, welches die gestaltliche Natur des perfekten Bestandteils ist. Ist er zusammen-

1) Diesen Satz hatte ich zunächst benutzt, um auf ihn in Kap. V die Invarianz der geschlossenen Kurve zu gründen. Erst nachträglich bemerke ich, daß er dazu nicht nötig ist. Er ist daher für die Gesamtdarstellung entbehrlich.

hängend, so ist seine Struktur durch § 11 erledigt, ist er es nicht, so wird man die Forderung stellen, ihn in seine einzelnen Bestandteile aufzulösen.

Hier ergibt sich sofort eine Einteilung aller Mengen in zwei verschiedene Typen, je nachdem in ihnen *isolierbare* Kontinua enthalten sind oder nicht. Wir behandeln zunächst den zweiten Fall, für den also die Punkte einer linearen perfekten zusammenhangslosen Menge, sowie auch gewisse in ihnen errichtete Lote einfachste Beispiele geben. Sei S eine solche Menge.[1])

Da die Menge S nicht zusammenhängend ist, läßt sie sich in zwei ebenfalls perfekte Bestandteile S_1 und S_2 zerlegen, und keine der beiden Mengen S_i kann zusammenhängend sein oder einen zusammenhängenden isolierbaren Bestandteil enthalten, weil sonst auch S einen solchen Bestandteil enthielte. Jede Menge S_i ist daher vom gleichen Typus, wie die Menge S selbst; sie läßt daher ebenfalls eine Zerlegung in zwei Mengen S_{ik} zu, deren jede wieder vom gleichen Typus ist wie S. So gelangen wir zu einem Zerlegungsprozeß, der nie aufhören kann, also folgt:

XVIII. *Es gibt perfekte Mengen ohne isolierbare Kontinua, die sich unbegrenzt in Teilmengen von der gleichen Struktur zerlegen lassen, die die Gesamtmenge hat.*

Die so definierten Mengen bezeichne ich als Mengen *vom ersten Typus*. Sie können punkthaft, linienhaft und flächenhaft sein; eine flächenhafte Menge dieser Art erhalten wir z. B., wenn wir im obigen zweiten Beispiel die in den Endpunkten der punktfreien Intervalle errichteten Lote durch schmale Rechtecke ersetzen, die Teile dieser Intervalle als Grundlinien haben.

Sei zweitens $\mathfrak{S}$ eine Menge, die isolierbare Bestandteile[2]) enthält, und sei S' ein solcher, so kann man um S' eine approximierende Figur Π' so legen, daß sie den Rest der Menge ausschließt, daß also (§ 3) S' in $\mathfrak{J}(\Pi')$ liegt, während der Rest von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{A}(\Pi')$ enthalten ist. Hat dieser Rest ebenfalls einen isolierbaren Bestandteil S'', so kann man zu ihm in $\mathfrak{A}(\Pi')$ ebenso eine Figur Π'' konstruieren, die selbst in $\mathfrak{J}(\Pi'')$ liegt, während der Rest wieder in $\mathfrak{A}(\Pi'')$ enthalten ist usw. Da nun das Gebiet $\mathfrak{J}(\Pi'')$ Teil von $\mathfrak{A}(\Pi')$ ist, und polygonale Gebiete ohne gemeinsame Punkte nur in abzählbarer Menge möglich sind, so bricht dieser Abspaltungsprozeß nach einer höchstens abzählbaren Menge von Schritten ab, und wir finden folgende drei Möglichkeiten. Die Menge $\mathfrak{S}$ kann sich erstens auf eine endliche Zahl von Mengen $S^{(i)}$ reduzieren; sie

1) Die Gerade gehört der Menge S nicht an, da S sonst ein Kontinuum wäre.

2) Bestandteil bedeutet im folgenden immer ein Kontinuum.

kann zweitens außerdem eine Menge vom ersten Typus enthalten, und drittens kann $\mathfrak{S}$ unendlich viele Bestandteile $S^{(i)}$ enthalten. In den ersten beiden Fällen ist die Strukturanalyse zu Ende.

Im letzten Falle setzen wir

$$\mathfrak{S} = \sum S^{(i)} + \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{S}_1,$$

wo also $\mathfrak{R}_1$ aus einer unendlichen Zahl von Summanden besteht. Die Menge $\mathfrak{S}_1$ ist abgeschlossen und enthält überdies das Grenzgebilde S_ω aller $S^{(i)}$. Übrigens kann sie auch Punkte enthalten.

Ist die Menge $\mathfrak{S}_1$ zunächst vom ersten Typus, so ist die Strukturanalyse wiederum zu Ende. Ist sie es nicht, so unterwirft man $\mathfrak{S}_1$ dem gleichen Zerlegungsprozeß wie $\mathfrak{S}$, wobei nur zu beachten ist, daß man hierbei auch die der Menge $\mathfrak{S}_1$ etwa angehörigen Punkte in Betracht ziehen muß. Man erhält so Gleichungen der Form

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{S}_2, \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{S}_3, \ldots$$

und kann dies beliebig oft fortsetzen. Gelangt man nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einer letzten Menge $\mathfrak{S}_\nu$, die nicht mehr unendlich viele isolierbare Bestandteile enthält, so ist die Analyse zu Ende, und zwar kann $\mathfrak{S}_\nu$ analog dem für $\mathfrak{S}_1$ bemerkten außer einer endlichen Zahl getrennter Kontinua[1]) $S_\nu^{(i)}$ noch eine Menge vom ersten Typus enthalten. Die Zahl der Kontinua $S_\nu^{(i)}$ kann auch wieder Null sein.

Gibt es ein derartiges $\mathfrak{S}_\nu$ nicht, so muß die Abspaltung bis zu transfiniter Ordnung fortgesetzt werden. Dann ist jedes $\mathfrak{S}_\nu$ eine Menge, die unendlich viele isolierbare Bestandteile enthält, und es ist zu zeigen, daß dann eine Menge $\mathfrak{S}_\omega$ existiert, die von gleicher Struktur sein kann wie die Mengen $\mathfrak{S}_\nu$ selbst, daß also unser Schlußverfahren von $\{\nu\}$ auf ω fortsetzbar ist. Dies ist in der Tat der Fall; es wird sich außerdem zeigen, daß das Verfahren bei einer bestimmten transfiniten Ordnungszahl α zweiter Klasse sein Ende erreicht, so daß hier eine volle Analogie zum Haupttheorem vorliegt.[2]) Den Beweis führt man folgendermaßen:

Aus den Mengen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_\nu \ldots$ hebe man zunächst je einen Bestandteil beliebig heraus. Diese Bestandteile seien

$$S_1, S_2, \ldots S_\nu \ldots$$

Jedes S_ν ist isolierbarer Bestandteil von $\mathfrak{S}_{\nu-1}$ und hat daher einen endlichen Abstand von $\mathfrak{S}_\nu$; sei

$$\varrho(S_1, \mathfrak{S}_1) = \delta_1, \quad \varrho(S_2, \mathfrak{S}_2) = \delta_2, \ldots \quad \varrho(S_\nu, \mathfrak{S}_\nu) = \delta_\nu, \ldots$$

1) Dazu können eventuell auch wieder Punkte gehören.

2) Die obige Darstellung enthält daher auch einen Beweis des Haupttheorems.

Da weiter jede Menge S_i für $i > 2$ zu $\mathfrak{S}_2$ gehört, ebenso für $i > 3$ zu $\mathfrak{S}_3$ usw., so hat man auch

$$\varrho(S_1, S_\lambda) \geqq \delta_1, \quad \varrho(S_2, S_\lambda) \geqq \delta_2, \ldots \quad \varrho(S_\nu, S_\lambda) \geqq \delta_\nu, \ldots$$
$$\lambda > 1 \qquad\qquad \lambda > 2 \qquad\qquad \lambda > \nu$$

Man wähle nun zunächst $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}\delta_1$ und lege um S_1 eine im Abstand ε_1 approximierende Figur Π_1, so werden alle Mengen $S_\lambda\,(\lambda > 1)$ in $\mathfrak{A}(\Pi_1)$ liegen. Ist $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\delta_1$ und zugleich $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\delta_2$, und konstruiert man zu S_2 die im Abstand ε_2 approximierende Figur Π_2, so liegen erstens alle Mengen $S_\lambda\,(\lambda > 2)$ in $\mathfrak{A}(\Pi_2)$, und außerdem liegen die beiden Gebiete $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{J}(\Pi_1)$ und $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{J}(\Pi_2)$ außerhalb voneinander. Wir bezeichnen noch das gemeinsame Gebiet von $\mathfrak{A}(\Pi_1)$ und $\mathfrak{A}(\Pi_2)$ durch

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{D}\{\mathfrak{A}(\Pi_1), \quad \mathfrak{A}(\Pi_2)\};$$

ihm gehört jede Menge $S_\lambda\,(\lambda > 2)$ an.

So kann man fortfahren. Ist allgemein $\delta^{(\nu)}$ die kleinste der Größen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\nu$, und wählt man $\varepsilon_\nu < \frac{1}{2}\delta^{(\nu)}$, so wird die die Menge S_ν im Abstand ε_ν approximierende Figur Π_ν analoge Eigenschaften haben; je zwei Gebiete

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{J}(\Pi_1), \quad \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{J}(\Pi_2), \ldots \quad \mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{J}(\Pi_\nu)$$

liegen außerhalb voneinander, und außerdem liegt jede Menge $S_\lambda(\lambda > \nu)$ in dem Gebiet

$$\mathfrak{A}^{(\nu)} = \mathfrak{D}\{\mathfrak{A}(\Pi_1), \quad \mathfrak{A}(\Pi_2), \ldots \quad \mathfrak{A}(\Pi_\nu)\}.$$

Diese Eigenschaft überträgt sich unmittelbar von ν auf $\nu + 1$. Sie läßt sich aber auch von $\{\nu\}$ auf ω übertragen. Um dies nachzuweisen, ist zu zeigen, daß, wenn eine Menge $\mathfrak{S}_\omega$ existiert, wenn diese Menge unendlich viele isolierbare Bestandteile $S_\omega^{(\nu)}$ enthält, und wenn

$$\mathfrak{S}_\omega = \sum S_\omega^{(\nu)} + \mathfrak{S}_{\omega+1} = \mathfrak{R}_\omega + \mathfrak{S}_{\omega+1}$$

ist, man aus $\mathfrak{R}_\omega$ eine geeignete Menge S_ω so auswählen kann, daß die zugehörigen Gebiete $\mathfrak{G}_\omega = \mathfrak{J}(\Pi_\omega)$ und $\mathfrak{A}^{(\omega)}$ ebenfalls den obigen Bedingungen genügen. Dies ergibt sich folgendermaßen:

Sei S'_ω das Grenzgebilde aller Mengen $\{S_\nu\}$. Es ist Bestandteil von $\mathfrak{S}_\omega$. Man hat nun zu unterscheiden, ob es in der Menge $\mathfrak{S}_\omega$ Bestandteile gibt, die nicht zu S'_ω gehören, oder ob dies nicht der Fall ist. Im ersten Fall genügt es, S_ω von S'_ω verschieden zu wählen, im übrigen beliebig. Im zweiten Fall besteht gemäß der über $\mathfrak{S}_\omega$ gemachten Annahme die Menge S'_ω selbst aus unendlich vielen isolierbaren Bestandteilen. Alsdann sei S''_ω irgend einer von ihnen und S'''_ω der Rest. Man wähle dann für S_ω irgend einen Bestandteil von S'''_ω, und es sei

$\varrho(S''_\omega, S_\omega) = \delta_\omega$. Man kann dann (§ 5) aus den Mengen $\{S_\nu\}$ eine ebenfalls unendliche Teilmenge

$$\{S_{\nu\lambda}\} = S_{\nu 1}, S_{\nu 2}, \ldots S_{\nu\lambda}, \ldots$$

so auswählen, daß sie *nur* S''_ω als Grenzmenge haben. Ersetzt man dann die bisher benutzten Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ durch die zu diesen Mengen gehörigen Gebiete $\mathfrak{G}_{\nu\lambda}$, so werden diese Gebiete $\mathfrak{G}_{\nu\lambda}$ zusammen mit dem zu S_ω gehörigen Gebiet $\mathfrak{G}_\omega$ den Bedingungen genügen. Setzt man nämlich

$$\varrho(S_{\nu 1}, S_\omega) = \delta_{\nu 1}, \quad \varrho(S_{\nu 2}, S_\omega) = \delta_{\nu 2} \ldots \quad \varrho(S_{\nu\lambda}, S_\omega) = \delta_{\nu\lambda} \ldots,$$

so kann die untere Grenze aller $\{\delta_{\nu\lambda}\}$ nicht Null sein. Denn wäre sie es, und wählte man auf den Mengen $S_{\nu\lambda}$ Punkte t_λ so aus, daß

$$\varrho(t_1, S_\omega) = \delta_{\nu 1}, \quad \varrho(t_2, S_\omega) = \delta_{\nu 2}, \ldots \varrho(t_\lambda, S_\omega) = \delta_{\nu\lambda} \ldots$$

ist, so müßte, wenn t_ω irgend eine Häufungsstelle solcher Punkte $\{t_\lambda\}$ ist, für die die zugehörigen Größen $\delta_{\nu\lambda}$ gegen Null konvergieren, notwendig $\varrho(t_\omega, S_\omega) = 0$ sein, und der Punkt t_ω gehörte daher zu S_ω, während er nach Annahme dem Grenzgebilde aller $\{S_{\nu\lambda}\}$ und damit der Menge S''_ω zugehört. Damit ist aber der Beweis geliefert. Denn ist jetzt δ_ω die untere Grenze aller $\delta_{\nu\lambda}$, und konstruiert man zu S_ω die im Abstand $\varepsilon_\omega < \frac{1}{2}\delta_\omega$ approximierende Figur Π_ω, so wird das Gebiet $\mathfrak{G}_\omega = \mathfrak{J}(\Pi_\omega)$ die Eigenschaft haben, daß auch jetzt *je zwei* Gebiete

$$\mathfrak{G}_{\nu 1}, \mathfrak{G}_{\nu 2}, \ldots \mathfrak{G}_{\nu\lambda}, \ldots \mathfrak{G}_\omega$$

außerhalb voneinander liegen; und jede Menge $S_\alpha\,(\alpha > \omega)$ liegt sicher in dem Gebiet

$$\mathfrak{A}^{(\omega)} = \mathfrak{D}\{\mathfrak{A}(\Pi_1), \ldots \mathfrak{A}(\Pi_\nu) \ldots \mathfrak{A}(\Pi_\omega)\},$$

das sich wegen der eben genannten Eigenschaft der Gebiete $\mathfrak{G}_{\nu\lambda}$ nicht auf Null reduzieren kann.

Um nun auch noch das neue Gebiet $\mathfrak{G}_{\omega+1}$ der gleichen Bedingung gemäß zu wählen, hat man $2\varepsilon_{\omega+1}$ kleiner als δ_ω und $\delta_{\omega+1}$ zu wählen und kann eventuell so fortfahren. Da aber die Menge aller derartigen Gebiete abzählbar ist, so führt das Verfahren für eine bestimmte Ordnungszahl α zweiter Klasse zu Ende. Das gleiche muß daher auch für den Abspaltungsprozeß selbst der Fall sein.[1]) Man hat also

$$\mathfrak{S} = \sum_{1 \leq \nu < \alpha} \mathfrak{R}_\nu + \mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}_\alpha,$$

wo die Menge $\mathfrak{S}_\alpha$ unendlich viele isolierbare Kontinua nicht mehr enthält. Sie enthält daher entweder keines oder eine endliche Zahl,

1) Man beachte, daß der obige Beweis nicht ganz dem Abspaltungsprozeß folgt, sondern nur die *Existenz* einer Zahl α zeigen soll.

außerdem kann ihr wiederum noch eine Menge des ersten Typus angehören, genau wie es oben für $\mathfrak{S}_1$ der Fall war. Also folgt:

XIX. *Aus jeder perfekten Menge lassen sich durch eine endliche oder abzählbare Menge von Schritten nach und nach isolierbare Kontinua abspalten, bis die Menge entweder völlig erschöpft ist, oder aber eine Menge vom ersten Typus als Rest bleibt.*

§ 15. *Ausdehnung auf den Raum.* Ein großer Teil der vorstehenden Erörterungen ist von den Dimensionen des Raumes, in denen die betrachteten Punktmengen liegen, unabhängig; ein anderer Teil läßt sich ziemlich unmittelbar von der Ebene auf den Raum ausdehnen. Es war mein wesentlichstes Bestreben, die Beweismethoden so zu wählen, daß die Ausdehnung auf den Raum sich so gut wie von selbst versteht.

1. Der grundlegende Anordnungssatz bleibt für jeden R_n bestehen; er besagt, daß ein gewöhnliches Polyeder $\mathfrak{P}$ eine Zerlegung

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P} + \mathfrak{J}(\mathfrak{P}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{P})$$

bewirkt, die die gleichen Eigenschaften hat, wie die analoge Zerlegung der Ebene.[1]) Als neues Moment tritt der *Zusammenhang* des Polyeders auf. Von den in § 1 angeführten Polygonsätzen kommen für das folgende besonders die unter 2., 3. und 4. genannten in Betracht. Der erste dürfte eine unmittelbare Übertragung zulassen. Dagegen kann die Verallgemeinerung des zweiten nur in der Weise geschehen, daß man auch die Zusammenhangszahlen der die räumlichen Teilgebiete begrenzenden Polyederflächen in Betracht zieht, und sie den einzelnen Gebieten eventuell additiv hinzufügt.[2]) Endlich ruht die Möglichkeit, den Satz 4 zweckmäßig zu verallgemeinern, darauf, daß man erst ein räumliches Analogon der immer dichter werdenden zyklischen Anordnung einführt (vgl. auch Kap. V § 19). Eine entsprechende Theorie der nicht linearen Ordnungstypen ist aber noch nicht vorhanden.[3]) Eine Verallgemeinerung der Sätze 5 und 6 wird an den Stellen, wo wir sie nötig haben, im einzelnen vorgenommen werden.

---

1) Von einseitigen Flächen wird hier und im folgenden abgesehen.

2) Zwei einander durchdringende gewöhnliche Polyeder $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ können z. B. ein Ringgebiet bestimmen; dann hat man $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = 1$, $(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2) = 2$, während die das Gebiet $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ begrenzende Polyederfläche die Zusammenhangszahl 1 hat. Ist $\mathfrak{P}_1$ ringartig und $\mathfrak{P}_2$ gewöhnlich, so hat man unter denselben Bedingungen $(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2) = 2$, $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = 1$, während jetzt die Zusammenhangszahl von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ gleich 2 ist. Ihr *Überschuß* über die Zusammenhangszahlen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ist wieder gleich 1. Dies dürfte allgemeine Geltung haben.

3) Hierüber liegen nur einige Beiträge von Vahlen (Abstrakte Geometrie, Leipzig 1905 S. 16) und F. Rieß vor (Math. Ann. 61 (1905) S. 406 und Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn, 24 (1906) S. 340), die jedoch im wesentlichen nur Definitionen enthalten und daher dem obigen Bedürfnis nicht entsprechen.

2. Der Inhalt von § 2 ist teils von der Dimension unabhängig, teils unmittelbar auf den Raum übertragbar.

3. Der Begriff der approximierenden Figur gestattet eine unmittelbare Verallgemeinerung auf den Raum. Statt der acht ein einzelnes Quadrat $\mathfrak{q}$ umgebenden Quadrate sind jetzt die $3^3 - 1$ Würfel in Betracht zu ziehen, die einen Würfel w der Würfelteilung der Seite ε umgeben. Alle Würfel, die nebst ihren $(3^3 - 1)$ sie umlagernden von $\mathfrak{T}$ frei sind, bestimmen die polyedrale Figur Π, und es ist jetzt

$$1/2\,\varepsilon < \varrho(p, \mathfrak{T}) = \varrho(p, t) < \varepsilon\sqrt{3},$$

wenn wieder t ein zu p nächster Punkt von $\mathfrak{T}$ ist. Er hat sämtliche in § 2 genannten Eigenschaften. Die Menge $\mathfrak{T}$ liegt wieder in $\mathfrak{J}(\Pi)$.

4. Der Begriff und die Eigenschaften des abgeschlossenen Kontinuums sind von der Dimensionszahl völlig unabhängig.

5. Das Gleiche gilt von dem Begriff des Grenzgebildes einer Folge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ zusammenhängender Mengen; es bleiben daher auch für ihn die in § 5 ausgesprochenen Sätze bestehen. Im besonderen ist das Grenzgebilde zusammenhängender Mengen $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ unter den in § 5 genannten Voraussetzungen ebenfalls zusammenhängend.

Ein Kontinuum $\mathfrak{T}$, das in der Umgebung eines Punktes t nicht räumlich ist, kann dort flächenhaft oder linienhaft sein. Eine Definition dieser Eigenschaft können wir hier nur mit Hilfe der approximierenden Polyeder geben und der auf ihnen enthaltenen Streckenzüge oder Oberflächenteile, die das Kontinuum $\mathfrak{T}$ als Grenzgebilde besitzen. Dies genügt jedenfalls für solche Fälle, in denen man diese Kontinua nur mittels der approximierenden Polyeder einführt.

6. Auch der Begriff des Gebietes $\mathfrak{G}$ und seiner vollen Grenze ist ohne weiteres auf den Raum übertragbar.

7. Die Art, in der man den Zusammenhang des Gebietes mittels der Zusammenhangsverhältnisse der Figur Π definieren kann, bleibt ebenfalls der Sache nach bestehen. Wesentlich ist, daß auch hier die Zusammenhangszahl der Figur Π nur so abnehmen kann, daß sie jeden Wert, den sie einmal annimmt, auch wieder erreicht.

8. Geht man insbesondere zu solchen Gebieten über, für die $\mathfrak{T}_g$ ein Kontinuum ist, so kann man von der Figur Π wieder zu dem Polyeder $\mathfrak{P}$ übergehen, das einen Punkt μ einschließt, und kann die Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$ aus durch eine Folge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ solcher Polyeder approximieren. Auch ist klar, daß man das Polyeder $\mathfrak{P}$ wieder so legen kann, daß jede endliche Zahl von Punkten von $\mathfrak{T}$ von ihm approximiert wird, und daher schließlich auch so, daß für *jeden* Punkt t von $\mathfrak{T}$ die Relation $\varrho(t, \mathfrak{P}) < \sigma$ bei vorgegebenem σ erfüllt ist.

Dagegen tritt ein Unterschied gegen die Verhältnisse der ebenen Gebilde insofern ein, als auch bei zusammenhängender Menge $\mathfrak{T}$ der Zusammenhang des Gebietes $\mathfrak{G}$ kein einfacher zu sein braucht.

9. Daß sich auch die Definition des weiteren nicht abgeschlossenen Kontinuums auf den Raum übertragen läßt, ist evident; ebenso alle in § 9 von ihm genannten Eigenschaften.

Für das dort erwähnte Cantorsche Resultat ist dies kürzlich von C. Severini[1]) auf Grund folgender Auffassung geschehen. Er denkt sich zunächst in der Ebene die Punkte m und m_1 als Mittelpunkte projektiver Büschel, so gibt es wiederum solche Paare entsprechender Strahlen, die keinen der ausgeschlossenen Punkte enthalten. Ähnliches gilt im R_3 für zwei Ebenenbüschel, wenn abzählbar unendlich viele Punkte ausgeschlossen werden. Man kann aber im R_3 auch abzählbar unendlich viele Geraden $\{g\}$ ausschalten. Denn für irgend zwei Ebenenbüschel mit beliebigen Achsen a und b gibt es immer Ebenenpaare α und β, die keine Gerade g ganz enthalten. Andrerseits sind in α und β wieder nur abzählbar viele Punkte ausgeschlossen, also zwei in ihnen liegende Punkten m und m' über die Schnittlinie verbindbar.

Allgemeiner kann im R_ν eine Menge von Gebilden $M_\mu (\mu < \nu - 2)$ ausgeschlossen werden, so daß diejenige Teilmenge, die einem Gebilde $M_\lambda (\mu + 2 \leq \lambda \leq \nu)$ angehört, abzählbar ist, und es wird die Komplementärmenge immer noch ein weiteres Kontinuum darstellen. In ihm existieren überdies unendlich viele kontinuierliche Räume von $\lambda - (\mu + 1)$ Dimensionen.

10. Die Definition der geschlossenen Kurve läßt sich ohne weiteres auf den Raum ausdehnen und führt hier zum Begriff der geschlossenen Fläche Φ und zu der definierenden Relation

$$\mathfrak{R} = \Phi + \mathfrak{J}(\Phi) + \mathfrak{A}(\Phi),$$

und man beweist auch von ihr in derselben Weise wie in § 10, daß sie perfekt und zusammenhängend ist. Nur die Zusammenhangsverhältnisse bedingen wieder weitere gestaltliche Unterscheidungen; die Art des Zusammenhangs bestimmt sich auf Grund von 7), wenn man den Zusammenhang der in $\mathfrak{J}$ gegen Φ approximierenden Polyeder in Betracht zieht.

11. Die Beweise von § 11 sind ebenfalls von der Dimensionenzahl unabhängig; statt der geschlossenen Kurve tritt naturgemäß die geschlossene Fläche ein. Auch die Folgerungen, die dort für Folgen einschließender und ausschließender Polygone angeführt wurden, lassen sich ohne weiteres auf den Raum übertragen.

---

1) Atti Ist Veneto 65 (1906) p. 1301.

12. Beschränkt man sich auf *geschlossene* Flächen, so überträgt sich der Begriff des Weges und der Erreichbarkeit ohne weiteres auf den Raum[1]), ebenso die besondere Art, in der die Wege in § 12 gewählt werden; man hat nur statt der Kreise analoge Kugeln zu benutzen. Man kann also auch jede abzählbar unendliche Menge solcher Wege so legen, daß sie einander nicht kreuzen.

Die Übertragung der Zerlegungssätze kann folgendermaßen bewirkt werden. Auf einem approximierenden Polyeder $\mathfrak{P}$ nehme man ein räumliches Polygon P an, so kann man durch $\mathfrak{J}(\mathfrak{P})$ eine einfache polyedrale Fläche[2]) F hindurch legen, die das Polygon P enthält; sie zerlegt $\mathfrak{J}(\mathfrak{P})$ in zwei Teilgebiete J' und J''. Ist $\mathfrak{P}_1$ ein im Abstand $\varepsilon_1 < {}^1/_3\,\varepsilon$ approximierendes Polyder, und wird auf ihm ein analoges räumliches Polygon P_1 bestimmt, so kann man eine einfache polyedrale Fläche F' konstruieren, die in dem durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ bestimmten Hohlraum enthalten ist und mit F zusammen eine einfache polyedrale Fläche F_1' bildet; diese Fläche wird das Gebiet $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_1)$ analog in zwei Gebiete J_1' und J_1'' zerlegen.

Dies läßt sich für jedes weitere Polyeder $\mathfrak{P}_\nu$ der Folge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ in gleicher Weise ausführen. Werden nun die Polygone P_ν auf den Polyedern $\mathfrak{P}_\nu$ so gewählt, daß sie gegen eine linienhafte Teilmenge C einer Oberfläche Φ konvergieren, so wird Φ durch die Kurve C in zwei Flächenteile Φ' und Φ'' zerlegt, und das Gebiet $\mathfrak{J}(\Phi)$ in zwei Teilgebiete $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$, die ebenso definierbar sind, wie wir es bei der geschlossenen Kurve mittels der Gleichungen von § 12 getan haben.

Die Flächenteile Φ' und Φ'' können auch hier Bestandteile außer C gemein haben. Wesentlich ist, daß man in der gleichen Weise wie in § 12 zeigen kann, daß *Φ' und Φ'' nicht identisch sein können.*

13. Die Beweise der Anordnungssätze gestatten gleichfalls die Verallgemeinerung auf den Raum. Statt der Streckenzüge $\mathfrak{p}_\nu$ hat man Flächenteile zu wählen.

14. Auch die Beweise über die Struktur und Analyse der allgemeinsten abgeschlossenen Mengen sind von der Dimensionszahl durchaus unabhängig und können daher in ihren allgemeinen Resultaten auf den Raum übertragen werden.

15. Ich füge endlich hinzu, daß alle vorstehenden Ausführungen für jeden R_ν Geltung haben, sobald die grundlegenden Polyedersätze für ihn als giltig angesehen werden können. Dabei ist zu beachten, daß man es immer nur mit Polyedern zu tun hat, die aus lauter *kongruenten Würfeln* aufgebaut sind.

1) Genauer gehe ich hierauf in Kap. V § 19 ein.

2) D. h. eine, die sich nirgends durchdringt.

§ 16. *Existenzgebiet einer eindeutigen analytischen Funktion.* Das Existenzgebiet einer eindeutigen analytischen Funktion ist seiner Definition gemäß stets ein engeres nicht abgeschlossenes Kontinuum, also ein *Gebiet.* Wie zuerst von G. Mittag-Leffler und alsbald von C. Runge bewiesen wurde[1]), kann jedes zusammenhängende Gebiet in der Weise Existenzgebiet einer eindeutigen analytischen Funktion sein, daß die Gebietsgrenze die singulären Stellen der Funktion darstellt[1]); daher ist die Frage nach der allgemeinsten gestaltlichen Struktur des Existenzgebiets leicht zu beantworten. Nach dem Haupttheorem gestattet die Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ zunächst die Zerlegung $\mathfrak{T} = R + \mathfrak{S}$, und nach dem oben bewiesenen Satz XIX ist $\mathfrak{S}$ wieder in die Summanden $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}_\alpha$ zerlegbar. Sie zeigen, wie sich $\mathfrak{S}$ aus linienhaften Bestandteilen aufbaut. Der Fall, daß $\mathfrak{S}_\alpha$ auch flächenhafte Bestandteile enthält, kommt für die Gebietsgrenze einer analytischen Funktion nicht in Frage.

Das einfachste Beispiel einer sich natürlich einstellenden Menge singulärer Punkte, dem man in der Funktionentheorie begegnet, liefert die automorphe Funktion, deren Fundamentalbereich aus $2n$ einander ausschließenden Kreisen mit gemeinsamem Orthogonalkreis besteht. Durch fortgesetzte gegenseitige Spiegelung der Kreise entsteht eine auf dem Orthogonalkreis liegende zusammenhangslose perfekte Menge, die die Grenzpunkte der zugehörigen automorphen Funktion enthält. Haben die Kreise keinen Orthogonalkreis, so bilden auch dann die zugehörigen Grenzpunkte immer noch eine zusammenhangslose perfekte Menge. In dem einfachen Falle $2n = 4$ hat man gezeigt, daß sie den Flächeninhalt Null hat; beim Orthogonalkreissystem ist auch ihr linearer Inhalt gleich Null.[2])

Um insbesondere einfachste Funktionen mit beschränktem Existenzgebiet wirklich herzustellen, benutzt man den Punktmengensatz, daß sich jede abgeschlossene Menge als Ableitung einer Menge isolierter Punkte darstellen läßt. Es genügt daher, daß man von einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ ausgeht, die die Ebene in zwei Gebiete zerlegt, und in der Fläche des einen, z. B. in $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$, eine abzählbare Punkt-

---

1) Vgl. besonders Acta math. 4 (1884) S. 1 und 6 (1885) S. 229. Es ist hier nicht der Ort, näher auf die Beweise dieses Satzes und die an ihn anschließende Literatur einzugehen, doch bemerke ich, daß die Mittag-Lefflersche Beweismethode genau der Cantorschen Punktmengenanalyse folgt und auf ihr beruht.

2) Vgl. R. Fricke, Math. Ann. 44 (1894) S. 578, H. Weber, Gött. Nachr. 1886, S. 359 und F. Schottky, Journ. f. Math. 101 (1887) S. 227. Für $2n > 4$ liegen analoge Untersuchungen nicht vor.

menge $\{a_\nu\}$ wählt, deren Ableitung die Kurve $\mathfrak{C}$ ist. Bei geeigneter Wahl der Konstanten A_ν und der Kurve $\mathfrak{C}$ stellt dann der Ausdruck

$$\mathfrak{A}(z) = \sum_\nu \frac{A_\nu}{z - a_\nu} \tag{1}$$

eine allein im Gebiet $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ existierende eindeutige analytische Funktion dar, für die $\mathfrak{C}$ eine natürliche Grenze bildet. Diese Methode haben zuerst E. Goursat[1]) und H. Poincaré[2]) benutzt, und zwar in der Weise, daß sie $\mathfrak{C}$ als konvexe Kurve, insbesondere auch als ein konvexes Polygon voraussetzten.[3])

Die Ausdrücke $\mathfrak{A}(z)$ geben insbesondere, wenn man die a_ν auf dem Einheitskreis überall dicht annimmt, Taylorsche Reihen, die nicht fortsetzbar sind, und wenn man die a_ν *außerhalb* des Einheitskreises wählt, aber so, daß alle Punkte des Einheitskreises Grenzpunkte der Menge $\{a_\nu\}$ sind, so kann man durch geeignete Wahl der A_ν sogar bewirken, daß diese Ausdrücke nebst ihren sämtlichen Ableitungen in allen Punkten des Einheitskreises konvergieren (vgl. auch § 18). Pringsheim hat diese Ausdrücke auch benutzt, um im reellen Gebiet Taylorsche Reihen herzustellen, die nebst ihren sämtlichen Ableitungen für jeden Wert von x konvergieren, ohne aber die Funktion darzustellen.[4])

§ 17. *Die Konvergenzmenge eines analytischen Ausdrucks.* Die Konvergenzpunkte eines analytischen Ausdrucks brauchen ein Kontinuum irgend welcher Art nicht zu bilden. Ihre Gesamtheit kann bekanntlich in der Weise in Gebiete zerfallen, daß auf der Grenze der Gebiete die Konvergenz aufhört. Auch die Erkenntnis dieser Tatsache hat sich an die Ausdrücke der Form (1) geknüpft.[5])

---

1) C. R. 94 (1882) p. 716 u. Bull. Sc. math. (2) 11 (1887) p. 109.

2) Acta soc. fenn. 12 (1883) p. 343 u. Am. Journ. of Math. 14 (1892) S. 101. Für die Kurve wird im Allgemeinen die Existenz einer Normale vorausgesetzt.

3) Andere Beispiele sind später von verschiedenen Seiten in Fülle aufgestellt worden. Ich begnüge mich mit zwei Hinweisen: 1) Ein erstes höchst einfaches Beispiel gab T. J. Stieltjes, Bull. des Sc. math. 2 (11) 1887, S. 46. 2) Wie Osgood zeigte, kann man jede geschlossene Kurve zu dem gleichen Zweck wählen, Bull. Am. mat. Soc. (2) 5 (1898) p. 14.

4) Es genüge auf die Abhandlungen in Math. Ann. 42 (1893) S. 153 u. 44 (1894) S. 51 hinzuweisen, wo reichliche weitere Literatur angegeben wird. In der letzten Arbeit werden nach derselben Methode auch beständig divergente Taylorsche Reihen gebildet.

5) Hierauf wies zuerst Weierstraß hin, Ber. Berl. Ak. 1880, S. 719. Ein einfaches Beispiel hatte schon E. Schröder gegeben, Zeitschr. f. Math. 22 (1876) S. 184; ein anderes gab alsbald J. Tannery, Ber. Berl. Ak. 1881, S. 218. Vgl. auch J. Appell, Acta math. 1 (1882) S, 145 u. Pringsheim, Math. Ann. 22 (1883) S. 109.

Bilden die Konvergenzpunkte ein Kontinuum, so kann dies auch ein abgeschlossenes Kontinuum sein; ist es nicht abgeschlossen, so kann es sowohl ein engeres wie ein weiteres Kontinuum sein. Aus diesem Grunde stellt sich hier eine Fülle von Möglichkeiten ein, die einer näheren Betrachtung bedarf.

Sei zunächst die Konvergenzmenge des Ausdrucks

$$\mathfrak{A}(z) = \sum f_\nu(z)$$

ein *Gebiet* $\mathfrak{G}$, so kann man nach der Verteilung der Punkte *ungleichmäßiger Konvergenz* fragen.[1] Sind alle Funktionen $f_\nu(z)$ in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ eindeutige analytische Funktionen, und konvergiert $\sum f_\nu(z)$ für jeden Punkt z des Gebietes, so bilden die Punkte ungleichmäßiger Konvergenz, wie aus ihrer Definition unmittelbar folgt, eine *abgeschlossene* Punktmenge Q.

Diese Punktmenge kann insbesondere auch eine Gebietsteilung des Gebietes $\mathfrak{G}$ bewirken, in eine endliche oder auch unendliche, naturgemäß abzählbare Menge von Teilgebieten $\mathfrak{G}_\nu$, so daß in jedem Teilgebiet die Konvergenz eine gleichmäßige ist. Dann stellt $\sum f_\nu(z)$ nach einem bekannten Satze von Weierstraß für jedes einzelne Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ eine analytische Funktion dar. Runge hat gezeigt, daß die Weierstraßsche Bedingung zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist. Er konstruierte ein Beispiel eines analytischen Ausdrucks, der auf gewissen Kurven eines Bereiches ungleichmäßig konvergiert und doch in dem ganzen Bereich die nämliche analytische Funktion dar-

---

1) Vgl. die analogen Betrachtungen über reelle Funktionen in Bericht I, S. 223.

Nach Weierstraß heißt ein Punkt z ein Punkt *gleichmäßiger* Konvergenz, wenn es einen ihn umgebenden Kreis gibt, so daß für alle Punkte der Kreis*fläche dieselbe* Gliederzahl N hinreicht, um den Rest der Reihe unter eine Schranke σ herabzudrücken. Gibt es für einen Konvergenzpunkt z eine solche Kreisfläche nicht, so ist z ein Punkt *ungleichmäßiger* Konvergenz. Sind alle Punkte eines *abgeschlossenen* Kontinuums $\mathfrak{T}$ Punkte gleichmäßiger Konvergenz, so gibt es gemäß dem Borelschen Theorem (Kap. III, § 2) eine endliche Zahl von Punkten der Menge $\mathfrak{T}$, deren Kreisflächen die ganze Menge $\mathfrak{T}$ einschließen. Die Reihe konvergiert dann auch in $\mathfrak{T}$ in dem Sinne *gleichmäßig*, daß es für *alle* Punkte von $\mathfrak{T}$ eine Gliederzahl N gibt, die den Rest unter σ herabdrückt. Dies braucht nicht mehr erfüllt zu sein, wenn die Punkte gleichmäßiger Konvergenz ein nicht abgeschlossenes Kontinuum, also ein *Gebiet*, bilden, in Analogie zu den Sätzen von Kap. III, § 2. Trotzdem pflegt man auch in diesem Falle vielfach zu sagen, daß die Reihe für das *ganze* Gebiet gleichmäßig konvergiert, wie z. B. eine Potenzreihe innerhalb des Konvergenzkreises. Diesem einfacheren Sprachgebrauch bin ich auch oben gefolgt. Genauer wäre es, den engeren und den weiteren Begriff der gleichmäßigen Konvergenz zu unterscheiden.

stellt.[1]) Später hat Osgood einen Satz ausgesprochen, aus dem hervorgeht, daß der hier erörterte Fall zugleich der allgemeinste ist, der eintreten kann; er lautet:

XX. *Sind alle Funktionen $f_\nu(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ eindeutig und analytisch, und konvergiert $\sum f_\nu(z)$ für alle Punkte dieses Gebiets, so zerfällt es immer in eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Teilgebieten, so daß in jedem Teilgebiet $\mathfrak{G}_\nu$ die Summe gleichmäßig konvergiert und daher eine analytische Funktion darstellt.*[2])

Übrigens brauchen analog dem Rungeschen Resultat die zu den verschiedenen Gebieten $\mathfrak{G}_\nu$ zugehörigen Funktionen nicht sämtlich verschieden zu sein; es ist vielmehr möglich, daß die eine die analytische Fortsetzung der andern ist. Beispiele hat Osgood angegeben. Dabei ist zu beachten, daß gemäß § 11 nicht etwa jeder Punkt von $\mathfrak{G}$ Grenzpunkt eines *einzelnen* der Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ sein muß; er kann auch zu ihrem Grenzgebilde gehören, ohne Grenzpunkt eines einzelnes Gebietes zu sein.[3]) Man kann übrigens den Osgoodschen Satz auch dahin aussprechen, daß die Punkte ungleichmäßiger Konvergenz *in keinem Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ überalldicht* liegen. Daraus ergibt sich das weitere, da sie überdies eine abgeschlossene Menge bilden, gemäß Satz XV unmittelbar.

Die Kenntnis der interessanten Tatsache, daß die Konvergenzmenge eines analytischen Ausdrucks auch ein *weiteres* Kontinuum sein kann, verdanken wir Borel. Wir können sie folgendermaßen aussprechen.

XXI. *Die Konvergenzmenge kann ein weiteres Kontinuum sein, während das Existenzgebiet stets ein engeres Kontinuum ist.*

Die einfachsten Ausdrücke, die Borel zu diesem Zwecke benutzt, sind die obigen Reihen

$$(1) \qquad \mathfrak{A}(z) = \sum \frac{A_\nu}{z - a_\nu},$$

wo die Punktmenge $\{a_\nu\}$ wieder in einem gewissen ebenen Gebiet $\mathfrak{G}$ angenommen wird, aber jetzt in ihm auch ganz oder teilweise überalldicht liegen kann. Um jeden Punkt a_ν lege man nun einen in $\mathfrak{G}$

---

1) Acta math. 6 (1885) S. 245. Speziellere Bedingungen hat G. Vitali angegeben Atti Torino 39 (1904) S. 22.

2) Ann. of Math. (2) 3 (1901) S. 25. Später sind eine Reihe einfacherer Beweise gegeben worden; vgl. die bezüglichen Arbeiten von C. Arzelà, M. B. Porter Severini und Vitali.

3) Vgl. die in § 5 enthaltenen Beispiele.

enthaltenen Kreis K_ν mit dem Radius ϱ_ν, so daß $\sum \varrho_\nu < \varepsilon$ ist, so erhält man die in Kap. III, § 3 erwähnte Menge. Man hat also

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(K_\nu)\} + Q = \mathfrak{K} + Q,$$

und zwar enthält $\mathfrak{K}$ jeden Punkt, der innerer Punkt eines Kreises K_ν ist, während zu Q insbesondere auch die nicht zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Punkte der Kreise K_ν und ihre Grenzpunkte gehören. Es ist also Q eine abgeschlossene Menge, die, wenn die Punkte a_ν in $\mathfrak{G}$ überalldicht liegen, nirgends flächenhaft ist. Andererseits gehört zur Menge $\mathfrak{K}$ jedes Gebiet $\mathfrak{J}(K_\nu)$; die Gesamtfläche dieser Gebiete ist offenbar kleiner als $\varepsilon^2\pi$. Endlich gehören zu Q auch die Grenzen aller Gebiete, in die $\mathfrak{K}$ zerfällt, sowie deren Grenzgebilde.

Läßt man nun ε eine Wertfolge $\{\varepsilon_\nu\}$ mit $\lim \varepsilon_\nu = 0$ durchlaufen, so haben die Mengen

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_\nu, \cdots \quad \text{resp.} \quad Q_1, Q_2, \cdots Q_\nu, \cdots$$

die Eigenschaft, daß $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{K}_\nu$ und daher Q_ν Teilmenge von $Q_{\nu+1}$ ist, und man erhält schließlich

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}\{Q_\nu\} + \mathfrak{D}\{\mathfrak{K}_\nu\} = U + K.$$

Falls nun die Punkte a_ν in $\mathfrak{G}$ überalldicht angenommen werden, so sind auch beide Mengen U und K in $\mathfrak{J}$ überalldicht, und zwar gehören zu K offenbar auch die sämtlichen Punkte a_ν, während in die Menge U unendlich viele geschlossene Kurven eingehen. Keine dieser beiden Mengen ist abgeschlossen. Sie stellen im Sinn von Kap. III § 3 Borelsche Mengen dar.

Man kann nun, und dies ist der bekannte Borelsche Gedanke, die Größen A_ν des Ausdrucks $\mathfrak{A}(z)$ so wählen, daß dieser Ausdruck in allen Punkten einer der obigen Mengen Q_ν *gleichmäßig* konvergiert. Dies beruht auf denselben Relationen, wie das analoge Resultat im nearen Gebiet.[1])

Sei der Einfachheit halber A_ν reell, und sei $\sum u_\nu$ eine konvergente Reihe positiver Größen. Wird dann

(2) $$|z - a_\nu| = r_\nu \geq \varrho_\nu$$

---

1) Vgl. Bericht I, S. 243. Außer den dort genannten Arbeiten vgl. man besonders Acta math. 24 (1901) p. 309, sowie Leçons sur les fonctions méromorphes, Paris 1903, S. 82 ff. Dort werden auch Summen betrachtet, deren Nenner Potenzen und Produkte von Faktoren $z - a_\nu$ enthalten, und die Untersuchung allgemein auf die Ausdrücke $\Sigma \mathfrak{R}_\nu(z)$ ausgedehnt. Die Pole dieser Funktionen können sich übrigens gegenseitig teilweise aufheben. Daß nicht jeder Häufungspunkt von Polen ein singulärer Punkt zu sein braucht, bemerkte auch Osgood, Bull. Am. M S. (2) 1 (1895) S. 148.

gewählt, so heißt dies, daß z nicht dem Innern des um a_ν mit dem Radius ϱ_ν gelegten Kreises K_ν angehört. Nun wird die Reihe

$$\sum \left|\frac{A_\nu}{z - a_\nu}\right| = \sum \frac{A_\nu}{r_\nu}$$

immer dann für einen Wert z konvergieren, falls für hinlänglich großes ν

(3) $$\frac{A_\nu}{r_\nu} < u_\nu, \quad \text{also} \quad r_\nu > \frac{A_\nu}{u_\nu} = v_\nu$$

ist, und dies besagt, wie wir eben sahen, daß z_ν nicht im Innern eines um a_ν mit v_ν geschlagenen Kreises liegt. Die Reihe konvergiert daher für jeden Punkt der oben eingeführten Menge Q, vorausgesetzt, daß sich die Größen A_ν, u_ν, v_ν den Bedingungen gemäß bestimmen lassen. Dies ist aber leicht möglich. Die Relation

$$\sqrt{A_\nu} = \sqrt{u_\nu v_\nu} < \frac{u_\nu + v_\nu}{2}$$

zeigt nämlich zunächst, daß die Konvergenz von $\sum u_\nu$ und $\sum v_\nu$ diejenige von $\sum \sqrt{A_\nu}$ nach sich zieht; umgekehrt falls $\sum \sqrt{A_\nu}$ konvergiert, genügt es $u_\nu = v_\nu = \sqrt{A_\nu}$ zu setzen, um Reihen der verlangten Beschaffenheit zu erhalten. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz konvergenter Reihen $\sum u_\nu$ und $\sum v_\nu$ ist also die Konvergenz von $\sum \sqrt{A_\nu}$.

Da nun mit $\sum u_\nu$ auch $\sum g u_\nu$ eine konvergente Reihe ist, für jedes beliebige positive g, so bleiben alle Schlüsse bestehen, wenn man v_ν durch $v'_\nu = v_\nu : g$ ersetzt. Dadurch aber kann

$$\sum v'_\nu = \frac{1}{g} \sum v_\nu < \varepsilon$$

gemacht werden, und es läßt sich daher erreichen, daß unsere Reihen für alle Punkte der Menge U konvergieren. Diese Entwicklungen lassen sich für jedes ε_ν durchführen.

Man sieht zugleich, daß unsere Reihe für alle Punkte einer und derselben Menge Q_ν *gleichmäßig* konvergiert[1]), da für sie alle dieselbe Reihe $\sum u_\nu$ die Vergleichsreihe abgibt, d. h.:

XXII. *Die so definierten Summenausdrücke konvergieren für jeden Punkt der Menge U und konvergieren insbesondere gleichmäßig für alle Punkte einer Menge Q_ν resp. für jedes einer Menge Q_ν angehörige abgeschlossene linienhafte Kontinuum.*

1) Über die Bedeutung dieses Begriffes vgl. auch den Schluß dieses Paragraphen. Übrigens ist hier die engere Bedeutung im Sinne der Anm. auf S. 141 gemeint.

Die Borelschen Resultate stehen mit seinen übrigen weittragenden Untersuchungen im Gebiet der analytischen Funktionen in engem Zusammenhang; ich begnüge mich, hier auf ihre mengentheoretische und mehr formale Bedeutung hinzuweisen. Sie zeigen nämlich, daß gewisse Sätze, die man leicht als bevorzugte Eigenschaften der analytischen Funktionen betrachten kann, auch weiteren Funktionsklassen zukommen. Sie haften mit anderen Worten nicht an dem engeren Gebietsbegriff, sind vielmehr auf die weiteren nicht abgeschlossenen Kontinua ausdehnbar, und dies sogar auch dann, wenn diesem Kontinuum keinerlei Gebietsteil zugehört. Hierher gehört die Stetigkeit, die gleichmäßige Konvergenz, die Differenzierbarkeit, die Einheitlichkeit des Differentialquotienten für alle an sich zulässigen Wertmengen der unabhängigen Variablen, sowie auch die Integrierbarkeit längs einer Kurve. Da nämlich die obigen Reihen für alle Punkte einer Menge Q_ν im engeren Sinne gleichmäßig konvergieren, so gestatten sie sowohl die gliedweise Differentiation, wie die gliedweise Integration, immer mit der Maßgabe, daß als Wertgebiet der Variablen z, das für diese Prozesse in Betracht kommt, die Punktmenge Q_ν gesetzt wird.[1])

§ 18. *Die Eigenart der singulären Punkte.* Das Verhalten der eindeutigen analytischen Funktionen in der Nähe ihrer *wesentlich* singulären Punkte $\{s\}$ ist in neuerer Zeit eingehender studiert worden. Es hängt wesentlich mit dem *gestaltlichen* Charakter der von ihnen gebildeten Punktmenge $S = \{s\}$ zusammen und soll deshalb in Kürze erörtert werden.

Sieht man von dem elementaren Fall ab, daß der Punkt s ein isolierter Punkt von S ist, so ist er stets Grenzpunkt unendlich vieler wesentlich singulärer Punkte, und es ist zu unterscheiden, ob er ein Punkt abzählbarer oder nicht abzählbarer Ordnung ist (Kap. III, § 2). Im ersten Falle ist er stets auch Grenzpunkt isolierter Punkte. Daraus folgert man leicht, daß für ihn der Picardsche Satz gilt; die Funktion kann in seiner Umgebung alle Werte annehmen, höchstens mit Ausnahme von zweien, und jeden überdies unendlich oft. Jede Umgebung eines solchen Punktes s enthält nämlich immer noch unendlich viele Punkte von S, also auch unendlich viele diese Punkte umgebende Kreise, innerhalb deren die Funktion dem Picardschen Satz gehorcht, also

1) Vgl. auch die analogen Betrachtungen im Bericht I, S. 115. Dort wird gezeigt, daß Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf Funktionen übertragbar sind, die für *beliebige* abgeschlossene Mengen definiert sind, selbst auf solche, die keine Kontinua sind. Das obige stellt einen besonderen Fall dieser allgemeinen Tatsache dar.

jeden Wert, mit Ausnahme von höchstens zweien unendlich oft annimmt.

Ist s ein Punkt nicht abzählbarer Ordnung, so ist die vorstehende Erörterung immer dann auf ihn übertragbar, falls er zugleich Grenzpunkt isolierter Punkte $\{s_\nu\}$ ist. Trifft dies nicht zu, so ist zu unterscheiden, ob es in jeder Nähe von s linienhafte Bestandteile der Menge $S = \{s\}$ aller singulären Punkte gibt oder nicht. Im letzten Fall, den wir zunächst betrachten, enthält die Menge S in der Umgebung von s einen perfekten zusammenhanglosen Bestandteil S'. Alsdann hat man nach Painlevé folgende Möglichkeiten ins Auge zu fassen.[1]) Man lege um die Menge S' die im Abstand ε approximierende polygonale Figur, und betrachte, falls $\mathfrak{L}$ die gesamte Länge der Umfänge aller zu ihr gehörigen Polygone ist, das Verhältnis $\mathfrak{L}:\varepsilon$ und lasse die Teilmenge S' sich auf den Punkt s zusammenziehen und außerdem ε gegen Null konvergieren. Dann hängt das Verhalten der Funktion in s davon ab, ob sich für das Verhältnis $\mathfrak{L}:\varepsilon$ ein Grenzwert einstellt, und ob dieser Grenzwert Null, endlich oder unendlich ist. Der innere Grund ist der, daß für alle diese Untersuchungen der Cauchysche Integralsatz das Hauptmittel der Beweisführung darstellt.

Zur genaueren Charakterisierung des Verhaltens der Funktion $w = f(z)$ hat Painlevé den Begriff des *Unbestimmtheitsgrades* eingeführt.[2]) Wird nämlich in dem Existenzgebiet der Funktion ein *einfacher Weg* zum singulären Punkt s gezogen[3]), und um s ein Kreis K mit dem Radius ε gelegt, so wird den Punkten z dieses Weges, die innerhalb K liegen, eine gewisse Wertmenge $\{w\}$ entsprechen. Sei $W(\varepsilon)$ diejenige *abgeschlossene* Wertmenge, die *allen* derartigen Wegen entspricht, und die stets ein Kontinuum sein wird, so wird sie der Definition des Unbestimmtheitsgrades folgendermaßen zugrunde gelegt. Man lasse wieder ε gegen Null konvergieren, und es sei $\mathfrak{W} = \mathfrak{D}\{W(\varepsilon)\}$ die allen $W(\varepsilon)$ gemeinsame Wertmenge, die nach bekannten Sätzen ebenfalls

1) Vgl. besonders Ann. Fac. Sc. Toulouse 2 (1888); Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm (1897), S. 433 ff. und C. R. 131 (1900) S. 489. Vgl. auch L. Zoretti, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 13 ff.; Pompéju, Ann. Fac. Sc. Toulouse (2) 7 (1905) S. 265.

2) Vgl. die vorstehenden Zitate. In den C. R. 131 (1900) S. 489 finden sich auch einfache Beispiele von Funktionen mit Punkten völliger und teilweiser Unbestimmtheit.

3) Die Existenz eines solchen Weges wird ausdrücklich vorausgesetzt. Auch für die singulären Punkte der inversen Funktionen und deren Definition darf die Erreichbarkeit nicht außer acht gelassen werden, was ich beiläufig erwähne; vgl. eine Bemerkung von A. Hurwitz (C. R. 144 (1907) S. 63) zu den Ausführungen von Jordan in dessen cours d'analyse 2. Aufl. (1893) Bd. 1 S. 328.

abgeschlossen sein wird. Diese Menge bezeichnet Painlevé als den Unbestimmtheitsbereich, der dem Punkt s entspricht. Erfüllt er die ganze w-Ebene, wie es z. B. für einen isolierten wesentlich singulären Punkt der Fall ist, so ist s ein Punkt *völliger* Unbestimmtheit; reduziert sich $\mathfrak{W}$ auf einen einzigen Wert, so ist s ein Punkt der Bestimmtheit, und falls $\mathfrak{W}$ nur einen Teil der Ebene ausmacht, der linienhaft oder flächenhaft sein kann, heißt s ein Punkt *teilweiser* Unbestimmtheit. Gemäß den Sätzen von § 5 ist $\mathfrak{W}$ immer ein Kontinuum.

Die Painlevéschen Untersuchungen finden ihren bisherigen Abschluß in dem Satz, daß, wenn s ein solcher Punkt einer punkthaften Menge S ist, daß $\underline{\mathfrak{L}}:\varepsilon$ den Grenzwert Null hat, er ein Punkt völliger Unbestimmtheit ist.[1]) Für die beiden andern Fälle liegen analoge Resultate allgemeiner Tragweite noch nicht vor.

Von einem etwas andern Gesichtspunkte aus hat D. Pompéju die Abhängigkeit des Verhaltens der Funktion in einem singulären Punkt von ihrem gestaltlichen Charakter untersucht.[2]) Er knüpft dazu an den in Kap. III § 6 definierten Längeninhalt der Menge S an und zeigt, daß, wenn dieser Längeninhalt den Wert Null hat, *jeder* Punkt s ein Punkt vollständiger Unbestimmtheit ist. Für den Fall, daß die Menge S einen endlichen Längeninhalt besitzt, besteht ein solcher Satz nicht. Pompéju hat ein Beispiel einer punkthaften Menge S mit Längeninhalt konstruiert, deren sämtliche Werte geschränkt sind, die also in keinem singulären Punkt einen Punkt vollständiger Unbestimmtheit besitzt.[3]) Er gibt endlich noch ein Beispiel einer Funktion, deren Menge S punkthaft ist und endlichen Flächeninhalt hat, und die in jedem Punkt von S stetig ist. Die Menge S, die er hierzu benutzt, ist die von W. Veltmann angegebene (vgl. Kap. VI, § 17.)[4])

Wie bereits bemerkt, beruhen die Beweise der vorstehenden Resultate wesentlich auf dem Cauchyschen Integralsatz. Insbesondere ist Pompéju zu den seinigen so gelangt, daß er die allgemeinste Gültigkeit dieses Satzes in Betracht zog; er stellte die Frage, wann man

1) Diesen Satz beweist auch Zoretti a. a. O. S. 15. Für eine punkthafte Menge S sind übrigens *alle* ihre Punkte *erreichbar*; vgl. Kap. VI, § 17.

2) Ann. Fac. Toulouse (2) 7 (1905) S. 301.

3) Nicht lineare Mengen dieser Art erhält man in einfachster Weise so, daß man eine streckenweise konstante Funktion benutzt, deren Menge T Inhalt besitzt, (Bericht I S. 166) und von den ihr angehörigen Strecken absieht.

4) Die von Pompéju benutzten Beispiele haben sämtlich einen gewissen *homogenen* Charakter und zeigen daher einfachere Eigenschaften. Bei Mengen allgemeinster Art wird es immer nötig sein, in der obigen Art solche Definitionen in Betracht zu ziehen, die jeglichen Punkt für sich ins Auge fassen, so daß man mit einer sich auf s zusammenziehenden Teilmenge S' operiert.

behaupten kann, daß eine in einem Gebiet 𝔊 definierte Funktion an allen Stellen von 𝔊 regulär ist, falls es Punkte a von 𝔊 gibt, für die nur die Stetigkeit, aber nicht die Existenz der Ableitung bekannt ist.[1]) Er bewies zunächst, daß jede abzählbare Menge solcher Punkte $\{a\}$ belanglos ist. Sein allgemeinstes Resultat knüpft an die von ihm gegebene Spaltung einer perfekten Menge S in die Bestandteile S_1 und S_2 an, die in Kap. III § 6 erörtert wurde, und besagt, daß eine perfekte Menge $A = \{a\}$ immer dann und nur dann belanglos ist, falls ihr Bestandteil A_2 den Wert Null hat.

Falls in die Menge S auch Kontinua eingehen, so zeigen bereits die über die Taylorsche Reihe gemachten Bemerkungen, daß das Verhalten der Funktion in einem Punkt s, der einem Kontinuum angehört, höchst mannigfach sein kann. Sie kann in diesen Punkten bestimmt sein, sie kann aber auch in ihnen eine teilweise oder auch eine vollständige Unbestimmtheit besitzen, und das gleiche kann für einige oder auch sämtliche Ableitungen zutreffen. Man kann für gegebene singuläre Linien Funktionen des verschiedenartigsten Verhaltens konstruieren.[2])

---

1) Ist in jedem Punkt von 𝔊 die Stetigkeit und die Existenz der Ableitung bekannt, so ist die Funktion, wie Goursat gezeigt hat, analytisch. Trans. Am. Math. Soc. 1 (1900) S. 14.

2) Andere Beispiele gibt Painlevé a. a. O.

Kapitel V.

Die gestaltlichen geometrischen Invarianten.

Als Cantor den Beweis geliefert hatte, daß es möglich sei, die Punkte eines ebenen Kontinuums umkehrbar eindeutig den Punkten eines linearen Kontinuums zuzuordnen, fühlten die Geometer den Boden schwanken, der ihr Lehrgebäude trug. Um nur ein Beispiel zu nennen, so war der Riemannschen Definition der stetigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ihre Berechtigung genommen.[1]) Es galt also, die entstandene Unsicherheit zu beseitigen und die Schärfe der Begriffe wiederherzustellen. Die Lösung besteht bekanntlich in dem Satz, daß die Riemannsche Definition zu Recht besteht, wenn man der *umkehrbaren* Eindeutigkeit noch die *Stetigkeit* hinzufügt.

Mit dieser Erkenntnis war ein großes Gebiet neuer Untersuchungen erschlossen und eine Fülle neuer Aufgaben gestellt. Alle eigentlichen geometrischen Begriffe waren den umkehrbar eindeutigen und stetiger Transformationen des Raumes gegenüber als invariant zu erweisen.[2]) Hierher gehören insbesondere diejenigen, die im vorhergehenden Kapitel der gestaltlichen Analyse der geometrischen Gebilde zugrunde gelegt worden sind, woraus beiläufig folgt, daß sie in der Tat als die wahren und natürlichen Elementarbegriffe angesehen werden können, die man für die Einteilung und Kennzeichnung der Gebilde zu benutzen hat. Die Untersuchungen, die diesem Nachweis dienen, können, was die ebenen Gebilde betrifft, als abgeschlossen gelten. Ihrer Darstellung ist dieses Kapitel im wesentlichen gewidmet. Darüber hinaus habe ich auch die Eigenschaften erörtert, die den *einseitig* stetigen und eindeutigen Transformationen gegenüber invariant bleiben. Die Gesamtheit *dieser* Transformationen werde ich der Einfachheit halber als die

---

1) Vgl. G. Loria, Giorn. di mat. 25 (1887) S. 97.

2) A. Hurwitz dürfte die Aufgabe der Analysis Situs zuerst in dieser Weise definiert haben; vgl. Verh. des erst. intern. Math. Kongr. Zürich; Leipzig 1898, S. 102.

weitere Gruppe bezeichnen, so daß die umkehrbar eindeutigen und stetigen die *engere* Gruppe bilden.

Die Methoden ruhen wiederum ausschließlich auf geometrischer und mengentheoretischer Grundlage; sie benutzen keinerlei analytische Symbole. Bindende Schlüsse sind hier für den Analytiker meines Erachtens nur dann möglich, wenn er die gestaltlichen Verhältnisse der benutzten Symbole beherrscht; aus diesem Grunde kann von sicheren, auf analytischem Boden erwachsenen Resultaten nur da gesprochen werden, wo man die Funktionen, die die analytische Darstellung vermitteln, spezialisiert hat. Dies entspricht auch der vorhandenen Entwicklung. Die hier folgende Behandlung enthält dagegen nur solche gestaltliche Beschränkungen, die dem Problem eigentümlich sind, und gelangt so zu einer vollständigen Lösung.

Die einfachsten Invarianten sind *Grenzpunkt* und *Zusammenhang*; sie sind es für die engere und die weitere Gruppe (§ 1). Damit erweist sich auch bereits der Begriff des abgeschlossenen und des nicht abgeschlossenen *Kontinuums* als invariant. Ihnen reiht sich zunächst der Begriff der *geschlossenen Kurve* an (§ 3), sowie der des *Gebiets* (§ 5). Als einer der wichtigsten Hilfssätze erscheint hier und im folgenden der Satz, daß ein Kurvenbogen nicht Abbild einer geschlossenen Kurve sein kann. Auch die *Anordnung* ist als eine invariante Eigenschaft zu erweisen (§ 4). Ich gehe dann zum Nachweis der Invarianz des *Dimensions*begriffs über, gebe zunächst die historische Gestaltung des Problems und seiner Beweise (§ 6) und füge zuletzt einen einfachen Beweis hinzu, der sich auf die Invarianz des Gebiets und sonst nur auf den Mächtigkeitsbegriff stützt (§ 7).

Eine besondere Stellung nimmt unter diesen Problemen der *Jordansche Kurvensatz* ein. Jordan war es, der mit dem Beweis dieses Satzes zum ersten Male darauf hinwies, daß hier Probleme vorliegen, die bei strengerer Denkweise sämtlich des Beweises bedürftig sind.[1]) Sein Satz drückt die Invarianz der geschlossenen Kurve für den besonderen Fall aus, daß die Transformation sich nur auf den Kreis selbst bezieht, und behauptet die Invarianz des Kurvenbegriffs auch für diesen Fall. Beweise sind unter engeren und weiteren Bedingungen für die abbildenden Funktionen mehrfach gegeben worden. Einen einfachen Beweis, der das allgemeinste stetige Abbild betrifft, kann man im Anschluß an de la Vallée-Poussin führen (§ 8); ein anderer ist bereits in § 3 enthalten.

Der Kreis besitzt außerdem, daß er eine geschlossene Kurve ist, eine weitere Eigenschaft, die bei der umkehrbar eindeutigen und stetigen

1) Vgl. ähnliche Untersuchungen von Osgood, Bull. Am. Math. Soc. 10 (1904) S. 294.

Abbildung invariant bleibt, nämlich die *Erreichbarkeit* seiner sämtlichen Punkte. Sie kommt auch dem Abbild zu. Die Erreichbarkeit, insbesondere die *allseitige* Erreichbarkeit, bildet nämlich eine der grundlegendsten Invarianten, die sowohl der engeren wie der weiteren Gruppe eigentümlich sind (§ 15); sie ist damit die Quelle einer Reihe von Eigenschaften, die *jedem* eindeutigen und stetigen Abbild des Kreises zukommen.

Um zu diesen Resultaten zu gelangen, mußte ich einige Hilfsbegriffe einführen, nämlich die *einfache Folge* und die *Wegdistanz*, und ihre Bedeutung für den Erreichbarkeitsbegriff näher erörtern (§ 9, 10). Damit sind zugleich die Mittel geschaffen, um auch die *Umkehrbahrkeit des Jordanschen Kurvensatzes* darzutun und so zu den *notwendigen* und *hinreichenden* Eigenschaften der Punktmengen zu gelangen, die umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Kreises sein können. Sie sind Zusammenhang, Gebietsteilung und allseitige Erreichbarkeit. Ich teile zwei Beweise dieses Satzes mit, von denen der eine methodisch von Hilbert stammt und der zweite von mir selbst (§ 13).

Die so definierte Kurvengattung bezeichne ich als *einfache geschlossene Kurve.* Auf sie übertragen sich die wichtigsten Eigenschaften des Kreises und Polygons, insbesondere die, die ihre Teilung und Zerlegung betreffen, unbeschränkt (§ 11). Ein Beispiel bildet die Klein-Poincarésche Grenzkurve, die auftritt, wenn man ein von n einander zyklisch berührenden Kreisen gebildetes Kreisbogen-n-eck als Fundamentalbereich einer automorphen Funktion wählt. Der Beweis, daß sie für jedes n eine einfache geschlossene Kurve ist, kann auf Grund der Erreichbarkeitssätze leicht geführt werden (§ 14). Ebenso wird durch die Tatsache, daß Zusammenhang, geschlossene Kurve, Gebiet und Erreichbarkeit Invarianten der engeren Gruppe sind, der analoge Nachweis für die gesamten, die Struktur einer Punktmenge ausmachenden gestaltlichen Eigenschaften ermöglicht (§ 17).

Schließlich gebe ich noch einige Hinweise, inwiefern die vorstehenden Resultate auf den Raum übertragbar sind (§ 19). Auch in diesem Kapitel war es mein Bestreben, die Beweismethoden so zu wählen, daß sie diese Übertragung möglichst unmittelbar gestatten, und auch hier liegt die Unmöglichkeit daran, daß eine Theorie der räumlichen überalldicht werdenden Ordnungstypen in präziser Form noch nicht vorhanden ist und daß außerdem auch die Zusammenhangszahl als Invariante zu erweisen ist.

§ 1. *Grenzpunkt und Zusammenhang.* Die Gruppe aller umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Ebene bezeichne ich im Folgenden durch G, die Menge *aller* eindeutigen und stetigen

Transformationen überhaupt durch Γ; es ist dann die Gruppe G eine Teilmenge von Γ. Ich werde kurz die Menge Γ als die *weitere* und G als die *engere* Gruppe bezeichnen.[1]) Als Gebiet, das der Transformation unterliegt, ist im allgemeinen die ganze Ebene anzunehmen, oder aber ein die geometrischen Gebilde einschließender Bereich.[2]) Doch gibt es auch Sätze, bei denen die Abbildung nur für speziellere Bestandteile der Ebene in Frage kommt. Den Eigenschaften, die für die *inversen* Operationen der weiteren Gruppe Γ invariant bleiben, werden wir ebenfalls Aufmerksamkeit zu schenken haben.

Die einfachsten Invarianten sind *Grenzpunkt* und *Zusammenhang*; dies drückt sich in folgenden Sätzen aus:

I. *Die einfachste Invariante der Gruppe G, sowie der weiteren Gruppe Γ ist der Grenzpunkt, er ist zugleich eine Invariante der inversen Operationen von Γ.*

Der erste Teil dieses Satzes bedarf eines Beweises nicht; wir folgern sofort, daß mit ihm auch die Begriffe *abgeschlossen* und *perfekt* Invarianten der engeren Gruppe sind; der Begriff abgeschlossen ist es auch für die weitere. Einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$ entspricht also bei *jeder* stetigen Abbildung eine abgeschlossene Bildmenge $\mathfrak{T}$. Dagegen braucht einer perfekten Menge nicht notwendig eine perfekte zu entsprechen. Dies läßt sich nur in dem Fall beweisen, daß die inverse Abbildung endlichdeutig ist.[3])

Die Invarianz des Grenzpunkts für die inversen Operationen von Γ findet in folgendem Sinne statt. Sei wieder $\mathfrak{T}$ stetiges Bild einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$, sei T eine *abgeschlossene* Teilmenge von $\mathfrak{T}$, und sei die Menge S so bestimmt, daß sie *alle* Punkte enthält, die bei dieser Abbildung Bildpunkte von T sein können; dann wird behauptet, daß auch S eine abgeschlossene Menge ist. Dazu betrachte man eine Punktfolge $\{t_\nu\}$ mit t_ω als Grenzpunkt, und wähle zu t_ν einen Bildpunkt s_ν beliebig aus; ist dann s_ω *irgend ein* Grenzpunkt der Menge $\{s_\nu\}$, so muß ihm wegen der Stetigkeit wieder der Punkt t_ω entsprechen. Es gehört also auch s_ω der Menge S an. Daraus folgt:

---

1) Dies ist freilich formal nicht exakt, da Γ eine Gruppe nicht darstellt.

2) Dies ist immer gemeint, falls im Folgenden von der Gruppe G oder Γ gesprochen wird.

3) Einen Beweis für diesen Fall enthält der Bericht I S. 117. Ist die Abbildung unendlich vieldeutig, so kann man allen Punkten $\{s_\nu\}$ einer perfekten Menge $\mathfrak{S}$ *denselben* Punkt t der Bildmenge $\mathfrak{T}$ zuordnen und so erreichen, daß $\mathfrak{T}$ auch isolierte Punkte enthalten kann.

Übrigens folgt aus Satz III, daß dies nur für nicht zusammenhängende perfekte Mengen zutrifft. Derartige Abbildungen kommen im Folgenden nicht weiter in Betracht.

II. *Ist die Menge $\mathfrak{T}$ eindeutiges und stetiges Bild der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$, so kann zu jeder abgeschlossenen Teilmenge T von $\mathfrak{T}$ auch eine abgeschlossene Teilmenge S von $\mathfrak{S}$ bestimmt werden, deren Bild T ist.*

Dieser Satz findet dann eine wichtige Anwendung, wenn $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ Teilmengen solcher Mengen sind, deren eine ein stetiges Bild der andern ist.

Dagegen kann man nicht mehr behaupten, daß eine perfekte Teilmenge T stetiges Bild einer perfekten Teilmenge S sein müsse. Die Menge T kann auch Bild einer abgeschlossenen Menge sein.[1])

III. *Der Zusammenhang einer abgeschlossenen Menge ist sowohl für die engere wie für die weitere Gruppe eine Invariante.*

Dies ist, wenn es sich zunächst nur um die Gruppe G handelt, eine unmittelbare Folge der Definition des Zusammenhangs (Kap. IV, § 4). Sei nämlich $\mathfrak{T}$ Bild der *zusammenhängenden* Menge $\mathfrak{S}$. Wenn nun $\mathfrak{T}$ in zwei perfekte Teilmengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zerfiele, so müßten dem vorstehenden gemäß auch die Bildmengen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ perfekt sein. Da aber $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Menge $\mathfrak{S}$ genau einmal erschöpfen[2]), so ist dies ein Widerspruch damit, daß $\mathfrak{S}$ zusammenhängend ist.

Wir beweisen weiter, daß der Zusammenhang auch eine Invariante der Gruppe Γ ist. Falls nämlich $\mathfrak{T}$ in die abgeschlossenen Teilmengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zerfallen sollte, so sei $\varrho(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \delta$. Sind nun s' und s'' zwei Punkte von $\mathfrak{S}$, und t' und t'' ihre Bildpunkte, so kann man wegen der Stetigkeit eine Zahl ε so bestimmen, daß $\varrho(t', t'') < \delta$ ist, falls $\varrho(s', s'') < \varepsilon$ ist. Zwei Punkte t', t'', die Bildpunkte *solcher* Punkte s', s'' sind, gehören also *beide* zu $\mathfrak{T}_1$ oder *beide* zu $\mathfrak{T}_2$. Man denke sich nun in der Ebene der Menge $\mathfrak{S}$ eine quadratische Teilung mit der Seite $^1/_4\,\varepsilon$ und fasse irgend ein Teilquadrat $\mathfrak{q}$ ins Auge, das Punkte von $\mathfrak{S}$ enthält, so werden alle diesem Quadrat $\mathfrak{q}$ angehörigen Punkte von $\mathfrak{S}$ die Eigenschaft haben, daß ihre Bildpunkte entweder nur zu $\mathfrak{T}_1$ oder nur zu $\mathfrak{T}_2$ gehören. Außerdem müssen auch die acht Quadrate, die $\mathfrak{q}$ umgeben, falls in ihnen überhaupt Punkte von $\mathfrak{S}$ liegen, solche Punkte s enthalten, deren Bildpunkte derselben Teilmenge $\mathfrak{T}_i$ angehören, wie die Bildpunkte von $\mathfrak{q}$ selbst. Da es andererseits für jedes Quadrat $\mathfrak{q}$, in dem Punkte von $\mathfrak{S}$ liegen, *ein* solches Nachbarquadrat mindestens geben muß, so folgt weiter, daß alle Punkte von $\mathfrak{T}$ zu derselben Teilmenge $\mathfrak{T}_i$

1) So entspricht z. B. bei der Peanoschen Abbildung des Quadrats auf die Strecke einer das Quadrat durchziehenden Geraden eine abgeschlossene aber nicht perfekte Teilmenge der Strecke. Vgl. Bericht I S. 124.

2) Dies findet bei den Transformationen der weiteren Gruppe nicht statt, und deshalb versagt für sie der obige Beweis.

gehören, also eine von ihnen sich auf Null reduzieren müßte. Damit ist der Beweis geliefert.[1])

Hieraus ergibt sich weiter der folgende Satz:

IV. *Die Invarianz des Zusammenhangs gilt auch für nicht abgeschlossene Kontinua.*

Ist nämlich U ein solches, sind m und n zwei seiner Punkte, und ist $\mathfrak{T}$ irgend ein zu U gehöriges abgeschlossenes Kontinuum, dem m und n angehören, so sind die Bildpunkte m' und n' Punkte eines abgeschlossenen Kontinuums $\mathfrak{T}'$, das zu U' gehört.

Daß $\mathfrak{T}'$ ein Gebiet ist, wenn $\mathfrak{T}$ eines ist, kann hieraus noch nicht geschlossen werden (vgl. § 2 und 5).

Im Gegensatz zum Grenzpunkt braucht der Zusammenhang bei den inversen Transformationen der Gruppe Γ *nicht* invariant zu bleiben. Wenn $\mathfrak{T}$ zusammenhängend ist, so kann die Menge $\mathfrak{S}$ sogar durchaus zusammenhangslos sein.[2]) Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf ebene linienhafte Mengen, so besteht der folgende, leicht beweisbare Satz:

Jede linienhafte ebene perfekte Menge $\mathfrak{T}$ kann stetiges Abbild einer zusammenhangslosen linearen perfekten Menge $\mathfrak{S}$ sein.

Denken wir uns nämlich $\mathfrak{T}$ in ein Quadrat $\mathfrak{Q}$ eingeschlossen, so können wir die Fläche des Quadrates stetig auf die Einheitsstrecke abbilden. Der Teilmenge $\mathfrak{T}$ entspricht dann eine *Gesamt*teilmenge S der Einheitsstrecke, die dem Satz II gemäß abgeschlossen ist. Diese Menge kann aber leicht, falls sie nicht schon selbst perfekt ist, in eine perfekte Menge verwandelt werden.

In diesem Fall hat man nämlich gemäß dem Haupttheorem zunächst

$$S = R + S_1,$$

wo R eine abzählbare Menge *isolierter* Punkte bedeutet. Sei nun t_1 ein Punkt von $\mathfrak{T}$, der Bildpunkt eines Punktes r von R ist. Er ist gleichzeitig Grenzpunkt unendlich vieler Punkte $\{t^{(\nu)}\}$ von $\mathfrak{T}$. Diese sind Bildpunkte unendlich vieler Punkte $\{s^{(\nu)}\}$ von S, und falls s_1 einer ihrer Grenzpunkte ist, so muß ihm wegen der Stetigkeit der Punkt t_1 entsprechen. Gemäß unserer Definition der Menge S gehört

1) Die allgemeine Fassung des Satzes III bedingt, daß man auch den Punkt als Kontinuum zulassen muß.

Man beweist den Satz auch leicht im Anschluß an die oben gegebene Cantorsche Definition des Zusammenhangs. Einen solchen Beweis gibt C. Jordan, cours d'analyse, Bd. I, p. 51.

2) Man vgl. das oben S. 153 Anm. 1 genannte Beispiel.

daher der Punkt s_1 notwendig zu S und mithin auch zu S_1. Jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ ist also Bildpunkt eines Punktes von S_1. Man hat nun weiter

$$S_1 = R_1 + S_2$$

und folgert ebenso, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ auch Bildpunkt eines Punktes von S_2 ist usw. Dieser Schluß läßt sich aber nicht bloß von ν auf $\nu + 1$, sondern auch von $\{\nu\}$ auf ω fortsetzen.

In der Tat setzen wir

$$S = \sum R_\nu + S_\omega,$$

so ist die Zulässigkeit des Schlusses nur für den Fall zu erweisen, daß es in *unendlich vielen* Teilmengen R_ν je einen Punkt r_ν gibt, der den Punkt t als Bildpunkt besitzt. Da nun jeder Grenzpunkt der unendlich vielen Punkte r_ν zu S_ω gehört, und ihm wegen der Stetigkeit wieder der Punkt t entspricht, so enthält in diesem Fall auch S_ω einen Punkt, dessen Bildpunkt t ist. Nun ist aber die Zerlegung

$$S = R + \mathfrak{S},$$

wo $\mathfrak{S}$ der perfekte Bestandteil von S ist, durch alleinige Anwendung der Schlüsse von ν auf $\nu + 1$ und von $\{\nu\}$ auf ω erreichbar, mithin folgt nunmehr, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ auch in der perfekten Menge $\mathfrak{S}$ einen Bildpunkt besitzt.

Die Menge $\mathfrak{S}$ muß aber auch zusammenhangslos sein, da jedes Intervall einer Geraden solche Teilintervalle enthält, denen bei der Peanoschen Abbildung Flächenteile des Quadrats entsprechen.[1])

§ 2. *Das Invarianzproblem für die geschlossene Kurve und das Gebiet.* Die Invarianz des Gebietsbegriffs findet sowohl für die engere wie für die weitere Gruppe statt. Um jedoch zu präzisen Resultaten zu kommen, haben wir zu unterscheiden, ob die stetige Abbildung nur für jeden inneren Punkt des Gebietes vorliegt oder auch für seine Grenze.

Einen einwandfreien Beweis dafür, daß bei der eindeutigen und stetigen Abbildung einer Ebene auf eine andere eine flächenhafte Umgebung in eine flächenhafte übergeht, hat zuerst C. Jürgens geliefert[2]). Der von ihm bewiesene Satz lautet folgendermaßen:

---

1) Der Satz gilt auch noch, wenn $\mathfrak{T}$ keine linienhafte Menge ist. Ist sie flächenhaft, so braucht man sie nur als Bestandteil eines Würfels zu betrachten und diesen Würfel auf die Einheitsstrecke stetig zu beziehen; man folgert dann analog, daß die Bildmenge perfekt ist und kein Intervall der Strecke ganz enthalten kann. Analog läßt sich der Satz für jede perfekte Menge eines R_n als richtig erweisen.

2) Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Funktionen von zwei reellen Veränderlichen, Leipzig, 1879.

Lehrsatz: Sind y_1 und y_2 eindeutige und stetige Funktionen für das Innere und den Umfang eines Kreises, und entspricht jedem Wertepaare y_1, y_2 nur eine *endliche* Zahl von Punkten k des Kreises, so gehört der von den Punkten $\{y_1, y_2\}$ gebildeten Punktmenge in jedem Fall ein Flächenstück an.

Ist die Beziehung insbesondere umkehrbar eindeutig, so wird noch bewiesen, daß jedem innern Punkt des Kreises ein innerer Punkt des Gebietes entspricht, das Abbild des Kreises ist.

Der Jürgensche Beweis stützt sich auf gewisse approximierende Polygone und benutzt insofern die nämliche Grundlage wie dieser Bericht.

Andere Beweise der Invarianz sind für die Quadratfläche und ihr Abbild vom Verfasser und später von Bernstein und Osgood gegeben worden.[1]) Sie ruhen sämtlich auf dem Jordanschen Kurvensatz (§ 8), gehen also davon aus, daß das Abbild des Quadrats $\mathfrak{Q}$ eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}'$ ist, die die Ebene in ein Äußeres und Inneres zerlegt. Man schließt dann zunächst, daß alle Bildpunkte des Quadratinnern sämtlich entweder zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ oder sämtlich zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$ gehören, und kann weiter zeigen, daß der zweite Fall auszuschließen ist.

Der weitere Beweis kann nach zwei verschiedenen Methoden geführt werden. Entweder auf Grund der Zerlegungssätze oder aber mit Hilfe approximierender Polygone und ihrer Bilder.

Zieht man nämlich im Quadrat $\mathfrak{Q}$ eine Teilungslinie, so entspricht ihr ein in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ enthaltener einfacher Kurvenbogen, und es zerfällt durch ihn $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ in zwei Teilgebiete, von denen man zeigen kann, daß sie die gleiche Anordnung besitzen wie die Teilgebiete des Quadrats. Wird nun das Quadrat durch Zerlegung in Teilquadrate mit einer überalldicht werdenden Menge von Teilungslinien bedeckt, so ist jeder Punkt der Quadratfläche, der nicht einer dieser Teilungslinien angehört, Grenzpunkt von Quadraten, deren Flächen einander als Bestandteil enthalten. Sei

$$\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{q}_{ik},\ \mathfrak{q}_{ikl} \cdots \mathfrak{q}_N \cdots$$

eine solche Folge. Ihre Bildmengen

$$\mathfrak{q}'_i,\ \mathfrak{q}'_{ik},\ \mathfrak{q}'_{ikl} \cdots \mathfrak{q}'_N \cdots$$

haben dann die gleiche Lagenbeziehung wie die Quadrate $\mathfrak{q}_N$, und wegen der Stetigkeit konvergieren sie ebenfalls gegen einen und nur einen Punkt, der dem Innern einer jeden angehört. Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß auch *jeder* Punkt m' von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ Bild eines Punktes m von $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q})$ ist. Dies folgt aber daraus, daß der Punkt m', wenn er nicht

1) Vgl. Gött. Nachr. 1899 S. 282 und 1900 S. 94 u. 98.

einer der Mengen q'_N angehört, *innerer* Punkt einer gewissen Reihe von Mengen dieser Form sein muß. In dieser Weise hat Bernstein den Satz bewiesen.

Der Osgoodsche Beweis geht von den sämtlichen Quadraten $\{Q\}$ aus, die das gegebene Quadrat $\mathfrak{Q}$ konzentrisch ausfüllen. Ihre Abbilder, die Jordansche Kurven sind, gehören, wie bereits bemerkt wurde, sämtlich dem Innern $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ der Jordanschen Kurve $\mathfrak{C}'$ an. Der Beweis beruht nun weiter darauf, zu zeigen, daß sie erstens dieselbe Anordnung besitzen wie die Quadrate $\{Q\}$, und daß es zweitens für jeden innern Punkt m' von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ eine durch ihn hindurchgehende Jordansche Kurve gibt. Dem hier dargelegten Grundgedanken folge ich auch in dem Beweis, den ich in § 4 selbst geben werde. Ich begnüge mich daher mit diesem vorläufigen Hinweis und bemerke nur noch, daß in alle diese Beweise als eine wesentliche Grundlage die Invarianz der Anordnung eingeht. Diese werden wir daher ebenfalls allgemein nachweisen müssen.

Ich werde aber den Beweis unabhängig von dem Jordanschen Kurvensatz darstellen. Dies geschieht aus zwei Gründen. Erstens sollen die Invarianzsätze ganz allgemein für *beliebige* geschlossene Kurven und *beliebige* Gebiete bewiesen werden. Zweitens habe ich das Bestreben, Methoden zu benutzen, die sich auf den Raum übertragen lassen.

Zur Kennzeichnung dessen, was der Beweis zu zeigen hat, erörtere ich zuvor folgende einfache Fälle.

1) Ich nehme zunächst an, daß der Abbildung die *ganze Ebene* unterliegt, und ersetze den Kreis durch eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$. In diesem Fall ergibt sich der Beweis unmittelbar auf folgende Weise.

Es ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} + \mathfrak{J}(\mathfrak{C}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} + \mathfrak{J} + \mathfrak{A}.$$

Dem Gebiete $\mathfrak{J}$ entspricht gemäß Satz IV ein Kontinuum $\mathfrak{J}'$, und das Gleiche läßt sich für das Gebiet $\mathfrak{A}$ und seine Bildmenge $\mathfrak{A}'$ erweisen. Überdies ist auch jeder Punkt der Bildmenge $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$, da dies für $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ der Fall ist. Endlich haben auch keine zwei der drei Mengen $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$ einen Punkt gemein. Die Ebene $\mathfrak{E}'$ zerfällt also in drei Punktmengen $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{A}'$ derjenigen Eigenschaft, auf Grund deren gemäß Kap. IV Satz XI zu folgern ist, daß $\mathfrak{C}'$ eine geschlossene Kurve ist. Also folgt:

Bei der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung der Ebene $\mathfrak{E}$ *auf eine Ebene* $\mathfrak{E}'$ *bleibt die geschlossene Kurve und die durch sie bewirkte Gebietsteilung invariant.*

2) Werde zweitens angenommen, daß die Abbildung zwar nicht die ganze Ebene umfaßt, daß aber die Kurve $\mathfrak{C}$ *innerhalb* desjenigen

Gebietes liegt, auf das sich die Abbildung erstreckt. Um die Begriffe zu fixieren, nehme ich an, daß es eine geschlossene Kurve C gibt, deren Fläche $\mathfrak{F}(C)$ an der Abbildung teilnimmt, und daß die Kurve $\mathfrak{C}$ dem Gebiet $\mathfrak{J}(C)$ angehört. Dann ist zu zeigen, daß die Bildmenge $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$ wieder eine geschlossene Kurve ist.

Die durch die Kurven C und $\mathfrak{C}$ bestimmten Gebiete bezeichne ich jetzt durch

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{F}(C) - \mathfrak{J}(\mathfrak{C}) - \mathfrak{C} = \mathfrak{A}.$$

Die Bildmengen von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$ seien wieder $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{A}'$; dann ist $\mathfrak{C}'$ eine abgeschlossene zusammenhängende Menge, deren Punkte gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ sind, und keine zwei dieser drei Mengen haben einen Punkt gemein. Daraus folgt zunächst wieder, daß $\mathfrak{C}'$ keinen flächenhaften Bestandteil enthalten kann, und mithin ein linienhaftes Kontinuum ist.

Man folgert auch hier gemäß Satz IV, daß $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ Kontinua sind; sie könnten aber Kontinua allgemeinster Art sein. Weiteres läßt sich nicht mehr schließen. Man kann in diesem Fall den Satz XI von Kap. IV und das in ihm enthaltene Beweisverfahren nicht mehr anwenden. Dieser Beweis beruht nämlich darauf, daß *jeder* Punkt des dort betrachteten Gebietes $\mathfrak{J}(K)$ dann zur Menge $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$ gehören muß, wenn er nicht zu $\mathfrak{C}$ gehört; was hier nicht mehr behauptet werden kann. Die gestaltliche Struktur der nicht abgeschlossenen Kontinua $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ bleibt also unbestimmt.

Wir müssen daher den Beweis in anderer Weise führen; und da es sich um denjenigen Satz handelt, der für das ganze Kapitel eine grundlegende Bedeutung beanspruchen kann, so soll dies in aller Ausführlichkeit geschehen. Die folgende Darstellung enthält übrigens zugleich einen Beweis des Jordanschen Kurvensatzes (§ 8).

§ 3. *Invarianz der geschlossenen Kurve.* Ich leite zunächst zwei Hilfssätze ab, die sich für die ganze Theorie der Invarianz als nützlich erweisen werden. Sie betreffen gestaltliche Verhältnisse, in denen man die elementarsten invarianten Eigenschaften erblicken darf, die hier in Betracht kommen. Beide drücken genau genommen dieselbe Tatsache aus. Sie lauten:

1. *Ist $\mathfrak{C}'$ umkehrbar eindeutiges uud stetiges Abbild einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$, so kann die Komplementärmenge von $\mathfrak{C}'$ nicht ein einziges Gebiet sein.*

2. *Einer geschlossenen Kurve kann als umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild kein Kurvenbogen entsprechen.*

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen. Wir haben bereits eben bewiesen, daß die Bildmenge $\mathfrak{C}'$ der geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ ein linienhaftes Kontinuum ist. Sei noch $\mathfrak{K}(\mathfrak{C}') = \mathfrak{K}'$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{C}'$.

Man zerlege die Kurve $\mathfrak{C}$ durch zwei erreichbare Punkte c_1 und c_2 in die Kurvenbogen C_1 und C_2, so können sie gemäß IV Satz XIV nicht identisch sein. Ferner seien C_1' und C_2' die Bildmengen von C_1 und C_2. Falls nun die Menge $\mathfrak{K}'$ ein einziges Gebiet darstellte, so müßte dies, wie man leicht beweist, erst recht für die Komplementärmengen von C_1' und C_2' der Fall sein. Man konstruiere nun zu C_1' und C_2' je ein im Abstand ε approximierendes äußeres Randpolygon $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$, so schließt jedes von ihnen die Punkte c_1' und c_2' ein; sie durchdringen daher einander, oder aber das eine liegt ganz in der Fläche des andern. Wir zeigen, daß für hinreichend kleines ε notwendig das erste eintreten muß.

Falls nämlich die beiden zu einer Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ gehörigen Polygonfolgen

$$\{\mathfrak{Q}_\nu'\} \quad \text{und} \quad \{\mathfrak{Q}_\nu''\}$$

die Eigenschaft haben, daß *je* zwei Polygone $\mathfrak{Q}_\nu'$ und $\mathfrak{Q}_\nu''$ einander einschließen, so gibt es eine Folge wachsender Zahlen

$$\nu_1 < \nu_2 \ldots < \nu_\lambda < \ldots,$$

so daß entweder jedes Polygon $\mathfrak{Q}_{\nu_\lambda}'$ das Polygon $\mathfrak{Q}_{\nu_\lambda}''$ einschließt, oder aber jedes Polygon $\mathfrak{Q}_{\nu_\lambda}''$ das Polygon $\mathfrak{Q}_{\nu_\lambda}'$. Nun konvergiert nach Annahme jede der beiden Polygonfolgen gegen eine linienhafte Menge, deren Komplementärmenge ein *einziges* Gebiet ist; für hinreichend großes ν wird daher *jeder* Punkt der Ebene, der nicht zu C_1' oder C_2' gehört, sowohl zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_\nu')$ wie zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_\nu'')$ gehören. Daraus folgert man weiter, daß C_1' und C_2' identisch sein müßten. Dies steht aber damit im Widerspruch, daß C_1 und C_2 nicht identisch sind. Das gleiche läßt sich beweisen, wenn es in den Folgen $\{\mathfrak{Q}_\nu'\}$ und $\{\mathfrak{Q}_\nu''\}$ überhaupt unendlich viele Paare von Polygonen gibt, die einander einschließen. Wir dürfen daher schließen, daß es eine Zahl N gibt, so daß für *jedes* $\nu > N$ die Polygone $\mathfrak{Q}_\nu'$ und $\mathfrak{Q}_\nu''$ einander durchdringen.

Die durch zwei solche Polygone $\mathfrak{Q}_\nu'$ und $\mathfrak{Q}_\nu''$ bewirkte Gebietsteilung enthält daher mindestens zwei Gebiete, die sowohl zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q}_\nu')$ wie zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q}_\nu'')$ gehören; gemäß Kap. IV § 1 gibt es also auch mindestens zwei Gebiete H_μ', die zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_\nu')$ und zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_\nu'')$ gehören. Nur eines von ihnen kann den unendlich fernen Punkt enthalten. Andererseits ist klar, daß diese Gebiete H_μ' mit wachsendem ν selber wachsen; die der Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ entsprechenden Polygone, die diese Gebiete be-

grenzen, bilden daher für mindestens eine Gebietsmenge $\{H'_\mu\}$ eine Folge ausschließender Polygone und definieren mithin (Kap. IV, § 11) mindestens ein geschränktes Gebiet $\mathfrak{H}'_\mu$, dessen Grenze zu $\mathfrak{C}'$ gehört, sowie überdies eine geschlossene äußere Randkurve, die ebenfalls zu $\mathfrak{C}'$ gehört. Damit sind beide Sätze bewiesen. Aus ihnen folgt auch sofort der Hauptsatz selbst.

Sei nämlich $\mathfrak{C}'_1$ die geschlossene Kurve, deren Existenz wir soeben bewiesen haben, so kann sie nur mit $\mathfrak{C}'$ identisch sein. Denn sonst wäre sie eine *Teilmenge* von $\mathfrak{C}'$, und ihr müßte daher eine *Teilmenge* von $\mathfrak{C}$, also ein Kurvenbogen entsprechen. Dies ist aber gemäß Satz 2 unmöglich, also folgt, wenn wir die Fragestellung von § 2 beibehalten:

V. *Bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung der Fläche einer geschlossenen Kurve C geht jede im Innern von C enthaltene geschlossene Kurve wieder in eine geschlossene Kurve über.*

Der vorstehende Beweis läßt sich übrigens unmittelbar auf den Fall übertragen, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ in einem beliebigen Gebiet enthalten ist, dessen Fläche der Abbildung unterliegt. Er gilt sogar auch noch, falls nur die Kurve $\mathfrak{C}$ selbst der Abbildung unterliegt; denn er benutzt ausschließlich den Umstand, daß die Menge $\mathfrak{C}'$ umkehrbar eindeutiges Bild von $\mathfrak{C}$ ist (vgl. § 8 und § 16).

§ 4. *Die Invarianz der Anordnung.* Wir kehren zu den Entwicklungen von § 2 zurück und knüpfen den Invarianzbeweis an die Komplementärmenge $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(\mathfrak{C}')$. Sie zerlegt die Ebene $\mathfrak{E}'$ in die beiden Gebiete $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$. Nur je eines von ihnen kann Punkte der Bildmengen $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ enthalten. Dies ist eine unmittelbare Folge davon, daß $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ Kontinua sind. Sei $\mathfrak{H}'_i$ das eine und $\mathfrak{H}'_a$ das andere, so wollen wir zunächst zeigen, daß diese beiden Gebiete nicht identisch sein können.[1])

Falls sie nämlich identisch wären, so möge in kürzerer Bezeichnung $\mathfrak{H}'$ dieses Gebiet sein. Sei nun P irgend ein Polygon, das die Kurve $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ approximiert, so ist seine Bildmenge P' Bestandteil von $\mathfrak{J}'$ und daher auch Bestandteil von $\mathfrak{H}'$; andererseits ist sie, wie wir soeben bewiesen haben, eine geschlossene Kurve. Da P zu $\mathfrak{J}$ gehört, so

1) Die Notwendigkeit dieses Beweises beruht darauf, daß sowohl die Menge $\mathfrak{R}'$, wie auch ihre Teilgebiete $\mathfrak{H}'$ nicht als Bildmengen eingeführt werden, sondern nur als Teilmengen der Bildebene, und daß man von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ erst zu zeigen hat, daß sie Gebiete sind Anders liegt es, wenn man die Invarianz des Gebiets zuerst beweisen würde.

gehört die Kurve P' zu $\mathfrak{J}'$, also auch zu $\mathfrak{H}'$. Sie bestimmt daher gemäß IV, § 13 mit $\mathfrak{C}'$ ein Ringgebiet $\mathfrak{R}'$, das Teil von $\mathfrak{H}'$ ist, und zerlegt $\mathfrak{H}'$ in die drei Bestandteile $\mathfrak{R}'$, P' und $\mathfrak{J}(P') = J'$. Keiner von ihnen könnte aber einen Punkt a' von $\mathfrak{A}'$ enthalten. Für P' ist es evident; für das Gebiet J' folgt es unmittelbar daraus, daß $\mathfrak{C}'$ in dem äußeren Gebiet $\mathfrak{A}(P')$ enthalten ist. Läge nämlich ein Punkt a' in J', so wäre er mit einem Punkt von $\mathfrak{C}'$ nur in der Weise verbindbar, daß das verbindende Kontinuum einen Punkt von P', also von $\mathfrak{J}'$ enthielte, während es ein verbindendes Kontinuum dieser Art geben muß, dem nur Punkte von $\mathfrak{A}'$ angehören. Ist endlich a' *irgend* ein Punkt von $\mathfrak{A}'$, und ist

$$\varrho(a', \mathfrak{T}') = \sigma,$$

so kann man wegen der Stetigkeit das Polygon P so nahe an $\mathfrak{C}$ legen, daß für *jeden* Punkt p' von P' die Relation

$$\varrho(p', \mathfrak{C}') < \sigma, \quad \text{also auch} \quad \varrho(p', \mathfrak{T}') < \sigma$$

besteht, alsdann könnte aber a' auch dem Ringgebiet $\mathfrak{R}'$ nicht angehören. Damit ist der Beweis geliefert.

Der Satz, der die *Invarianz der Anordnung* ausdrückt, kann hieraus leicht geschlossen werden. Er ist eine unmittelbare Folge des eben abgeleiteten Resultats, aus dem wir zunächst folgern, daß von den beiden Mengen $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ die eine notwendig in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ und die andere in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$ enthalten ist. Er lautet:

VI. *Bei der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung einer Ringfläche bleibt die Anordnung für jede Folge in ihr enthaltener einander einschließender Kurven invariant.*

Man denke sich nämlich in der Ringfläche $\mathfrak{R}$ drei konsekutive Kurven C_1, C_2, C_3 der Folge $\{C_\nu\}$, so daß C_1 die äußerste und C_3 die innerste ist, daß also C_2 und C_3 zu $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}(C_1)$ gehören. Die beiden Kurven C_2' und C_3' sind dann Bestandteile der Menge $\mathfrak{J}_1'$, wenn wieder $\mathfrak{J}_1'$ Bildmenge von $\mathfrak{J}_1$ ist; sie sind daher beide entweder in dem Gebiet $J_1' = \mathfrak{J}(C_1')$ oder beide in $A_1' = \mathfrak{A}(C_1')$ enthalten. Ich nehme zunächst an, sie liegen beide in J_1'. Man schließt dann in gleicher Weise, daß von den Kurven C_1' und C_3' die eine in $\mathfrak{J}(C_2')$ und die andere in $\mathfrak{A}(C_2')$ liegen muß. Da aber unserer Annahme gemäß C_1' in $\mathfrak{A}(C_2')$ liegt, so ist C_3' in $\mathfrak{J}(C_2')$ enthalten.

Falls die Kurven C_2' und C_3' beide in $A_1' = \mathfrak{A}(C_1')$ enthalten sind, betrachte man zunächst C_1' und C_2'. Es wird dann C_1' in $\mathfrak{J}(C_2')$ oder in $\mathfrak{A}(C_2')$ liegen. Im ersten Falle folgert man wie oben, daß alsdann C_3'

in $\mathfrak{A}(C_2')$ liegen muß. Im zweiten folgt ebenso, daß C_3' in $\mathfrak{J}(C_2')$ enthalten ist. Da dies für je drei konsekutive Kurven gilt, so ist der Satz damit bewiesen.[1])

§ 5. *Die Invarianz des Gebiets.* Sei nun wieder $\mathfrak{C}$ eine geschlossene Kurve, die ihrerseits innerhalb einer geschlossenen Kurve C liegt, deren Fläche an der Abbildung teilnimmt, so kann die Invarianz der Kurvenfläche $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ folgendermaßen bewiesen werden.

In $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ denke man sich die einander einschließenden Polygone

$$P_1, P_2, \dots P_\lambda,$$

so entspricht ihnen in der Ebene $\mathfrak{E}'$ eine Folge einander einschließender oder einander ausschließender Kurven

$$P_1', P_2', \dots P_\lambda',$$

die sämtlich in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ oder sämtlich in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$ enthalten sind. Dies bleibt bestehen, wenn die Polygone $\{P_\lambda\}$ in der Weise das Gebiet $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ immer dichter erfüllen, daß sie einerseits gegen $\mathfrak{C}$ approximieren und sich andererseits auf einen Punkt μ von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ zusammenziehen. Aus der Stetigkeit der Abbildung folgt nun, daß man durch geeignete Wahl unserer Polygone erreichen kann, daß bei gegebenem ε für *jeden* Punkt p_ν' von P_ν' und für *jeden* Punkt $p_{\nu+1}'$ von $P_{\nu+1}'$ die Relationen

$$\varrho(p_\nu', P_{\nu+1}') < \varepsilon, \quad \varrho(p_{\nu+1}', P_\nu') < \varepsilon$$

bestehen. Dies bedeutet, daß auch die geschlossenen Kurven P_ν' allmählich überalldicht liegen. Ist nämlich m' ein Punkt, der dem zwischen P_ν' und $P_{\nu+1}'$ enthaltenen Ringgebiet angehört, so muß wegen der obigen Relationen der Radius jeder ihn umgebenden Kreisfläche, die ebenfalls dem Ringgebiet angehört, kleiner als ε sein. Wenn daher m' nicht Punkt einer unserer Kurven $\{P_\nu'\}$ wird, so wird er Grenzpunkt solcher Kurven und gehört daher zur Bildmenge $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$.

Aus der Stetigkeit folgert man weiter, daß wenn sich das Polygon P_1 allmählich auf den Punkt μ zusammenzieht, die Kurve P_1' sich allmählich auf μ_1' zusammenzieht. Wir können also auch noch folgern, daß die Kurve P_λ' die Kurve P_μ' einschließt, wenn dies für die Polygone P_λ und P_μ der Fall ist, und daß alle Kurven P_ν' in dem Gebiet $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ enthalten sind. Daraus folgt aber, daß $\mathfrak{F}'$ mit $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}')$ identisch ist. Also folgt:

---

1) Werden nur drei Kurven betrachtet, so braucht, wenn C_1 außerhalb C_2 liegt, nicht C_2 innerhalb von C_1 zu liegen; bei drei Kurven einer Folge ist es anders. Dies beruht auf der Gleichwertigkeit von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$.

Liegt die Kurve C innerhalb eines Gebiets, das an der Abbildung !nimmt, so geht die Kurvenfläche wieder in eine Kurvenfläche über.

2) Wenn die Abbildung nur für die Kurvenfläche $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ selbst be-nnt ist, so bleibt der Satz unverändert bestehen. Der Beweis kann rschieden geführt werden, z. B. folgendermaßen.

Wird ein Punkt m des Gebietes $\mathfrak{G} = \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ mit einem in $\mathfrak{G}$ liegenden eis K umgeben, so entspricht dem Kreis K gemäß 1) eine geschlossene ırve K', so daß m' zu $\mathfrak{J}(K')$ und $\mathfrak{F}(K')$ zu $\mathfrak{G}'$ gehört. Sind nun und n zwei Punkte von $\mathfrak{G}$, und ist $\mathfrak{w}$ ein sie verbindender Weg, so hört zu jedem Punkt der Bildmenge $\mathfrak{w}'$ eine solche Kurvenfläche; ch dem Borelschen Satz (Kap. III, § 2) genügt daher eine endliche hl von ihnen, um $\mathfrak{w}'$ einzuschließen, und es gibt daher auch in $\mathfrak{G}'$ ıen von m' zu n' führenden Weg. Der Grenze $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ entspricht nun ch die Grenze $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{G}'$. Daß $\mathfrak{C}'$ eine geschlossene Kurve ist, folgt nmehr aus den Hilfssätzen von § 3. Denn sonst wäre die äußere ındkurve C' des Gebietes $\mathfrak{G}'$ von seiner vollen Grenze $\mathfrak{C}'$ verschieden; : entspräche daher eine Teilmenge von $\mathfrak{C}$, d. h. ein Kurvenbogen. so folgt:

VII. *Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild einer Kurvenfläche eine Kurvenfläche, so daß Kurve in Kurve und Inneres in Inneres ergeht.*

3) Ist die stetige Abbildung nur für das Gebiet $\mathfrak{G}$ selbst be-nnt, aber nicht für seine Grenze, so folgert man genau wie zuvor, ß $\mathfrak{G}$ in ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ übergeht. Es besteht daher ganz allgemein r Satz:

VIII. *Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild eines einfach zu-mmenhängenden Gebietes ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

Wenn die Grenze von $\mathfrak{G}$ eine geschlossene Kurve ist, so braucht ›s jedoch für die Grenze von $\mathfrak{G}'$ nicht der Fall zu sein. Beispiele ›ten bei funktionentheoretischen Problemen vielfach auf. Ich begnüge ch, als Beleg einen Satz von Osgood anzuführen, und zwar den lgenden:[1])

Ist $\mathfrak{T}$ Grenze eines einfach zusammenhängenden Gebiets, so kann ın es, welcher Art auch $\mathfrak{T}$ sei, konform auf das Innere eines Kreises bilden.

Man kann nämlich auf die die Grenze $\mathfrak{T}$ approximierenden Poly-›ne die bekannten Hankelschen Sätze anwenden, woraus der Beweis r Abbildbarkeit fast unmittelbar geschlossen werden kann. Ein

1) Trans. Am. Math. Soc. 1 (1900) S. 310.

punktweises Entsprechen der Grenzen findet jedoch nur teilweise statt. Ist ein Kreispunkt k Grenzpunkt von inneren Punkten m_ν der Kreisfläche, so können die Bildpunkte m'_ν der Punkte m_ν unendlich viele Grenzpunkte haben, die sogar zusammenhängende Bestandteile der Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ liefern können. Wie Osgood angibt, läßt sich die Eindeutigkeit des Entsprechens für solche *erreichbaren* Punkte von $\mathfrak{T}$ beweisen, bei denen irgend zwei von demselben Punkt m' zu ihnen führende Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ keinen Punkt von $\mathfrak{T}$ einschließen[1]).

§ 6. *Historisches über die Invarianz des Dimensionsbegriffs.* Die Invarianz des Dimensionsbegriffs liegt genau genommen außerhalb des Rahmens, der die ebenen Gebilde umschließt. Sie bildet jedoch die eigentliche Grundlage aller unserer Erörterungen, denn erst sie berechtigt uns, zur Charakterisierung der gestaltlichen Invarianten der Analysis Situs ausschließlich die umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen ins Auge zu fassen.

Die Invarianz des Dimensionsbegriffes drückt sich durch folgenden Satz aus:

IX. *Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der gesamten Umgebung eines Punktes im R_m kann niemals eine volle Umgebung eines Punktes im R_n enthalten, falls $n > m$ ist.*

Daß die Invarianz des Dimensionsbegriffs für die weitere Gruppe Γ nicht mehr besteht, wird durch die Peanosche Abbildung unmittelbar in Evidenz gesetzt. Die Möglichkeit dieser Abbildung ist zwar erst bekannt geworden, nachdem die Invarianzbeweise längst vorhanden waren; doch trägt die ursprüngliche Fragestellung ihr Rechnung.

Man ging nämlich von der eineindeutigen Beziehung zwischen je einem Gebietsteil des R_m und des R_n aus $(n > m)$ und zeigte, daß das m-dimensionale Gebiet nicht stetiges Abbild des n-dimensionalen sein könne. Allerdings fehlte damals noch die Erkenntnis, daß eine umkehrbar eindeutige und einerseits stetige Abbildung auch beiderseits stetig ist, wofür bekanntlich erst C. Jordan eine präzise Formulierung und einen präzisen Beweis gegeben hat.[2]) So lautet z. B. der Satz, in dem G. Cantor die Bedingungen der Abbildung zum Ausdruck bringt, folgendermaßen:[3])

---

1) Bull. Am. Math. Soc. (2) 9 (1903) p. 233. In dem mit Stacheln besetzten Quadrat (S. 115.) sind dies z. B. die irrationalen, aber nicht die rationalen Punkte Die obige Bedingung ist notwendig und hinreichend. Osgood gibt noch einig andere Sätze.

2) Cours d'analyse 2. Aufl. Paris 1893, Bd. I, S. 53. Vgl. auch Bericht I, S. 11

3) Gött. Nachr. 1879, S. 127.

Sind ein stetiges m-dimensionales Gebiet R_m und ein stetiges n-dimensionales Gebiet R_n so aufeinander bezogen, daß zu jedem Punkte von R_n höchstens ein Punkt von R_m und zu jedem Punkt von R_m mindestens ein Punkt von R_n gehört, und ist diese Beziehung beiderseits stetig, so ist $n \geqq m$.

Die einfachsten Schlußweisen, mit denen man die Invarianz des Dimensionsbegriffes für gewisse Werte von m und n zu beweisen vermochte oder versuchte, sind folgende:

1. Ist $m = 1$ und n beliebig, und wird das eine Gebiet als Strecke, das andere als Würfel eines R_n angenommen, so führt der Mächtigkeitsbegriff unmittelbar zu dem gewünschten Resultat. Wird nämlich ein Würfel durch eine ihn durchziehende Ebene geschnitten,[1]) so muß der Schnittfigur gemäß § 1 eine *zusammenhängende* Teilmenge der Strecke entsprechen, also ein Intervall. Zwei parallele Schnitte dieser Art haben keinen gemeinsamen Punkt; ihnen entsprechen also Intervalle ohne gemeinsame Punkte. Solcher kann es aber auf der Strecke nur eine abzählbare Menge geben, während die parallelen Schnittebenen des Würfels die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen. Damit ist der Unmöglichkeitsbeweis geliefert.[2])

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, daß das ebene oder räumliche Abbild $\mathfrak{T}$ einer Strecke $\mathfrak{S}$ *an keiner Stelle t die ganze ebene oder räumliche Umgebung dieser Stelle enthalten kann.* Gehörte nämlich zu der räumlichen Menge $\mathfrak{T}$ eine den Punkt t umgebende Kugel K, so entspräche ihr gemäß § 1 wieder eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{S}$, also eine Teilstrecke σ, und man kann nun den Beweis für K und σ genau so führen wie eben.

2. Lüroth[3]) und Cantor haben den Fall $m = 1$, $n \geqq 2$ in folgender Weise analytisch behandelt. Sie legten eine eineindeutige Abbildung zwischen einer Strecke und einem n-dimensionalen Gebiet zugrunde und zeigten, daß die Strecke nicht stetiges Abbild des n-dimensionalen Gebietes[4]) sein könne. Zunächst wird der Fall $n > 2$ auf den Fall $n = 2$ zurückgeführt, da es genügt, im R_n irgendeine dem Gebiet angehörige

1) Der einfacheren Sprechweise halber beschränke ich mich auf $n = 3$.

2) Diesen Beweis gab, wie ich erst unlängst bemerkte, zuerst R. Milesi, Riv. di mat. 2 (1892) p. 103, alsdann ich selbst; vgl. Gött. Nachr. 1899, S. 289. Übrigens hatte Milesi die Invarianz des Zusammenhangs, die für den Schluß nötig ist, nicht bewiesen.

3) Erlanger Berichte, Bd. 10 (1878) p. 190. Dort wird angegeben, daß Cantor denselben Beweis gefunden habe.

4) Der Gebietsbegriff wird, dem damaligen Gebrauch entsprechend, nicht weiter spezialisiert.

Kreisfläche K zu betrachten. Sei ξ die Koordinate eines Punktes der Strecke. Sind dann a und b zwei Endpunkte eines Durchmessers von K, so entsprechen ihnen der vorausgesetzten Eineindeutigkeit wegen zwei *verschiedene* Werte von ξ, die α und β sein mögen. Dann muß die Funktion ξ den Wert $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ sicher auf jedem der beiden Halbkreise annehmen, die ab als Durchmesser besitzen, da sie auf jedem eine stetige Funktion des Ortes ist. Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Eineindeutigkeit, womit der Beweis geführt ist.

3. Lüroth hat seine Beweismethode folgendermaßen auf Gebilde höherer Dimension ausgedehnt. Im Fall $m = 2$, $n = 3$, geht er wieder von der Annahme aus, es seien ein ebenes Gebiet $\mathfrak{G}_2$ und ein räumliches Gebiet $\mathfrak{G}_3$ eineindeutig aufeinander bezogen mittelst des stetigen, für $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ eineindeutigen Funktionenpaares

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_i), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \varphi_2(x_i),$$

und zeigt, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

Der Beweis operiert mit approximierenden Kurven C, die aus Meridianen und Parallelkreisen einer Kugel gebildet werden. Wird nämlich in $\mathfrak{G}_3$ eine kleine Kugel K_3 ins Auge gefaßt, und sind a und b die Endpunkte eines Durchmessers von ihr, in denen y_1 die beiden verschiedenen Werte

$$\alpha_1 = \varphi_1(a_1, a_2, a_3), \quad \beta_1 = \varphi_1(b_1, b_2, b_3)$$

hat, so läßt sich zunächst zeigen, daß man eine den Nordpol umziehende Kurve C so bestimmen kann, daß sich der Wert von y_1 in ihren Punkten beliebig wenig von $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)$ unterscheidet. Diese Kurven bestimmen ein Grenzgebilde $\mathfrak{C}$, so daß in ihm $y_1 = \gamma_1$ ist. Auf diesem Grenzgebilde wählt man nun zwei Punkte c und d aus (sie werden so angenommen, daß ihre Breitendifferenz gleich π ist). Hat in ihnen y_2 die Werte α_2 und β_2, so daß also

$$\alpha_2 = \varphi_2(c_1, c_2, c_3), \quad \beta_2 = \varphi_2(d_1, d_2, d_3)$$

ist, so läßt sich weiter zeigen, daß es zwei verschiedene Flächenteile der Kugel gibt, in denen der Ausdruck $(y_1 - \gamma_1)^2 + (y_2 - \gamma_2)^2$ beliebig klein wird, wo $\gamma_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2)$ ist. Diese Flächenteile, die wieder durch approximierende Kurven gebildet werden, bestimmen dann mindestens *zwei* Grenzpunkte, in denen $y_1 = \gamma_1$ und $y_2 = \gamma_2$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Eineindeutigkeit, womit der Beweis geliefert ist.[1])

1) Vgl. das Zitat in Anm. 3 S. 165. Den Fall $m = 3$, $n = 4$ hat Lüroth in ähnlicher Weise in den Erlanger Ber. 31 (1899) S. 87 und kürzlich in den Math. Ann. 63 (1906) S. 222 behandelt.

4. Auf wesentlich anderer Grundlage ruhen die allgemeinen Beweise von J. Thomae,[1] Cantor[2] und E. Netto.[3] Thomae geht von der allerdings unbewiesenen Voraussetzung aus, daß ein zusammenhängendes n-dimensionales Gebilde $\mathfrak{G}_n$ von einem oder mehreren Gebilden $\mathfrak{G}_{n-2}$ niemals in getrennte Stücke zerlegt werden kann. Cantor und ähnlich Netto operieren mit der Art und Weise, wie im R_n und R_m die einzelnen Teilgebiete, in die sie zerfallen können, aneinander grenzen, und wie ihre Grenzen beschaffen sind. Doch können diese Beweise schon deshalb als bindend nicht betrachtet werden, weil die gestaltlichen Verhältnisse selbst erst vorher mengentheoretisch zu begründen sind.[4]

Im einfachsten Falle lautet der Nettosche Beweis folgendermaßen: Falls die Menge $\mathfrak{T}$, die Abbild einer Strecke ist, ein ebenes Flächenstück enthält, so wird einem in ihm enthaltenen Kreis k wieder ein Intervall $a_1 b_1$ der Strecke entsprechen.[5] Ist nun c_1 ein innerer Punkt dieses Intervalls, so kann man zu einem Punkt der Strecke, der dem Intervall nicht angehört, *nur* durch Überschreitung eines Endpunktes gelangen, und dies sei für die Bildmenge nicht der Fall. Ebenso wird für $m = 3$, $n = 2$ im R_3 eine Kugel betrachtet und gesagt, daß ihr ein Flächenstück entsprechen müsse, und daß man zu einem Punkt, der nicht diesem Flächenstück angehörte, nur gelangen könne, wenn man eine Grenzkurve überschreitet. Aber die Behauptung, daß das Bild der Kugel ein Flächenstück sein müsse, ist wiederum nicht bewiesen und auch nicht in dieser Weise beweisbar. Man kann zwar wieder folgern, daß die Bildmenge $\mathfrak{S}$ der Kugel zusammenhängend sein muß, aber weiteres läßt sich nicht schließen.[6] Über den gestaltlichen Charakter dieser Menge $\mathfrak{S}$ läßt sich, sobald $n > 1$ ist, ohne Beweis nichts mehr behaupten. Die rein negative Natur der Beweisführung, wie sie fast allen vorhandenen Beweisen eigentümlich ist, versagt hier.

§ 7. *Methodischer Nachweis der Invarianz des Dimensionsbegriffs.* Sicherlich ist der Gedanke, den Unmöglichkeitsbeweis unmittelbar auf die gestaltlichen Verschiedenheiten der Gebiete verschiedener Dimen-

1) Gött. Nachr. (1878) S. 46.

2) Gött. Nachr. (1879) S. 127.

3) Journ. f. Math 86 (1879) S. 263.

4) Die Beweise operieren auch stillschweigend mit der damals noch nicht bewiesenen Invarianz des Zusammenhangs. Übrigens enthält der Cantorsche Beweis noch eine weitere Lücke, auf die Jürgens hingewiesen hat. Jahresber. d. Math.-Ver. 7 (1899), S. 53.

5) Was freilich von Netto nicht bewiesen wird; es heißt dort nur: das Abbild kann kein Punkt sein, müsse also eine Strecke sein.

6) Dies hebt auch E. Jürgens hervor. Vgl. Anm. 4.

sionen und auf die Verschiedenheit des in ihnen vorhandenen Zusammenhangs zu gründen, der naturgemäße. Sind diese geklärt, so führt er insbesondere so zu einem höchst einfachen Verfahren, daß man ihn mit der im vorigen Paragraphen benutzten Mächtigkeitsbetrachtung verbindet. Ich will dies für den Fall $n = 2$, $m = 3$ hier durchführen.

Man nehme also an, im R_2 gebe es eine den Punkt p_2 umgebende Kreisfläche $\mathfrak{K}_2$, der eine gewisse räumliche Umgebung $\mathfrak{B}_3$ des Bildpunktes p_3 entspricht. Legt man dann um p_3 eine in $\mathfrak{B}_3$ enthaltene Kugel K_3, so werden den sämtlichen Punkten auf und innerhalb von K_3 Punkte der Kreisfläche $\mathfrak{K}_2$ entsprechen. Schneiden wir nun die Kugel K_3 durch eine Ebene, und ist die Kreisfläche $\mathfrak{K}_3$ die Schnittfigur, so entspricht ihr gemäß Satz VII eine in $\mathfrak{K}_2$ enthaltene Kurvenfläche. Solcher Flächen ohne gemeinsame Punkte gibt es aber in $\mathfrak{K}_2$ nur abzählbar unendlich viele, während ebene Schnitte der Kugel ohne gemeinsame Punkte in der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ vorhanden sind. Wir kommen damit wieder zu dem in § 6, 1 gefundenen Widerspruch, und der Satz ist bewiesen.

Augenscheinlich gilt dieser Beweis auch für $n = 2$ und beliebiges $m > 2$. Er ist, wie man überdies erkennt, unmittelbar auf $n > 2$ übertragbar, sobald für den bezüglichen Raum die in § 5 abgeleiteten Sätze nachgewiesen werden können.

Eine andere Schlußweise, die an den Grundgedanken des Nettoschen Beweises anknüpft und sich ebenfalls auf den Satz VII stützt, hat Baire kürzlich mitgeteilt.[1] Ist $\mathfrak{T}$ eine Menge des R_3, die Bild einer Kreisfläche $\mathfrak{K}_2$ des R_2 ist, und gehörte ihr die ganze Umgebung $\mathfrak{B}_3$ eines Punktes p_3 an, so könnte man aus ihr wieder eine Kreisfläche K_3 herausschneiden, die p_3 als Mittelpunkt besitzt. Dann gäbe es in $\mathfrak{T}$ Punkte außerhalb von $\mathfrak{T}_3$ in beliebiger Nähe von p, während dies auf Grund von Satz VII bei der Bildmenge ausgeschlossen ist, so daß sich ein Widerspruch gegen die Stetigkeit ergeben würde.

§ 8. *Der Jordansche Kurvensatz.* Dieser Satz nimmt unter den Sätzen über die Invarianten der Analysis Situs eine besondere Stellung ein. Er bezieht sich nämlich nicht auf Transformationen der Gruppe Γ, d. h. also auf Transformationen ebener Gebiete, sondern auf Transformationen, die nur den Kreis selbst betreffen. Er besagt, daß auch diese Transformationen die Gebietsteilung invariant lassen, und lautet:

X. *Jede Punktmenge, die umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Kreises ist, teilt die Ebene in zwei Gebiete, deren gemeinsame Grenze sie ist; sie ist demnach eine geschlossene Kurve.*

1) Bull. des Scienc. math. (2) 31 (1907). Baire stellt darin auch einen eigenen Beweis von Satz VII in Aussicht.

Ein einfacher Beweis dieses Satzes ist schon in § 3 enthalten; ich lasse hier noch zwei andere folgen.

Der ziemlich umständliche Jordansche Beweis geht von n Punkten t_i der Punktmenge aus, die n konsekutiven Punkten des Kreises entsprechen, verbindet je zwei Punkte t_i und t_{i+1}, erhält so ein Polygon, das sich freilich mannigfach kreuzen kann, und konstruiert mit dessen Hilfe zwei Polygone $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, die die Punktmenge approximieren und ein sie einschließendes Ringgebiet bestimmen.[1] Er bildet dann eine Folge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ und eine Folge $\{\mathfrak{Q}_\nu\}$ und beweist, daß mit wachsendem ν für *jeden* Punkt p_ν von $\mathfrak{P}_\nu$ und *jeden* Punkt q_ν von $\mathfrak{Q}_\nu$ die Relationen

$$\varrho(p_\nu, \mathfrak{T}) < \sigma, \quad \varrho(q_\nu, \mathfrak{T}) < \sigma$$

in bekannter Weise, d. h. bei beliebigem σ durch geeignetes ν erfüllt werden können. Hieraus zieht er den Schluß, daß diese Polygone gegen eine und dieselbe Grenze konvergieren, und daß diese eine geschlossene Kurve ist. Er überträgt also die gestaltliche Grundeigenschaft der Polygone von $\{\nu\}$ auf ω. Aber dies ist, wie bereits in IV, § 11 bemerkt wurde, keineswegs zulässig, und der Jordansche Schluß daher in dieser Form nicht bindend. In der Tat folgt ja auch aus den Entwicklungen des vorigen Kapitels (§ 3), daß man *jede* Menge $\mathfrak{T}$, die eine Gebietsteilung bewirkt, von innen und außen durch eine Polygonfolge approximieren kann. Da aber Jordan im Verlauf seiner Darstellung zeigt, daß für *jeden* Punkt t der Menge $\mathfrak{T}$ die Relationen

$$\varrho(t, \mathfrak{P}_\nu) < \sigma, \quad \varrho(t, \mathfrak{Q}_\nu) < \sigma$$

erfüllt sind, so kann diese Lücke seines Beweises gemäß der am Ende dieses Paragraphen enthaltenen Schlußweise ausgefüllt werden.[2]

Eine elementare Beweismethode des Satzes gibt de la Vallée-Poussin. Sein Beweis unterscheidet sich vom Jordanschen darin, daß er die Punktmenge in Einzelbestandteile zerlegt und um *jeden einzelnen* ein approximierendes Polygon konstruiert. Alsdann läßt sich auf Grund einfacher Polygonsätze ziemlich leicht zeigen, daß man so ein Ringgebiet erhält, und daß seine Breite gegen Null konvergiert.[3] Der Beweis kann folgendermaßen dargestellt werden:

---

1) Nur die Existenz des inneren Polygons bedarf eines ausführlicheren Beweises; die Existenz des äußeren Randpolygons ergibt sich aus Kap. IV § 1, 1. In einfacher Form hat dies kürzlich Baire begründet. C. R. 144 (1907) S. 318.

2) Der Beweis bedarf auch sonst teilweise exakterer Durchführung.

3) Cours d'analyse infinitésimale. Paris 1903, Bd. 1, S. 308. Der exakte Nachweis des Ringgebiets findet sich übrigens bei de la Vallée-Poussin nicht; er beruft sich statt dessen auf gewisse Anschauungsargumente. Vgl. auch noch

Man teile den Kreis durch N Punkte s_ν in N gleiche Teile $\sigma_\nu = s_\nu s_{\nu+1}$. Jedem Bogen σ_ν entspricht dann eine zusammenhängende Teilmenge T_ν der Bildmenge $\mathfrak{T}$, der t_ν und $t_{\nu+1}$ angehören; wir wählen insbesondere die Bogen σ_ν so, daß für *irgend zwei* Punkte t_ν' und t_ν'' *einer jeden* Menge T_ν der Abstand $\varrho(t_\nu', t_\nu'') < \delta$ ist, was wegen der Stetigkeit möglich ist.

Nun denke man sich in der Ebene der Menge $\mathfrak{T}$ eine quadratische Teilung mit der Seite δ' und bilde das die Menge T_ν von außen im Abstand δ' approximierende Polygon P_ν. Gemäß Kap. IV § 3 wird dann für je zwei Punkte p_ν' und p_ν'' der Polygonfläche $\mathfrak{F}(P_\nu)$

(1) $$\varrho(p_\nu', p_\nu'') < \delta + 3\delta'$$

sein. Insbesondere ist also auch für *jeden* Punkt t_ν von T_ν und *jeden* Punkt p_ν von P_ν
$$\varrho(t_\nu, p_\nu) < \delta + 3\delta'.$$

Die Größe δ' wird nun weiter so bestimmt, daß zwei Polygone P_μ und P_ν keine gemeinsamen Punkte haben, wenn die Bögen σ_μ und σ_ν nicht aneinander grenzen. Sind nämlich T_μ und T_ν zwei derartige Teilmengen von $\mathfrak{T}$, so ist $\varrho(T_\mu, T_\nu) > 0$, und wenn Δ das Minimum aller dieser Abstände ϱ ist, braucht man nur $\delta' < \frac{1}{2}\Delta$ zu nehmen, um diese Lage für je zwei derartige Polygone P_μ und P_ν zu erreichen.[1])

Diese Festsetzung bewirkt, daß jeder Punkt t_ν nur in den beiden Polygonen $P_{\nu-1}$ und P_ν enthalten ist, während je zwei konsekutive Polygone P_ν und $P_{\nu+1}$ einander durchdringen.

Hieraus zieht de la Vallée-Poussin den Schluß, daß sie ein Ringgebiet bestimmen. Diese Tatsache bildet aber den Hauptgrund des ganzen Beweises und bedarf deshalb einer zwingenden Darlegung.

Dazu wähle man n als *gerade* Zahl $2N$ und betrachte zunächst die Polygone
$$P_1, P_3, \ldots P_{2\nu+1}, \ldots P_{2N-1}.$$

Je zwei von ihnen liegen außerhalb voneinander. Andrerseits werden die Polygone $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu+1}$ von $P_{2\nu}$ gekreuzt; auf ihnen gibt es daher Punkte, die zu $\mathfrak{F}(P_{2\nu})$ gehören. Sind $p_{2\nu-1}$ und $p_{2\nu+1}$ solche

einen Beweis von O. Veblen, bei dem die zyklische Anordnung der Punkte die Grundlage bildet. Veblen legt Wert darauf, daß er den Grenzpunkt nicht mittelst des Abstandes, sondern mittelst der ihn einschließenden Dreiecke definiert und nennt deshalb seine Methode eine nicht metrische. Übrigens werden doch gleichseitige Dreiecke, sowie auch das Borelsche Theorem verwandt. Vgl. Trans. Am. math. Soc. 6 (1905) S. 83.

In einem sehr speziellen Fall hat bereits G. Ascoli einen Satz dieser Art ausgesprochen, Mem. Acc. Linc. (2) 18 (1884) S. 583.

1) Der obige Schluß verliert für einseitig stetige Abbildung seine Gültigkeit.

Punkte, so kann man sie durch einen in $\mathfrak{J}(P_{2\nu})$ enthaltenen Weg verbinden. Dieser Weg kann $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu+1}$ mehrmals kreuzen; ist $\mathfrak{w}_{2\nu}$ das Stück zwischen den letzten Kreuzungspunkten, so haben keine zwei aller dieser Wege $\{\mathfrak{w}_{2\nu}\}$ einen Punkt gemeinsam.

Setzen wir nun, wie in Kap. IV, § 1, 4

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{M}\{\mathfrak{F}(P_{2\nu+1}),\ \mathfrak{w}_{2\nu}\},$$

so daß zu $\mathfrak{T}$ alle Wege $\mathfrak{w}_{2\nu}$ und alle Polygonflächen $\mathfrak{F}(P_{2\nu+1})$ gehören, so bestimmt die ringartige Menge $\mathfrak{T}$ wie dort zwei Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, die von je einem einfachen Polygon $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ begrenzt sind. Die Streckenzüge von $P_{2\nu+1}$, die zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gehören, seien $\mathfrak{p}_{2\nu+1}$ und $\mathfrak{q}_{2\nu+1}$. Sie stellen zusammen das Polygon $P_{2\nu+1}$ dar, und von ihren Endpunkten gehört der eine zu $\mathfrak{J}(P_{2\nu})$ und der andere zu $\mathfrak{J}(P_{2\nu+2})$.

Wir fügen zur Menge $\mathfrak{T}$ zunächst das Polygon P_2 hinzu und betrachten seine Durchdringungsfigur mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Sie enthält jedenfalls ein äußeres Randpolygon $\mathfrak{Q}_1$, das Grenze eines Teilgebietes $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ ist. Das Polygon P_2 schließt den Weg $\mathfrak{w}_2$ ein, es kreuzt P_1 und P_3, während alle übrigen Polygone $P_{2\nu+1}$ und alle übrigen Wege $\mathfrak{w}_{2\nu}$ außerhalb von ihm liegen. Daher gehören alle diese Wege $\mathfrak{w}_{2\nu}$ und alle diese Streckenzüge $\mathfrak{q}_{2\nu+1}$ unverändert auch zu $\mathfrak{Q}_1$, während $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{w}_2$, $\mathfrak{q}_3$ durch gewisse Streckenzüge $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2'$, $\mathfrak{q}_3'$ ersetzt werden. Sie sind in endlicher Zahl vorhanden; keine dieser Gattungen kann aber ganz fehlen. Denn $\mathfrak{q}_1$ enthält einen Bestandteil, der zu $\mathfrak{J}(P_{2N})$, also auch zu $\mathfrak{A}(P_2)$ gehört, und $\mathfrak{q}_3$ einen solchen, der zu $\mathfrak{J}(P_4)$, also ebenfalls zu $\mathfrak{A}(P_2)$ gehört. Daher können sich $\mathfrak{q}_1'$ und $\mathfrak{q}_3'$ nicht auf Null reduzieren.

Auf die gleiche Art erkennt man, daß $\mathfrak{P}$ in ein Polygon $\mathfrak{P}_1$ übergeht, das Grenze eines Teilgebietes $\mathfrak{J}_1$ von $\mathfrak{J}$ ist und von den nämlichen Wegen $\mathfrak{w}_{2\nu}$, den analogen Streckenzügen $\mathfrak{p}_{2\nu+1}$ und gewissen Streckenzügen $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$, $\mathfrak{p}_3'$ gebildet wird.

Wird jetzt auch das Polygon P_4 hinzugefügt, so gehen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ in zwei Polygone $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_2$ über, die zwei Teilgebiete $\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{A}_1$ begrenzen. Dabei wird $\mathfrak{w}_4$ durch gewisse Streckenzüge $\mathfrak{p}_4'$ und $\mathfrak{q}_4'$ ersetzt, und ebenso $\mathfrak{p}_3'$, $\mathfrak{p}_5$, $\mathfrak{q}_3'$, $\mathfrak{q}_5$ durch Streckenzüge $\mathfrak{p}_3''$, $\mathfrak{p}_5'$, $\mathfrak{q}_3''$, $\mathfrak{q}_5'$, und kein Streckenzug dieser Gattung kann fehlen. Dagegen gehören zu $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_2$ ungeändert die übrigen noch vorhandenen Wege $\mathfrak{w}_{2\nu}$ und die übrigen Streckenzüge $\mathfrak{p}_{2\nu+1}$ und $\mathfrak{q}_{2\nu+1}$.

In dieser Weise kann man fortfahren; immer beruht der Schluß darauf, daß das neue Polygon, das wir hinzufügen, nur einige Seiten der Polygone $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{Q}^{(\lambda)}$ durchdringen kann. Man erhält also schließlich zwei letzte Polygone $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, die ein Ringgebiet einschließen, und zwar *gehören zu* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *Bestandteile von jedem Polygon* P_ν.

Gemäß der Relation (1) bestehen daher für *jeden* Punkt t von $\mathfrak{T}$ die Relationen

$$(2) \qquad \varrho(t, \mathfrak{P}) < \delta + 3\delta' \text{ und } \varrho(t, \mathfrak{Q}) < \delta + 3\delta'.$$

Damit aber ist der Beweis im wesentlichen geliefert. Setzt man nämlich $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}) = J$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}) = A$, und benutzt zwei Polygonfolgen $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ und $\{\mathfrak{Q}_\nu\}$, die für immer kleinere Werte von δ und δ' gegen $\mathfrak{T}$ approximieren, so bestimmen sie zwei Gebiete

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{J_\nu\} \text{ und } \mathfrak{A} = \mathfrak{M}\{A_\nu\},$$

und wegen der vorstehenden Relation wird *jeder* Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ sein. Daher ist $\mathfrak{T}$ gemäß § 10 von Kap. IV eine geschlossene Kurve.

Unter beschränkenden Bedingungen ist der Kurvensatz auch vom Verfasser[1]), sowie von L. D. Ames[2]) und Osgood[3]) bewiesen worden. Die Bedingung des Verfassers lautete, daß die Kurve aus einer endlichen Anzahl von Kurvenbögen besteht, und daß jeder von ihnen in jedem Punkte eine bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung sich auf jedem einzelnen Kurvenbogen monoton ändert. Ames hat diese Bedingung dahin erweitert, daß er für jeden Kurvenbogen voraussetzte, er lasse sich durch eine Gleichung der Form $y = f(x)$ darstellen, wo die $f(x)$ eindeutige und stetige Funktionen sind. Geometrisch heißt dies, daß es für jeden Punkt t eines solchen Kurvenbogens eine Strecke δ gibt[4]), die ihn nur in einem Punkte t trifft.

Der Beweis stützt sich auf die Betrachtung des analytisch definierten Gesamtwinkels, den ein von einem Punkt m ausgehender Vektor mt beschreibt, wenn t die Punktmenge $\mathfrak{T}$ durchläuft. Man zeigt durch einfache Rechnung, daß in zwei Punkten der eben genannten Strecke δ, deren Ordinaten größer, resp. kleiner als die Ordinate der Kurve sind, sich die Winkel um 2π unterscheiden. Da dieser Winkel sonst eine stetige Funktion des Ortes ist, so bilden alle Punkte, in denen er den gleichen Wert hat, je ein zusammenhängendes Gebiet und umgekehrt. Die Ebene zerfällt deshalb in mindestens zwei Gebiete, und da jedem Punkt der Ebene, der nicht auf $\mathfrak{T}$ liegt, ein solcher Gesamtwinkel zukommt, so ist die Menge $\mathfrak{T}$ die gemeinsame Grenze dieser Gebiete. Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß es nicht mehr als zwei Gebiete gibt. Dies geschieht auf Grund folgender Betrachtung. Sei $\mathfrak{G}$ irgend ein Gebiet,

1) Gött. Nachr. 1896, S. 79.

2) Vgl. besonders Am. Journ. of Math. 27 (1905) S. 343.

3) Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig 1906, S. 134. Die obige einfachste Darstellungsweise findet sich erst bei Osgood.

4) Nämlich ein hinlänglich kleines Stück der bezüglichen Ordinate.

und C irgend ein in ihm verlaufender Kurvenbogen von der hier betrachteten Art. Wenn dann nicht beide Endpunkte von C auf der Grenze von $\mathfrak{G}$ liegen, so wird $\mathfrak{G}$ durch C nicht zerfallen; liegen beide auf der Grenze, so zerfällt $\mathfrak{G}$ in höchstens zwei Gebiete. Löst man nun die Kurve C in ihre n Kurvenbögen auf, und wendet den Satz auf das von der ganzen Ebene gebildete Gebiet $\mathfrak{E}$ an, indem man in ihm sukzessive die Kurvenbögen C_1, $C_2 \ldots$ anbringt, so kann das Gebiet $\mathfrak{E}$ erst durch den letzten Bogen C_n zerfallen, denn erst von diesem gehören beide Endpunkte zu dem Gebiete, in dem er verläuft.

Ein näheres Eingehen auf den Beweis scheint nicht erforderlich.[1]) Erstens bezieht er sich nämlich auf einen höchst speziellen Fall, zweitens geht die ganze Tendenz dieses Berichtes dahin, die Sätze unabhängig von jeder analytischen Formulierung zu machen; und drittens enthält der Jordansche Kurvensatz überhaupt nur einen Teil derjenigen Eigenschaften, die für das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises invariant sind. Zu ihnen kommt, wie wir alsbald sehen werden, die *allseitige Erreichbarkeit* seiner Punkte.

Um dies auszuführen, bedarf ich einiger geometrischer Hilfsbegriffe, in denen die charakteristischen gestaltlichen Eigenschaften dieses Abbilds zum Ausdruck kommen, und die ich zunächst folgen lasse.

§ 9. *Einfache Punktfolge und Wegdistanz.* Sei $\{t_\nu\}$ eine Punktfolge mit dem *einen* Grenzpunkt t_ω, die wir von vornherein so annehmen, daß der Abstand des Punktes t_ν vom Grenzpunkt t_ω mit wachsendem ν abnimmt. Alle Punkte t_ν mögen für ein Gebiet $\mathfrak{G}$ *erreichbar* sein.[2]) Gemäß IV § 12 können wir jeden Punkt t_ν mit einem Punkte m des Gebietes $\mathfrak{G}$ durch einen Weg $\mathfrak{l}_\nu$ so verbinden, daß keine zwei dieser Wege einander kreuzen; überdies mögen sie einen kleinen um m gelegten Kreis K je einmal schneiden. Die Grenze von $\mathfrak{G}$ sei wieder $\mathfrak{T}$.

Seien nun $\{k_\nu\}$ die Schnittpunkte der Wege mit dem Kreis K, und k_ω einer ihrer Grenzpunkte, dann können wir aus ihnen eine Teilmenge

$$\{k_{\nu_\lambda}\} = k_{\nu_1},\ k_{\nu_2} \ldots k_{\nu_\lambda}, \ \ldots$$

herausgreifen, deren Punkte gegen k_ω von derselben Seite her konvergieren. Die Indices dieser Punkte brauchen nicht beständig zu

1) Vgl. auch noch einen Beweis von G. A. Bliß. Bull. Am. Mat. Soc. (2) 10 (1904) p. 998.

2) Über die Erreichbarkeit von t_ω wird nichts vorausgesetzt.

wachsen. Es gibt aber einen ersten Punkt der Folge — er heiße k' —, dessen Index größer als ν_1 ist; auf ihn folgt ebenso ein erster Punkt der Folge — er heiße k'' —, dessen Index größer ist, als derjenige von k', und die Folge dieser Punkte kann niemals abbrechen. Wir gelangen damit zu einer Punktfolge, die wir nunmehr gleichfalls durch

$$\{k_\nu\} = k_1, k_2, k_3, \ldots k_\nu, \ldots$$

bezeichnen, von der Eigenschaft, daß immer k_ν zwischen $k_{\nu-1}$ und $k_{\nu+1}$ liegt. Dasselbe gilt daher von den Wegen $\mathfrak{l}_\nu$. Endlich besitzt die hierdurch definierte Punktfolge $\{t_\nu\}$ die Eigenschaft, daß der Abstand $\varrho(t_\nu, t_\omega)$ mit wachsendem ν beständig abnimmt.

Die so definierte Folge $\{t_\nu\}$ nenne ich eine einfache Folge. Sie hat folgende Eigenschaften: 1. Alle Punkte t_ν sind erreichbar; 2. sie besitzen nur *einen* Grenzpunkt t_ω; 3. der Abstand $\varrho(t_\nu, t_\omega)$ nimmt mit wachsendem ν ab; 4. die Wege $\mathfrak{l}_\nu$ besitzen eine natürliche Anordnung. 5. *Jede Teilmenge* von $\{t_\nu\}$, deren Indices beständig wachsen, ist ebenfalls eine einfache Folge, was unmittelbar ersichtlich ist.

Die Wege $\mathfrak{l}_\nu$ bestimmen (IV, § 12) gewisse Teilgebiete von $\mathfrak{G}$, und ich bezeichne durch

$$1)\ J_\nu, \quad 2)\ T_\nu, \quad 3)\ C_\nu, \quad 4)\ P_\nu$$

1. dasjenige durch $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ bestimmte Teilgebiet, das keinen Weg $\mathfrak{l}_i$ enthält, 2. den zur Grenze von J_ν gehörigen Bestandteil von $\mathfrak{T}$, 3. den zugehörigen Kurvenbogen, der auch mit T_ν identisch sein kann, endlich 4. den Streckenzug, den J_ν von dem approximierenden Polygon $\mathfrak{P}$ abschneidet. Ferner bezeichne ich kurz durch

$$J_\omega = \sum_1^\infty J_\nu, \quad J_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=\lambda}^{\mu} J_\nu, \quad J_{\lambda\omega} = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} J_\nu$$

diejenigen eindeutig bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$, denen die Punkte aller unter dem Summenzeichen stehenden Teilgebiete zugehören; endlich sollen

$$T_\omega, \quad T_{\lambda\mu}, \quad T_{\nu\omega}, \quad P_\omega, \quad P_{\lambda\mu}, \quad P_{\lambda\omega}$$

die diesen Gebieten entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{P}$ sein, die naturgemäß stets abgeschlossen sind.

Die Mengen T_ν können sowohl unter sich, wie mit T_ω Punkte gemein haben, wie aus den S. 115 angeführten Beispielen hervorgeht. Eine besondere Erörterung bedarf nur der folgende Fall.

Es ist möglich, daß *alle* Mengen T_ν mit T_ω einen für sie *alle* erreichbaren Punkt t gemein haben, *dann ist aber t der einzige Punkt*

dieser Art.[1]) Zieht man nämlich (Fig. 13)[2]) in $J_{\nu-1}$ und $J_{\nu+1}$ je einen Weg $\mathfrak{l}'_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}'_{\nu+1}$ zu t, so bilden diese Wege ein Polygon P'_ν. Dieses Polygon schließt das Gebiet J_ν notwendig ein. Da nämlich $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ die Wege $\mathfrak{l}'_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}'_{\nu+1}$ nicht kreuzen, kann der Endpunkt von $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ nur innerhalb P'_ν liegen oder in t fallen. Daher fällt auch die Grenzmenge T_ν — von t abgesehen — in das Innere von P'_ν. Da aber andrerseits kein Punkt einer Menge T_μ ($\mu \gtrless \nu$) und daher auch kein Punkt von T_ω innerhalb von P'_ν enthalten sein kann, ist damit die Behauptung bewiesen.

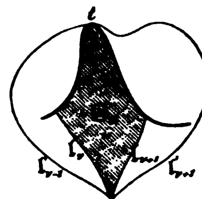


Fig. 13.

Das gleiche gilt, wenn überhaupt unendlich viele Teilmengen T_ν einen Punkt t von T_ω gemein haben. Man braucht nämlich nur je eine gewisse Zahl konsekutiver Gebiete J_ν zu einem Gebiet J'_ν zusammenzufassen, so wird dadurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Besondere Eigenschaften der einfachen Punktfolge knüpfen sich an den Begriff der *Wegdistanz*, die zu je zwei konsekutiven Punkten von ihr gehört. Deren Definition ist die folgende.

Werden zwei Punkte t' und t'' durch einen in einem Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ verlaufenden Weg $\mathfrak{w}$ so verbunden, daß (Fig. 14)[3]) kein Punkt von $\mathfrak{T}$ innerhalb des durch $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ gebildeten Polygons liegt[4]), und ist w ein variabler Punkt von $\mathfrak{w}$, so gibt es für die Entfernungen $\varrho(t', w)$ und $\varrho(t'', w)$ ein Maximum e, das für mindestens einen Punkt w_0 von $\mathfrak{w}$ eintritt, und für alle durch $\mathfrak{G}'$ laufenden Wege $\mathfrak{w}$ dieser Art hat e eine untere Grenze η. Sie soll die zu t' und t'' für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ zugehörige *Wegdistanz* heißen.[5]) Offenbar gibt es auf der Grenze T von $\mathfrak{G}'$ mindestens einen Punkt τ, dessen Abstand von t' oder t'' den Wert η hat; er ist Grenzpunkt der Punkte $\{w_0\}$. Für die Breite von T besteht daher die Relation

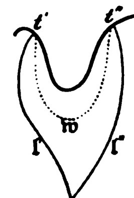


Fig. 14.

(1) $$\mathfrak{B}(T) \geq \eta.$$

Sei nun wieder $\{t_\nu\}$ eine einfache Folge, so gibt es für jedes der durch sie bestimmten Gebiete J_ν eine zu t_ν und $t_{\nu+1}$ gehörige Wegdistanz η_ν. Ist H ihr oberster Limes, so brauchen die η_ν nicht direkt

1) Ein Beispiel liefert die Fig. 8 auf S. 115.

2) In der Figur steht $\mathfrak{G}_\nu$ statt J_ν.

3) Die Figuren sind nur schematisch gezeichnet.

4) Diese Wege machen die früher benutzten Rückkehrwege (Beiträge III, S. 300) entbehrlich.

5) In den Beiträgen wurde sie als *Ausbiegung* bezeichnet.

gegen H zu konvergieren. Man sieht aber leicht, daß man aus der Folge $\{t_\nu\}$ eine einfache Teilfolge $\{t'_\nu\}$ so ausscheiden kann, daß die zu *je zwei* konsekutiven Punkten t'_ν und $t'_{\nu+1}$ gehörigen Wegdistanzen η'_ν sich schließlich beliebig wenig von H unterscheiden; d. h. bei vorgegebenem σ gibt es ein N, so daß für *jedes* $\nu > N$

$$H - \sigma < \eta'_\nu < H + \sigma$$

ist. Eine solche Folge $\{t'_\nu\}$ soll *reduzierte* einfache Folge heißen; wir dürfen alle im folgenden zu betrachtenden Folgen *als reduziert* voraussetzen. Für sie hat auch *jede Teilfolge* $\{t''_\nu\}$ die Eigenschaft, daß für jedes $\nu > N$ die obige Relation besteht. Endlich liefern die oben definierten Punkte τ_ν der Mengen T_ν bei einer reduzierten Folge einen zu T_ω gehörigen Punkt τ_ω von der Art, daß $\varrho(t_\omega, \tau_\omega) = H$ ist. Daher ist

$$\mathfrak{B}(T_\omega) \geq H. \tag{2}$$

§ 10. *Erreichbarkeit und Erreichbarkeitssätze.* Wie bereits in Kap. IV § 12 kurz erwähnt wurde, ist der Erreichbarkeitsbegriff durch folgende Definition bestimmt.

XI. *Ist $\mathfrak{T}$ Grenze eines Gebietes $\mathfrak{G}$, so heißt der Punkt t erreichbar für $\mathfrak{G}$, wenn er mit einem Punkt m von $\mathfrak{G}$ durch einen einfachen Weg verbunden werden kann, der entweder aus einer endlichen Zahl von Strecken besteht, oder aus unendlich vielen, die in t ihren einzigen Grenzpunkt besitzen.*

Er heißt insbesondere allseitig erreichbar für $\mathfrak{G}$, wenn er auch für jedes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$, zu dessen Grenze er gehört, erreichbar ist.[1])

Die Erreichbarkeit bildet denjenigen Grundbegriff, in dem die *analytische* Stetigkeit ihren *geometrischen* Ausdruck findet, und der ganz eigentlich die Brücke zwischen Analysis und Geometrie herstellt. Wir werden ihn alsbald als Invariante der engeren und der weiteren Gruppe erkennen. Zuvor lasse ich einige Beispiele folgen, und beschränke mich wie immer auf einfach zusammenhängende Gebiete $\mathfrak{G}$.

1. Man verbinde die Punkte

$$x = \frac{1}{\nu}, \quad y = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}; \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

der Reihe nach durch Strecken, so entsteht ein einfacher Weg mit dem Nullpunkt als Grenzpunkt. Zeichnet man in der Weise, wie es

1) Als Teilgebiete kommen insbesondere nur die in § 9 genannten in Betracht. Näheres enthält Kap. VI § 1.

Figur 15 erkennen läßt, über und unter ihm je einen analogen Streckenzug, so entsteht ein Polygon, in dem der Nullpunkt erreichbar ist, und zwar *nur* durch einen Weg unendlicher Streckenzahl.

2. Auf den Seiten eines Quadrats von der Länge 1 errichte man in allen rationalen Punkten p/q nach innen und außen Lote der Länge $^1/_{2q}$, so sind, wie wir alsbald zeigen, alle Punkte des Quadrats von außen und innen erreichbar.[1])

3. Werden dagegen auf einer Quadratseite Lote konstanter Länge in den Punkten einer perfekten, nirgends dichten Menge errichtet, so sind diejenigen Punkte dieser Menge, die nicht Intervallendpunkte sind, sowie die inneren Punkte der in ihnen errichteteten Lote nicht erreichbar.

4. Man betrachte die in Kap. IV, S. 120 genannte geschlossene Kurve. (Fig. 10.) Für ihr Inneres sind die Punkte der y-Achse zwischen $+1$ und -1 nicht erreichbar, während sie für das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$ erreichbar sind. Dagegen sind sie für $\mathfrak{A}$ *nicht allseitig* erreichbar. Würde man nämlich x_0 mit dem Punkt $y = -1$ der y-Achse durch einen in $\mathfrak{A}$ laufenden Weg $\mathfrak{l}'$ verbinden, so schneidet er von $\mathfrak{A}$ ein Teilgebiet $\mathfrak{A}'$ ab, für das sie nicht erreichbar sind.

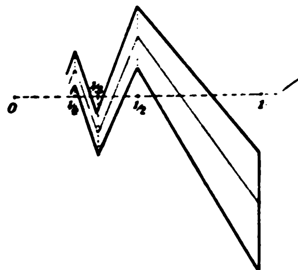


Fig. 15.

5. Hat man zwei Spiralen (z. B. logarithmische), die sich nirgends kreuzen und die Ebene in zwei Gebiete zerlegen, so ist der gemeinsame Anfangspunkt, um den sie sich herumwinden, für beide Gebiete erreichbar.

Die für ein Gebiet $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkte seiner Grenze $\mathfrak{T}$ besitzen folgende Eigenschaften.

Da es zu jedem Punkt p eines approximierenden Polygons einen ihm nächsten Punkt t gibt, der durch einen Weg endlicher Streckenzahl erreichbar ist (Kap. IV, § 3), so folgt zunächst, daß die erreichbaren Punkte überalldicht auf der Gebietsgrenze liegen.[2]) Wichtiger ist der folgende Satz:

XII. *Ist* $\{t_\nu\}$ *eine einfache Punktfolge, deren Wegdistanzen* η_ν *gegen Null konvergieren, so ist ihr Grenzpunkt* t_ω *für das durch sie bestimmte Teilgebiet* J_ω *erreichbar.*

Seien nämlich $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ die Wege, die in den Gebieten $J_{\nu-1}$ und J_ν von t_ν zu $t_{\nu-1}$ und von t_ν zu $t_{\nu+1}$ führen, und sei w_ν resp.

1) Vgl. Figur 6 auf S. 115.

2) Dies gilt also auch von denen, die durch Wege *endlicher* Streckenzahl erreichbar sind. Hierauf weist auch O. Veblen hin. Trans. of Am. Math. Soc. 6 (1905) S. 96.

$w_{\nu-1}$ je einer ihrer Punkte. Legt man nun um t_ν ein Quadrat der Seite ε_ν, das die übrigen Punkte t_λ sowie w_ν und $w_{\nu-1}$ ausschließt, so bestimmen gemäß Kap. IV, § 1 die Punkte w_ν und $w_{\nu-1}$ mit Teilen der Wege $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ und einem Teil des Quadrats eindeutig einen Streckenzug, der teils zu $J_{\nu-1}$, teils zu J_ν gehört. Wird dies für alle Werte $\lambda - 1 < \nu < N$ ausgeführt, so ergibt sich ein zusammenhängender Streckenzug, der in $J_{\lambda N}$ (§ 9) enthalten ist. Da nun sowohl η_ν als auch ε_ν für wachsendes ν gegen Null konvergiert, so hat der gesamte so entstehende Streckenzug nur den einen Grenzpunkt t, während er zugleich ganz in J_ω liegt.

Aus diesem Satz ist die Erreichbarkeit aller Punkte des im zweiten Beispiel genannten überalldicht mit Stacheln besetzten Quadrats sowohl für $\mathfrak{J}$ wie für $\mathfrak{A}$ unmittelbar zu entnehmen. Jeder dieser Punkte kann nämlich als Grenzpunkt einer Punktfolge angesehen werden, deren Punkte auf den Loten liegen; die zugehörigen Wegdistanzen konvergieren daher stets gegen Null. Der zu den Quadratpunkten führende Weg wird allerdings unendlich oft hin und her züngeln müssen, ehe er in der Grenze die Quadratpunkte erreicht; ganz analog zu dem Weg zum Nullpunkt im ersten Beispiel.

Eine Folgerung dieses Satzes, die sich aus den in § 9 abgeleiteten Relationen unmittelbar ergibt, ist noch folgende:

Ist $\mathfrak{T}$ Grenze eines Gebietes $\mathfrak{G}$, und ist $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge mit t_ω als Grenzpunkt, so ist t_ω für $\mathfrak{G}$ erreichbar, wenn die Breite der Teilmengen T_ν mit wachsendem ν gegen Null konvergiert.

Mit den Mengen T_ν konvergieren nämlich auch die Größen η_ν gegen Null.

§ 11. *Die einfache geschlossene Kurve.* Den Erreichbarkeitsbegriff benutzen wir nunmehr, um aus der Gesamtheit der geschlossenen Kurven die *einfache Kurve* herauszuheben. Wir definieren:

XIII. *Eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ heißt einfache geschlossene Kurve oder kurz einfache Kurve, wenn jeder ihrer Punkte sowohl für $\mathfrak{J}$ wie für $\mathfrak{A}$ erreichbar ist.*

Die Bezeichnung dieser Kurvengattung entnehme ich A. Hurwitz, der von dem umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbild des Kreises ausgeht.[1]) Da sich die Erreichbarkeit als das notwendige und hinreichende Merkmal des umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildes des Kreises herausstellen wird, so ist damit die Identität beider Definitionen dargetan. Zunächst möge kurz auf die allgemeine Bedeutung ihrer charak-

1) Verhandlungen des ersten internat. Math. Kongr. Leipzig 1898, S. 102.

teristischen Eigenschaft hingewiesen werden. Analytisch bedeutet sie das im Rahmen unserer Transformationsgruppe Γ verallgemeinerte Dedekindsche Schnittprinzip. Geometrisch stellt sie die Verallgemeinerung des in Kap. IV, § 1 erwähnten Axioms von Pasch dar, daß ein äußerer und ein innerer Punkt eines Polygons durch einen Weg endlicher Streckenzahl verbindbar sind, der einen und genau einen Punkt des Umfangs enthält. Die Existenz dieses *einen* Schnittpunkts für Wege, die einen äußeren und einen inneren Punkt verbinden, kann also als eine Anordnungsbeziehung betrachtet werden, die der Gruppe G gegenüber invariant ist. Wir mußten sie daher fordern, wenn wir das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Polygons aus der Gesamtheit der geschlossenen Kurven herausheben wollten.

Von der einfachen geschlossenen Kurve gilt folgender Satz:

XIV. *Bei jeder einfachen Punktfolge $\{c_\nu\}$ einer einfachen geschlossenen Kurve konvergiert die Breite der zugehörigen Kurvenbögen gegen Null.*

Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so betrachte man auf den Bögen C_ν die in § 9 definierten Punkte τ_ν, und es sei τ ihr Grenzpunkt. Ferner sei c der Grenzpunkt der Folge $\{c_\nu\}$. Die Punkte

$$c,\ \tau,\ c_1,\ c_2,\ \dots\ c_\nu,\ \dots$$

bilden dann eine abzählbar unendliche Menge von Kurvenpunkten, die für $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ sämtlich erreichbar sind. Wir können daher auf sie den Satz XVI von Kap. IV anwenden, also in $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ Wege von je einem Punkt m resp. a aus so zu ihnen legen, daß sie einander nicht kreuzen. Seien

$$\mathfrak{l},\ \lambda,\ \mathfrak{l}_1,\ \dots\ \mathfrak{l}_\nu\ \dots \quad \text{und} \quad \mathfrak{a},\ \alpha,\ \mathfrak{a}_1,\ \dots\ \mathfrak{a}_\nu,\ \dots$$

diese Wege in $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{A}$, und sei L_ν dasjenige Polygon, das durch die Wege $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{l}_{\nu+1}$, $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ gebildet wird und den Kurvenbogen C_ν einschließt.[1]) Alsdann schließt es jeden Kurvenbogen $C_\mu (\mu \gtrless \nu)$ aus, und es kann deshalb keiner der Wege $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{a}$, λ, α dem Innern dieses Polygons angehören; überdies liegen die Flächen je zweier Polygone L_ν und L_μ außerhalb voneinander. Setzen wir nun

$$\mathfrak{G}_\omega = \mathfrak{M}\{\mathfrak{J}(L_\nu),\ \mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}_3,\dots\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3\ \dots\},$$

so ist $\mathfrak{G}_\omega$ ein Gebiet, dem jedes $\mathfrak{J}(L_\nu)$ angehört, und das jeden Kurvenbogen C_ν einschließt, dem aber die Wege $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{a}$, λ, α nicht angehören

1) Werden nur zwei Wege von a und m zu zwei Punkten c' und c'' gezogen, so kann jeder der beiden durch c' und c'' bestimmten Kurvenbogen seinem Innern angehören. Für eine Folge $\{c_\nu\}$ kommt dies aber nicht in Betracht. Andererseits kann man die Wege auch so legen, daß sie einen bestimmten Kurvenbogen einschließen.

können. Daher bestimmen $\mathfrak{l}, \mathfrak{a}, \mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ in der Weise ein Polygon L, daß $\mathfrak{G}_\omega$ zu $\mathfrak{J}(L)$ gehört, und ebenso bestimmen λ, α, $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ ein Polygon Λ, so daß $\mathfrak{G}_\omega$ auch zu $\mathfrak{J}(\Lambda)$ gehört, und wenn τ und c verschieden voneinander sind, so ist die eine Polygonfläche eine Teilfläche der andern. Dies ist aber unmöglich. Denn wenn Λ das Polygon L einschließt, so liegt τ außerhalb von L und könnte daher nicht Grenzpunkt der Punkte τ_ν sein. Wenn aber L das Polygon Λ einschließt, so folgte ebenso, daß c außerhalb von Λ liegen müßte und daher nicht Grenzpunkt der Punkte c_ν sein könnte. Daher ist c mit τ identisch und der Satz bewiesen.

Es wird sich später zeigen, daß die *allseitige* Erreichbarkeit für $\mathfrak{J}$ *oder* $\mathfrak{A}$ mit der *einfachen* Erreichtbarkeit für $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{A}$ gleichwertig ist; doch gehe ich darauf hier nicht weiter ein (vgl. Kap. VI, § 4).

§ 12. *Die Abbildung der einfachen geschlossenen Kurve auf den Kreis.* Von der einfachen geschlossenen Kurve gilt folgender Satz, durch den die bevorzugte Stellung, die ihr angewiesen ist, gerechtfertigt erscheint.

XV. *Jede einfache geschlossene Kurve läßt sich umkehrbar eindeutig und stetig auf den Kreis abbilden.*

Die Wichtigkeit dieses Satzes besteht darin, daß durch ihn alle Zerlegungssätze, die das Polygon betreffen, die aber für die allgemeinste geschlossene Kurve keine Geltung haben, jedenfalls immer dann auf die einfache Kurve übertragbar werden, wenn metrische Eigenschaften nicht in sie eingehen. Auch wird er das Mittel abgeben, um die Gleichwertigkeit der einfachen Kurvenbogen mit den Streckenzügen folgern zu können.

Ich teile zunächst einen Beweis mit, der im Anschluß an Hilbert von F. Riesz gegeben wurde.[1]) Er stützt sich darauf, daß man für die Kurvenpunkte auf Grund ihrer allseitigen Erreichbarkeit unmittelbar eine zyklische Anordnung festsetzen und sie dementsprechend auf die Kreispunkte abbilden kann.

1) Hilbert, Math. Ann. 56 (1902) p. 39; F. Riesz, ebenda 59 (1904) p. 409. Der Beweis von Riesz definiert die Erreichbarkeit nicht mittelst der Streckenzüge, benutzt vielmehr von vornherein einfache Kurven. Dies ist, wie wir bald sehen werden, keine Verallgemeinerung des Satzes. Andererseits bedarf der Beweis von Riesz aus diesem Grunde des Jordanschen Kurvensatzes, während die Beschränkung auf einfache Wege nur den Polygonbegriff nötig hat und daher methodisch einfacher zum Ziele kommt. Ich benutze deshalb im obigen Beweis nur die Polygone.

Seien nämlich wieder c_1 und c_2 zwei Punkte von $\mathfrak{C}$, m ein Punkt von $\mathfrak{J}$, a ein Punkt von $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, resp. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ die von m und a zu c_1 und c_2 führenden Wege. Diese vier Wege bestimmen ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}_{12}$. Sind c_3 und c_4 irgend zwei andere Kurvenpunkte, so gehört von ihnen entweder der eine zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_{12}) = J_{12}$ und der andere zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}_{12}) = A_{12}$, oder sie liegen beide in J_{12}, oder beide in A_{12}. Im ersten Fall sagt man, c_3 und c_4 werden durch c_1 und c_2 *getrennt*. Man hat nun zunächst zu zeigen, daß diese Definition von dem benutzten Polygon $\mathfrak{P}_{12}$ unabhängig ist. Dies kann aus den allgemeinen Sätzen über Zerlegung und Durchdringung von Polygonen in aller Ausführlichkeit geschlossen werden, am einfachsten wohl so, das man es zunächst für solche Polygone beweist, die mit denselben Punkten m und a gebildet sind.

Man beachte nun, daß sowohl im Gebiet J_{12}, wie im Gebiet A_{12} notwendig Punkte von $\mathfrak{C}$ liegen müssen, da man sonst m und a durch einen Weg verbinden könnte, der keinen Punkt von $\mathfrak{C}$ enthält. Damit ist bereits eine solche zyklische Anordnung der Kurvenpunkte erwiesen, in der Sprünge nicht auftreten (S. 57), die also überalldicht ist.

Man wähle nun auf der Kurve $\mathfrak{C}$ und auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ je eine überalldichte Menge C_r und K_r irgendwie aus, so kann man sie gemäß einem Cantorschen Satz unter Erhaltung der Anordnung eineindeutig einander zuweisen und zunächst zeigen, daß auch bei der Menge C_r genau wie bei K_r jede Dedekindsche Teilung einen und nur einen Punkt von $\mathfrak{C}$ bestimmt, daß also Anordnungstetigkeit vorhanden ist. Dies kann folgendermaßen geschehen.

Zunächst ist klar, daß jeder Punkt c von $\mathfrak{C}$, der nicht zu C_r gehört, in der geordneten Menge $\mathfrak{C}$ in dem S. 58 genannten Sinn einen *Schnitt*[1]) bestimmt, also auch einen analogen Schnitt am Kreis und damit auch einen Punkt k des Kreises; wir ordnen nun dem Punkt c den Punkt k zu. Dann ist auf Grund der zyklischen Anordnung unmittelbar ersichtlich, daß es nicht zwei verschiedene Punkte c und c' von $\mathfrak{C}$ geben kann, denen derselbe Punkt k entspricht. Es ist jetzt weiter zu zeigen, daß auch jedem Punkt k von $\mathfrak{K}$ ein Punkt von $\mathfrak{C}$ entspricht, daß also die auf $\mathfrak{C}$ begründete Anordnung keine Lücken aufweist (S. 57). Dies ergibt sich folgendermaßen:

Sei $\{k_\nu'\}$ und $\{k_\nu''\}$ je eine von links und rechts gegen einen Punkt k konvergierende Folge, die der Menge K_r angehört. Sie bestimmen zwei Folgen $\{c_\nu'\}$ und $\{c_\nu''\}$. Nun schließt jedes mit zwei Punkten c_ν' und

1) Da die Anordnung zyklisch ist, in etwas verallgemeinerter, aber klarer Bedeutung.

c''_ν konstruierte Polygon P_ν alle Punkte $c'_{\nu+\varrho}$ und $c''_{\nu+\varrho}$ ein und damit auch deren Grenzpunkte. Es gibt daher mindestens einen Bildpunkt von k, womit die Unmöglichkeit von Lücken nachgewiesen ist. Da es überdies dem Vorstehenden gemäß auch nur einen Bildpunkt von k gibt, so ist damit eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$ begründet und die Stetigkeit der *Anordnung* bewiesen.

Es kann aber auch die *Größen*stetigkeit leicht geschlossen werden. Dazu ist nachzuweisen, daß jeder Punkt von $\mathfrak{C}$, der *metrischer* Grenzpunkt einer Folge $\{c_\nu\}$ ist, auch Anordnungsgrenzpunkt ist. Dies folgt aber unmittelbar aus dem Inhalt von § 9. Er zeigt nämlich, daß die im Polygon P'_ν enthaltenen Kurvenbögen $\{C'_{\nu+\varrho}\}$ und $\{C''_{\nu+\varrho}\}$, die durch die Folgen $\{c'_{\nu+\varrho}\}$ und $\{c''_{\nu+\varrho}\}$ bestimmt sind, ebenfalls genau einen Grenzpunkt besitzen.[1])

§ 13. *Herstellung der Abbildung.* Die wirkliche Herstellung der Abbildung stützen wir auf die approximierenden Polygone. Sie wird uns später erlauben, die Invarianz gewisser hier erörterter Eigenschaften auch gegenüber der weiteren Gruppe Γ nachzuweisen, und ist die folgende:

Sei $\mathfrak{P}$ irgendein Polygon, das von $\mathfrak{J}$ aus die Kurve $\mathfrak{C}$ approximiert, so können wir, wenn σ beliebig klein gewählt wird, das Polygon $\mathfrak{P}$ durch eine endliche Zahl konsekutiver Teilpunkte p_i $(i = 1, 2 \ldots \lambda)$ so

1) Ich halte es nicht für überflüssig, darauf hinzuweisen, daß aus der zyklischen Anordnung aller Punkte und ihrer umkehrbar eindeutigen Abbildung auf die Punkte eines Kreises allein nichts geschlossen werden kann. Auch die Punkte der Kurve $y = \sin 1/x$ zwischen $-1 \leqq x < 0 < x \leqq +1$ lassen sich, wenn man ihnen einen, die Endpunkte des Kurvenstücks verbindenden Weg hinzufügt, zyklisch so anordnen, daß Sprünge nicht vorhanden sind; die Lücken sind hier freilich zunächst nicht ausgeschlossen, da den Punktfolgen der Kurve, die zu den Werten $x < 0$ und $x > 0$ gehören, eine Lücke entspricht. Schließt man die Lücken durch Adjunktion irgendeines Punktes oder einer Strecke der y-Achse aus, so ist alsdann zwar Anordnungsstetigkeit vorhanden, aber keine Größenstetigkeit. Denn eine Punktfolge, die den eben genannten Werten $x < 0$ resp. $x > 0$ entspricht, kann mehrere Grenzpunkte besitzen. Der Hauptgrund des obigen Beweises liegt eben außer in der Abgeschlossenheit der Menge $\mathfrak{C}$ in der beiderseitigen Erreichbarkeit *aller* Punkte und dem auf ihr beruhenden Satz von § 9 über die Breite der Kurvenbogen C_ν.

O. Veblen gibt in Trans. Am. Math. Soc. 6 (1905) S. 83 einen Beweis des Satzes in der Weise, daß er die einfache Kurve nicht durch die Erreichbarkeit definiert, sondern daß er direkt die zyklische Anordnung und das Dedekindsche Schnittprinzip zugrunde legt, sowie endlich die Voraussetzung, daß jede Folge nur ein einziges Grenzelement bestimmt. Für diesen Begriff der einfachen geschlossenen Kurve folgt dann das weitere unmittelbar, insbesondere auch die Größenstetigkeit. Übrigens ist der Hauptzweck der Abhandlung der, auf Grund dieser Definition der einfachen Kurve den Jordanschen Kurvensatz zu beweisen.

in Teile P_i zerlegen, daß für je zwei konsekutive Punkte p_i und p_{i+1} die Relation

$$\frac{1}{2}\sigma < \varrho(p_i, p_{i+1}) < \frac{3}{2}\sigma \tag{1}$$

besteht. Dazu nehme man p_1 beliebig, bestimme auf dem in irgendeiner Richtung durchlaufenen Polygon $\mathfrak{P}$ den ersten Punkt, der von p_1 den Abstand σ hat, von diesem Punkt p_2 aus wieder den ersten Punkt gleicher Art und setze dies fort, bis sich ein letzter Punkt p_n ergibt, zu dem es einen Punkt p_{n+1} auf dem übriggebliebenen Streckenzug $p_n \dots p_1$ nicht mehr gibt. Ist dann $\varrho(p_n, p_1) > \frac{1}{2}\sigma$, so behält man p_n bei; ist aber $\varrho(p_n, p_1) < \frac{1}{2}\sigma$, so wählt man p_{n-1} als letzten Teilpunkt und hat $\varrho(p_{n-1}, p_1) < \frac{3}{2}\sigma$. Man folgert daraus noch, daß für jedes i

$$\frac{1}{2}\sigma < \mathfrak{B}(P_i) < 2\sigma$$

ist.

Der Beweis geht nun so vor sich, daß wir die im Hilbertschen Beweis benutzte, auf $\mathfrak{C}$ dichte Punktmenge C_r konstruktiv herstellen. Dazu bestimmen wir zunächst eine Teilmenge

$$C_1 = \{c_i\}$$

von $\mathfrak{C}$, indem wir zu jedem Punkt p_i einen zugehörigen nächsten Punkt c_i (Kap. IV, § 3) auswählen. Zu ihm können wir von einem Punkt m von $\mathfrak{J}(\mathfrak{P})$ einen über p_i führenden Weg $\mathfrak{l}_i$ in der Weise legen, daß ihm die Strecke $p_i c_i$ angehört, und die Wege einander *innerhalb* $\mathfrak{J}(\mathfrak{P})$ nicht kreuzen. Dann werden auch die *ganzen* Wege $\mathfrak{l}_i$ immer dann ohne Kreuzungspunkte sein, wenn man noch

$$\sigma < 8\varepsilon \tag{2}$$

wählt.[1]) Zunächst ist nämlich gemäß Relation (1) ersichtlich, daß die von p_i und p_{i+1} ausgehenden Strecken $p_i c_i$ und $p_{i+1} c_{i+1}$ ohne gemeinsamen Punkt sind. Sollten sich nun zwei Strecken $p_i c_i$ kreuzen, so betrachte man zwei solche sich kreuzende Strecken $p_h c_h$ und $p_k c_k$, bei denen die Zahl der zwischen p_h und p_k liegenden Punkte p_i ein Minimum ist. Es wird dann weder $p_h c_h$ noch auch $p_k c_k$ von einer Strecke $p_i c_i$ gekreuzt, wenn p_i zwischen p_h und p_k liegt. Ist nun m' der Kreuzungspunkt von $p_h c_h$ und $p_k c_k$, so bestimmen die Wegstücke $m p_h m'$ und $m p_k m'$ ein Polygon, das den Punkt p_i und daher auch die Strecke $p_i c_i$ im Innern enthalten müßte, während c_h und c_k außerhalb von ihm liegen;

1) Geht man von beliebig angenommenen, erreichbaren Punkten t von $\mathfrak{T}$ aus, so kann man, wie wir in IV, § 12 zeigten, die zugehörigen Wege stets demgemäß legen. Hier hat man es aber mit Wegen zu tun, die in bestimmter Weise konstruiert sind; daher muß die Eigenschaft des Nichtkreuzens bewiesen werden.

und dies widerspricht der Voraussetzung, daß $\mathfrak{C}$ eine zusammenhängende Menge ist.

Je zwei Wege $\mathfrak{l}_i$ und $\mathfrak{l}_{i+1}$ bestimmen daher in der Weise ein Teilgebiet J_i von $\mathfrak{J}$, daß je zwei dieser Teilgebiete *außerhalb voneinander liegen.*

Wird noch der Abstand zweier konsekutiver Punkte c_i und c_{i+1} von $\mathfrak{C}$ durch r_i bezeichnet, so folgt aus dem Viereck der Punkte c_i, c_{i+1}, p_i, p_{i+1} für *jedes* r_i die Relation

$$(3) \qquad \tfrac{3}{2}\sigma_1 + 3\varepsilon_1 > r_i > \tfrac{1}{2}\sigma_1 - 3\varepsilon_1 .$$

Sei nun $\mathfrak{P}'$ ein Polygon, das im Abstand $\varepsilon_1 < \varepsilon$ approximiert, und p_i' sein Schnittpunkt oder aber, falls es etwa mehr als einen geben sollte, sein *letzter* Schnittpunkt mit $p_i c_i$, dann werden die Punkte p_i' auf $\mathfrak{P}'$ die gleiche Anordnung haben, wie die Punkte p_i auf $\mathfrak{P}$.

Man hat nämlich

$$p_i' p_{i+1}' > p_i p_{i+1} - p_i p_i' - p_{i+1} p_{i+1}',$$

woraus sich wegen

$$p_i p_i' = p_i c_i - p_i' c_i, \qquad p_{i+1} p_{i+1}' = p_{i+1} c_{i+1} - p_{i+1}' c_{i+1}$$

für jedes i die Relation

$$(4) \qquad \tfrac{3}{2}\sigma + 3\varepsilon - \varepsilon_1 > \varrho\,(p_i', p_{i+1}') > \tfrac{1}{2}\sigma - 3\varepsilon + \varepsilon_1$$

ergibt. Gemäß Relation (2) ist daher $\varrho\,(p_i', p_{i+1}')$ stets positiv, woraus die Behauptung folgt.

Man wähle nun $\sigma_1 < \sigma$ und kann, wenn σ_1 hinreichend klein ist, den Streckenzug $P_i' = p_i' \ldots p_{i+1}'$ des Polygons $\mathfrak{P}'$ ebenso wie vorher in Einzelstücke zerlegen, so daß für je zwei konsekutive Teilpunkte, die nunmehr durch $p_{\vartheta k}$ und $p_{\vartheta k+1}$ bezeichnet werden sollen, die Relation

$$\tfrac{3}{2}\sigma_1 > \varrho\,(p_{\vartheta k}, p_{\vartheta k+1}) > \tfrac{1}{2}\sigma_1; \quad \sigma_1 > 8\varepsilon_1$$

besteht.[1]) Man legt dann wieder zu den zugehörigen nächsten Punkten c_{ik} von $\mathfrak{C}$ die Wege $\mathfrak{l}_{ik}$ in J_i so, daß keine zwei sich kreuzen, und daß sie J_i in Teilgebiete J_{ik} zerlegen, von denen je zwei außerhalb voneinander liegen, was ebenso beweisbar ist wie vorher. Man hat so bereits auf $\mathfrak{C}$ die Teilmengen

$$\mathfrak{C}_1 = \{c_i\}, \quad \mathfrak{C}_2 = \{c_{ik}\},$$

so daß $\mathfrak{C}_1$ Teilmenge von $\mathfrak{C}_2$ ist.

In dieser Weise kann man fortfahren und gelangt so zu einer Polygonfolge $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}\}$ von der Art, daß für je zwei konsekutive Teil-

1) Durch Wahl von σ_1 läßt sich erreichen, daß jeder Streckenzug P_i' wirklich zerfällt.

punkte des Polygons $\mathfrak{P}^{(\nu+1)}$ für jede beliebige aus ν Indices bestehende Indicesgruppe N die folgenden Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} &\tfrac{3}{2}\sigma_{\nu+1} > \varrho(p_{Ni}, p_{N,i+1}) > \tfrac{1}{2}\sigma_{\nu+1}, \\ (5) \qquad &\tfrac{3}{2}\varepsilon_{\nu+1} > \varrho(p_{Ni}, c_{Ni}) > \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\nu+1}; \quad \sigma_{\nu+1} > 8\varepsilon_{\nu+1}, \\ &\tfrac{3}{2}\sigma_{\nu+1} + 3\varepsilon_{\nu+1} > r_{Ni} > \tfrac{1}{2}\sigma_{\nu+1} - 3\varepsilon_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Von den auf $\mathfrak{C}$ so entstehenden Mengen

$$\mathfrak{C}_1 = \{c_i\}, \quad \mathfrak{C}_2 = \{c_{ik}\}, \quad \ldots \quad \mathfrak{C}_\nu = \{c_N\} \ldots$$

ist $\mathfrak{C}_\nu$ Teilmenge von $\mathfrak{C}_{\nu+1}$, und wenn wir mit ihnen eine Menge

$$\mathfrak{C}_r = \mathfrak{M}\{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_\nu, \ldots\} = \mathfrak{M}\{\mathfrak{C}_\nu\}$$

definieren, so läßt sich leicht zeigen, daß sie bei geeigneter Wahl der ε_ν und σ_ν die Kurve $\mathfrak{C}$ überalldicht erfüllt. Hierzu ist nachzuweisen, daß r_N bei unbegrenzt wachsendem ν einerseits positiv bleibt und andererseits unendlich klein wird. Wir setzen nun zunächst

$$\varepsilon_{\nu+1} = \frac{1}{\alpha}\varepsilon_\nu, \quad \sigma_{\nu+1} = \frac{1}{\beta}\sigma_\nu,$$

so erhält man für jede aus ν Indices bestehende Indicesgruppe N

$$\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\beta^{\nu-1}} + \frac{3}{\alpha^{\nu-1}}\varepsilon > r_N > \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\beta^{\nu-1}} - \frac{3}{\alpha^{\nu-1}}\varepsilon.$$

Wird nun noch $\alpha \geq \beta$ angenommen, so bewirkt dies, daß für jedes ν erstens $\sigma_\nu > 8\varepsilon_\nu$ ist, zweitens $r_N > 0$, und drittens auch $\lim r_N = 0$. Damit haben wir eine auf $\mathfrak{C}$ überalldichte und zyklisch angeordnete Punktmenge $\mathfrak{C}_r$ hergestellt, und der weitere Beweis kann wie oben geführt werden. Die vom Punkt m ausgehenden Wege $\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_{ik} \ldots \mathfrak{l}_N \ldots$ bestimmen nämlich auf einem um m gelegten Kreis $\mathfrak{K}$ ebenfalls eine auf ihm überalldichte Punktmenge $\mathfrak{K}_r$, die eineindeutiges Bild von $\mathfrak{C}_r$ ist und in der Anordnung mit ihr übereinstimmt, woraus das übrige ebenso folgt wie in § 12.

Einen dritten Beweis für die Stetigkeit der Abbildung werde ich im nächsten Kapitel geben. Die Grundlage wird wiederum die hier durchgeführte Zerlegung von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ in Teilgebiete bilden. Da wir uns auf sie öfter beziehen müssen, setze ich ihre Eigenschaften nochmals hierher.

1) Bei gegebenem Polygon $\mathfrak{P}$, das im Abstand ε approximiert, kann man durch geeignete Wahl von σ eine endliche Zahl von Teilgebieten J_i und eine endliche Zahl von Punkten c_i auf der Kurve bestimmen, deren Abstand in gewissen Grenzen liegt. Die Größe σ unterliegt der Relation (2).

2) Hat man eine Polygonfolge $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}\}$, so geht die fortgesetzte Zerlegung des Gebiets $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ so vor sich, daß die für $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ vorhandenen Teilgebiete beim Fortgang von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ zu $\mathfrak{P}^{(\nu+1)}$ wiederum in Teilgebiete zerfallen.

3) Es ist zweckmäßig, für diese Teilgebiete noch eine zweite Bezeichnung einzuführen, zumal wenn ihre Anordnung nicht in Frage kommt. Wir bezeichen sie auch durch

$$J_k,\ J_k',\ J_k'',\ \ldots J_k^{(\nu)}, \ldots$$

analog die auf den Polygonen $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}\}$ entstehenden Teilpunkte durch

$$\{p_k\},\ \{p_k'\},\ \{p_k''\},\ \ldots \{p_k^{(\nu)}\}, \ldots$$

und die ihnen entsprechenden Punkte von $\mathfrak{C}$ durch

$$\{c_k\},\ \{c_k'\},\ \{c_k''\},\ \ldots \{c_k^{(\nu)}\}, \ldots$$

§ 14. *Die Klein-Poincarésche Grenzkurve.* Ein einfaches Beispiel zum vorstehenden Satz bildet die bekannte Grenzkurve, die in der Theorie der automorphen Funktionen auftritt, wenn man von n sich zyklisch berührenden Kreisen ausgeht und ein von ihnen gebildetes Kreisbogen-$n$eck als Fundamentalbereich wählt.[1]) *Diese Kurve ist eine einfache, geschlossene Kurve;* die hierzu nachzuweisende allseitige Erreichbarkeit ihrer Punkte folgt fast unmittelbar aus ihrer Definition.

Seien $K_1, K_2 \ldots K_n$ die n Kreise, $\{p_\nu\}$ die n Berührungspunkte, so daß im Punkt p_k sich die Kreise K_k und K_{k+1} berühren, also auf K_k die Punkte p_{k-1} und p_k liegen. Diese Kreise teilen die gesamte Ebene in drei Gebiete; setzt man

$$\mathfrak{E} = J_1 + A_1 + \mathfrak{K}_1,$$

so soll $\mathfrak{K}_1$ diejenige *abgeschlossene* Menge sein, der alle Kreisflächen $\mathfrak{F}\{K_\nu\}$ angehören, J_1 und A_1 das durch sie getrennte innere und äußere Gebiet; C_k^i und C_k^a seien die Kreisbögen von K_k, die zur Grenze von J_1 und A_1 gehören. Spiegelt man die $n-1$ Kreise K_l gegen den Kreis K_k, so liegen die $n-1$ Bildkreise K_{kl} innerhalb von K_k, und man erhält $n(n-1)$ Kreise K_{kl}, die sich ebenfalls zyklisch berühren, und zwar mögen $\{p_\mu'\}$ die *neuen* Berührungspunkte sein. Man hat dann wieder

$$\mathfrak{E} = J_2 + A_2 + \mathfrak{K}_2,$$

1) Eine nähere Erörterung dieser Kurve, auf deren allgemeines Auftreten zuerst Klein hingewiesen hat (C. R. 93 (1881) S. 1484), gab alsbald Poincaré, Acta math. 3 (1883) S. 77.

wo $\mathfrak{K}_2$ eine abgeschlossene Menge ist, und J_2 und A_2 die analoge Bedeutung haben wie J_1 und A_1. Es ist dann $\mathfrak{K}_2$ Teilmenge von $\mathfrak{K}_1$, dagegen J_1 Teilmenge von J_2 und A_1 Teilmenge von A_2. Ist ferner m_k irgendein Punkt des Kreisbogens $C_k^{(i)}$, so können wir die in J_2 enthaltenen Kreisbögen $m_k p_{k-1}$ und $m_k p_k$ als Wege auffassen, die in J_2 von m_k zu p_k und p_{k-1} führen; es sind also p_{k-1} und p_k für J_2 erreichbar;[1]) endlich ist auch der ganze Bogen $C_k^{(i)}$ ein in J_2 von p_{k-1} zu p_k führender Weg, und allgemeiner lassen sich irgend zwei auf oder innerhalb K_k gelegene Punkte p'_μ von J_2 ebenfalls durch einen in J_2 verlaufenden Weg verbinden, der aus einem oder mehreren Kreisbogen besteht.

Mit diesen einfachen Tatsachen ist der Beweis so gut wie fertig. Denn werden jetzt die weiteren Spiegelungen an den Kreisen K_{kl} ausgeführt, und wird dies unbegrenzt fortgesetzt, so konvergieren die Radien der Kreise K_{klm} ... mit wachsender Indiceszahl sämtlich gegen Null; setzen wir also

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M}\{J_\nu\} + \mathfrak{M}\{A_\nu\} + \mathfrak{D}\{\mathfrak{K}_\nu\} = \mathfrak{J} + \mathfrak{A} + \mathfrak{C},$$

wo der Definition gemäß $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ zusammenhängende Gebiete sind, so folgt sofort, daß jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{C}$ eine geschlossene Kurve ist; ferner folgt aus demselben Umstand auch, daß die Punkte der Menge

$$P_r = \{p_\nu\},\ \{p'_\mu\},\ \{p''_\lambda\},\dots$$

dicht auf der Kurve $\mathfrak{C}$ liegen. Es ist nur noch nachzuweisen, daß jeder Punkt dieser Kurve für $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ erreichbar ist. Ist nun c irgendein Punkt von $\mathfrak{C}$, der Grenzpunkt einer einfachen Folge ist, deren Punkte zu P_r gehören, so kann man diese Folge auch so wählen, daß jede der Gruppen $\{p_\nu\}$, $\{p'_\mu\}$, $\{p''_\lambda\}$ ... höchstens einen ihrer Punkte dazu hergibt. Ist $\{p^{(\nu)}\}$ diese Folge, so gibt es gemäß dem obigen für $p^{(\nu)}$ und $p^{(\nu+1)}$ sowohl in $\mathfrak{J}$ wie in $\mathfrak{A}$ einen sie verbindenden Kreisbogenweg, der sicher innerhalb eines Kreises mit mindestens $\nu - 1$ Indices liegt; die zugehörigen Wegdistanzen konvergieren also gegen Null, und daher ist der Punkt c sowohl für $\mathfrak{J}$ wie für $\mathfrak{A}$ erreichbar.[2]) Also folgt:

XVI. *Die zu n einander zyklisch berührenden Kreisen gehörige Klein-Poincarésche Grenzkurve ist eine einfache geschlossene Kurve.*

---

1) Daß man die Kreisbogenwege auch durch Streckenwege ersetzen kann, ist klar; andererseits wird später (§ 18) die allgemeine Ersetzbarkeit der Streckenwege durch Kurvenwege nachgewiesen.

2) Der Schluß beruht nur darauf, daß sämtliche Kreisradien mit wachsendem ν gegen Null konvergieren.

In dem besonderen Falle, daß sämtliche n Kreise K_k einen und denselben Orthogonalkreis besitzen, ist dieser die Grenzkurve. In der Tat liegen alsdann alle Punkte $\{p_\nu\}$, $\{p'_\mu\}$, $\{p''_\lambda\}\ldots$ auf dem Orthogonalkreis und erfüllen ihn schließlich überalldicht.

Diese Tatsache ist von R. Fricke und Klein zu einer anschaulichen Erörterung des Falles $n = 4$ benutzt worden.[1] Im Fall $n = 4$ liegen nämlich die vier Berührungspunkte p_ν ebenfalls auf einem Kreise K. Man zeigt dies am einfachsten, indem man die ganze Figur so in eine ihr kreisverwandte überführt, daß ein Kreisberührungspunkt, z. B. p_1, in den unendlich fernen Punkt übergeht. Dann gehen zwei Kreise in gerade Linien über, und es liegen daher die drei übrigen Berührungspunkte p_2, p_3, p_4 ebenfalls auf einer Geraden. Man kann nun die allgemeine Figur und die Orthogonalkreisfigur derartig in Beziehung setzen, daß man die entsprechenden Kreisflächen K_k, $K_{kl}\ldots$ und die durch sie bestimmten Gebiete, die sich bei fortgesetzter Spiegelung ergeben, direkt ins Auge faßt und einander zuordnet. Man erhält so wieder eine Folge von Kreisbogenpolygonen $\{K^{(\nu)}\}$, die gegen die eigentliche Grenzkurve approximieren, und die man in diesem einfachen Fall gestaltlich verfolgen und mit den Kreisbogen des Orthogonalkreises vergleichen kann. Man erhält daher wieder zwei überalldichte Punktmengen, die unter Erhaltung ihrer Anordnung in eineindeutiger Beziehung stehen, und kann auf Grund dessen, wie in § 13 beim Beweis des allgemeinen Satzes, auf die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Grenzkurve auf den Orthogonalkreis auch direkt schließen.

Von den bemerkenswerten Eigenschaften dieser Grenzkurve erwähne ich in Kürze die Folgenden. Jeder ihrer Punkte c ist Grenzpunkt einer Punktmenge, die aus einem Punkt von $\mathfrak{J}$, z. B. dem Punkt m, durch eine unendliche Folge von Spiegelungen[2] hervorgeht, und von denen daher jedem Kreisbogen-$n$eck je einer angehört. Diese Punkte bestimmen

1) Vgl. Fricke, Math. Ann. 44 (1894) S. 582, Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Leipzig 1897, I, S. 420, sowie Klein, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung; Leipzig 1902, S. 298 ff.

2) Man hat vier Substitutionen V_i, den vier Spiegelungen an den Kreisen K_i entsprechend. Jede Folge

$$V_i,\ V_i V_k,\ V_i V_k V_l,\ \cdots,$$

wo $i, k, l \cdots$ irgendeinen der Werte 1, 2, 3, 4 haben, bestimmt einen Grenzpunkt, und zwar stimmen die Indices mit denen der Kreise überein, die durch die Spiegelung den Punkt als Grenzpunkt liefern. Bilden die Indices eine periodische Folge, so ergeben sich diejenigen Grenzpunkte, die Fixpunkte von Substitutionen der Gruppe sind; diese sind naturgemäß in abzählbarer Menge vorhanden; daher gibt es auch nur eine abzählbare Menge von parabolischen, loxodromischen und hyperbolischen Punkten.

immer einen *einfachen* zu c führenden Weg.[1]) Überdies enthält die Kurve unendlich viele Fixpunkte von Substitutionen, die jedes der beiden Gesamtgebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ in sich überführen; insbesondere abzählbar unendlich viele parabolische, hyperbolische und loxodromische. Die ersten sind die Punkte von P_r; in ihnen hat die Kurve eine eigentliche Tangente, die in die Zentrale der sich in ihnen berührenden Kreise fällt.[2]) Die loxodromischen bilden das paradoxeste Gegenstück zu diesem Verhalten, denn die Kurve umläuft jeden dieser Punkte spiralig, ohne daß jedoch der Zusammenhang gestört ist, genau wie es bei zwei logarithmischen Spiralen im Nullpunkt der Fall ist (§ 10, 5). In den hyperbolischen Punkten endlich liegt die Kurve in der Nähe eines jeden ganz innerhalb eines gewissen von ihm ausgehenden Winkels, oder aber es gibt nach jeder Richtung in hinreichender Nähe von ihm weitere Punkte der Kurve.

§ 15. *Die Invarianz der Erreichbarkeit.* Die oben (§ 10) erwähnte Äquivalenz der Erreichbarkeit mit der analytischen Stetigkeit kommt zunächst darin zum Ausdruck, daß die Erreichbarkeit sowohl für die engere wie für die weitere Gruppe invariant ist. Diese Invarianz findet sogar auch noch in dem Sinne statt, daß sie nicht bloß für stetige Transformationen der ganzen Ebene, sondern auch für stetige Abbildungen von bloßen Kurven oder sonstigen linienhaften Mengen aufeinander statt hat. Es besteht nämlich der Satz:

XVII. *Ist die Grenze $\mathfrak{T}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ stetiges Abbild eines Kreises oder Kreisbogens, so sind alle Punkte von $\mathfrak{T}$ für das Gebiet $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbar.*

Sei nämlich $\mathfrak{G}'$ ein Teilgebiet von $\mathfrak{G}$, t' ein Punkt seiner Grenze, und $\{t_\nu\}$ eine gegen ihn konvergierende einfache Folge. Man wähle dann zu jedem Punkt t_ν einen Punkt k_ν des Kreises $\mathfrak{K}$, der Bildpunkt von t_ν ist, beliebig aus, so haben die so ausgewählten Punkte k_ν mindestens einen Grenzpunkt k_ω, und man kann, genau wie in § 9, eine Teilfolge $k_{\nu_1}, k_{\nu_2} \cdots k_{\nu_\lambda} \cdots$ dieser Punkte so bestimmen, daß sie auf $\mathfrak{K}$ eine einfache Folge bilden, und k_ω ihr einziger Grenzpunkt ist. Sei

$$\{k'_\nu\} = k'_1, k'_2 \cdots k'_\nu \cdots$$

diese Teilfolge, und seien

$$\{t'_\nu\} = t'_1, t'_2 \cdots t'_\nu \cdots$$

die Bildpunkte, so haben sie ebenfalls t' als Grenzpunkt.

1) Bei andern Fundamentalbereichen braucht dies keineswegs der Fall zu sein.

2) Dagegen ist ein Krümmungskreis nicht mehr vorhanden, vgl. Poincaré a. a. O. sowie die Darstellungen von Fricke und Klein.

Nun entspricht jedem Kreisbogen $K'_\nu = k'_\nu k'_{\nu+1}$ notwendig eine *zusammenhängende* Teilmenge T'_ν, die t'_ν und $t'_{\nu+1}$ enthält. Wählt man nun auf dem Kreisbogen K'_ν einen Punkt k''_ν *beliebig* aus, so haben alle diese Punkte $\{k''_\nu\}$ ebenfalls den Punkt k_ω als Grenzpunkt; wegen der Stetigkeit müssen daher die auf den Mengen T'_ν enthaltenen Bildpunkte $\{t''_\nu\}$ ebenfalls t' als Grenzpunkt besitzen. Wie man andererseits auch die Punkte t''_ν auf den Mengen T'_ν annehmen mag, immer gibt es zu jedem t''_ν mindestens je einen Bildpunkt k''_ν auf K'_ν, und deshalb muß auch *jede* Folge $\{t''_\nu\}$ den Punkt t' zum Grenzpunkt haben, wie auch die Punkte t''_ν auf den Mengen T'_ν gewählt werden. Daraus folgt aber, daß die Breite $\mathfrak{B}(T'_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert, denn sonst könnte man gemäß § 9 auf den Mengen T'_ν Punkte τ'_ν so annehmen, daß ihr Grenzpunkt τ'_ω von t' verschieden ist. Damit ist die Erreichbarkeit von t' gemäß § 10 bewiesen.[1])

Dieser Satz enthält die in § 8 erwähnte Eigenschaft, die die Vervollständigung des Jordanschen Kurvensatzes bildet. Sein Inhalt geht aber über diesen Satz wesentlich hinaus. Denn die Erreichbarkeit wird hier nicht nur für die umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen, sondern auch für jede *einseitig* eindeutige und stetige Abbildung nachgewiesen.

§ 16. *Die Invarianz der einfachen geschlossenen Kurve.* Auf Grund des Vorstehenden können wir nun folgenden Hauptsatz aussprechen.

XVIII. *Die einfache geschlossene Kurve ist invariant gegenüber jeder umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformation, die sie betrifft, oder an der sie Teil nimmt.*

Handelt es sich zunächst um eine Transformation der ganzen Ebene oder eines solchen Gebietes, das die einfache geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ einschließt, so geht $\mathfrak{C}$ gemäß § 3 in eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}'$ über, zugleich $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$. Nach § 15 folgt nunmehr, daß $\mathfrak{C}'$ eine einfache geschlossene Kurve ist.

Falls die Transformation nur die Kurve $\mathfrak{C}$ und ihr Inneres betrifft, folgt aus den Sätzen von § 3 und 5, daß $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ in ein Gebiet $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{C}$ in eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}'$ übergeht, die Grenze von $\mathfrak{G}$ ist, und nach § 15 sind auch wieder alle Punkte von $\mathfrak{C}'$ für $\mathfrak{G}$ erreichbar.

1) Man beachte, daß im Beweis die Abbildung nur für den Kreisbogen und die Grenze $\mathfrak{T}$ des Gebiets $\mathfrak{G}$ vorausgesetzt wurde, und daß eine Beziehung zwischen dem Kreisinnern und dem Gebiet $\mathfrak{G}$ in den Beweis nicht eingeht. Ist also $\mathfrak{T}$ gemeinsame Grenze zweier Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, so ist die Erreichbarkeit sowohl für $\mathfrak{G}_1$ wie für $\mathfrak{G}_2$ vorhanden.

Handelt es sich endlich um eine Transformation, die *nur* die Kurve 𝔈 betrifft, und ist 𝔗 die Bildmenge, so kann man zunächst 𝔈 umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Kreis 𝔎 abbilden, und es wird dann 𝔗 auch umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Kreises 𝔎 sein. Wir beweisen deshalb den Satz nur für den Fall, daß 𝔈 ein Kreis 𝔎 ist, womit zugleich wieder der Jordansche Satz bewiesen wird.[1])

Zunächst ist 𝔗 wieder eine zusammenhängende Menge von der man ebenso wie in § 3 beweist, daß sie keinen flächenhaften Bestandteil enthält, also linienhaft ist. Sie bestimmt daher eine Teilung der Ebene in gewisse Gebiete $\{𝔊\}$. Ist 𝔊′ eines von ihnen und 𝔗′ seine volle Grenze, so ist 𝔗′ notwendig zusammenhängend und hat als Bildmenge einen Kreisbogen K' von 𝔎′. Aus § 15 folgt daher wieder, daß 𝔗′ für 𝔊′ allseitig erreichbar ist.

Es ist daher nur noch zu zeigen, daß 𝔗 die Ebene in *zwei* Gebiete zerlegt. Wie in § 3 folgt bereits, daß die Komplementärmenge von 𝔗 nicht ein einziges Gebiet sein kann.

Sie zerfällt daher in mindestens zwei Gebiete; sei 𝔍′ eines von ihnen und 𝔈′ die zu seiner Grenze gehörige einfache geschlossene Kurve. Dann ist die Bildmenge 𝔎′ von 𝔈′ wieder zusammenhängend, also ein Kreisbogen oder der Kreis selbst. Nach den Hilfsätzen von § 3 kann aber ein Kreisbogen nicht Bild einer einfachen geschlossenen Kurve sein, also muß 𝔎′ mit dem ganzen Kreis identisch sein. Daher ist 𝔈′ auch mit 𝔗 identisch, und es zerfällt mithin die Ebene nur in die zwei Gebiete 𝔍(𝔗) und 𝔄(𝔗); es ist also 𝔗 eine einfache geschlossene Kurve.

Aus diesem Satz ziehe ich noch nachstehende Folgerung.

XIX. *Ist das einfach zusammenhängende Gebiet 𝔊 nebst seiner Grenze 𝔗 umkehrbar eindeutiges und stetiges Bild eines analogen Gebietes 𝔋 und seiner Grenze 𝔖, und ist jeder Punkt von 𝔖 von 𝔋 aus erreichbar, so ist auch jeder Punkt von 𝔗 von 𝔊 aus erreichbar.*

Ich gebe den Beweis diesmal so, daß ich den Weg der von einem Punkt n des Gebietes 𝔊 zu einem Punkt t seiner Grenze führt, wirklich herstelle.

Sei 𝔩 der von einem Punkt m des Gebietes 𝔋 zu einem Punkt s von 𝔖 führende Weg, so entspricht ihm im Gebiet 𝔊 gemäß Satz XVIII ein von dem Bildpunkte n zu t führender einfacher Kurvenbogen C. Es ist daher nur noch zu zeigen, daß man ihn durch einen einfachen Weg ersetzen kann. Dazu sei $l^{(\nu)}$ irgendein Stück von 𝔩, das aus einer end-

1) Der folgende Beweis ist sachlich mit dem in § 3 enthaltenen identisch; ich setze ihn der Vollständigkeit halber nochmals hierher.

lichen Zahl von Strecken besteht, und $C^{(\nu)}$ der zugehörige Teilbogen von C. Dann sind $C^{(\nu)}$ und $\mathfrak{T}$ getrennte Mengen, da $l^{(\nu)}$ und $\mathfrak{S}$ es sind. Man kann daher um jeden Punkt von $C^{(\nu)}$ einen Kreis legen, der keinen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält. Nach dem Borelschen Theorem (Kap. III § 2) gibt es daher eine endliche Zahl dieser Kreise von der Art, daß sie alle Punkte von $C^{(\nu)}$ einschließen und ganz zu $\mathfrak{G}$ gehören. Daher kann man den in ihnen enthaltenen Kurvenbogen $C^{(\nu)}$ auch durch einen Weg $\lambda^{(\nu)}$ endlicher Streckenzahl ersetzen. Dies gilt für jeden Kurvenbogen $C^{(\nu)}$; andrerseits folgt aus der Stetigkeit, daß alle diese Kreise für hinlänglich großes ν ganz innerhalb einer gewissen Umgebung von t enthalten sind. Daher hat der so konstruierte Weg in der Tat nur den Punkt t als Endpunkt oder als einzigen Grenzpunkt, und der Satz ist bewiesen.

§ 17. *Die übrigen gestaltlichen Invarianten.* Das Vorstehende gestattet nunmehr in einfachster Weise die gesamte gestaltliche Struktur einer ebenen Punktmenge als Invariante der engeren Gruppe nachzuweisen. Dabei beschränke ich mich auf Transformationen, die einen Bereich betreffen, in dem die Punktmenge enthalten ist. Es genügt, dies in Kürze anzudeuten.

1) Die Struktur eines jeden abgeschlossenen *Kontinuums,* sowie die durch sie bewirkte Gebietsteilung ist eine Invariante. Dies bedeutet, daß jedes Gebiet in ein Gebiet übergeht, jeder Grenzpunkt eines Gebietes $\mathfrak{J}$ in einen Grenzpunkt der Bildmenge $\mathfrak{J}'$ und jeder Grenzpunkt zweier Gebiete $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ in einen Grenzpunkt von $\mathfrak{J}_1'$ und $\mathfrak{J}_2'$ usw.

2) Auch die gestaltliche Struktur einer *jeden* abgeschlossenen Menge und damit auch ihrer Komplementärmenge ist eine Invariante der engeren Gruppe. Dies beruht unmittelbar darauf, daß sich die gestaltliche Analyse der allgemeinsten Mengen auf lauter invariante Prozesse stützt und daher selbst invariant ist. Insbesondere entspricht also jedem zusammenhängenden Bestandteil ein zusammenhängender, jedem flächenhaften ein flächenhafter, jedem linienhaften ein linienhafter, jedem für ein Gebiet $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkt ein für das Bildgebiet ebenfalls erreichbarer Punkt usw. usw.

3) Auch die Riemannsche *Zusammenhangszahl* ist eine Invariante. Dies kann auf Grund der in Kap. IV § 7 gegebenen Definition aus den Sätzen von § 4 über die Invarianz der Anordnung unmittelbar geschlossen werden.

4) Ich schließe mit folgender Bemerkung. Alle die gestaltlichen Sätze über Gebietsteilung, die wir aus methodischen Gründen zunächst mit einfachen Wegen abgeleitet haben, und alle auf ihnen beruhenden

Begriffsbestimmungen lassen sich, soweit sie unsrer Gruppe G gegenüber invariant sind, unmittelbar auf einfache Kurvenbögen ausdehnen. *Die methodische Beschränkung, von der wir ausgingen, stellt also keine sachliche Spezialisierung dar.* Endlich sieht man, daß die aus Strecken und Streckenzügen aufgebauten Punktmengen in gestaltlicher Hinsicht nicht etwa einen Spezialfall darstellen, sondern daß sie zu den Punktmengen des allgemeinsten gestaltlichen Typus führen, was für die Konstruktion einfachster typischer Formen von Wert ist.

§ 18. *Die Nichtinvarianz des Inhalts einer Punktmenge.* Ich schließe die Erörterungen der invarianten Eigenschaften mit einem Satz negativer Tragweite, nämlich dem folgenden:

Der Inhaltsbegriff ist keine Invariante der Gruppen G oder Γ.[1]) Die Wichtigkeit dieses Satzes beruht darauf, daß er die Erklärung für eine Kurvengattung gibt, die man erst neuerdings kennen gelernt hat, nämlich für einfache geschlossene Kurven, denen man einen Flächeninhalt beilegen muß. Die Möglichkeit solcher Kurven blieb lange eine offene Frage; der obige Satz bejaht ihre Möglichkeit. Näher gehe ich auf sie im nächsten Kapitel ein (§ 17).

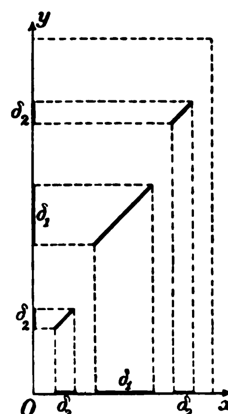


Fig. 16.

Um den Satz zu beweisen, genügt es, die Nichtinvarianz des Inhalts für einen einzigen Fall darzulegen. Ihn dürfen wir so einfach wie möglich wählen; insbesondere wollen wir zunächst den Inhalt einer linearen Menge ins Auge fassen.

Dazu gehe man von einer nirgendsdichten perfekten Menge T der Einheitsstrecke aus, die den Inhalt Null hat. (Fig. 16.) Sei $\{\delta_\nu\}$ die zugehörige Intervallmenge, so daß $\sum \delta_\nu = 1$ ist. Werden jetzt die Intervalle δ'_ν auf der y-Achse auf einer Strecke s der Länge 2 so verteilt, daß erstens

1) C. Bortolotti hatte für eine lineare Menge, die auf einem unendlich ausgedehnten Intervall liegt, die Invarianz des Inhalts für umkehrbar eindeutige Transformationen behauptet, dies aber später zurückgenommen (Rend. Linc. (5) 11_2 (1902) p. 51). Der Inhalt für ein unendliches Intervall war dabei so definiert, wie ein über ein unendliches Intervall erstrecktes Integral, d. h. als Grenzwert des Inhalts M_n, der sich auf das Intervall $x_0 \dots x_n$ bezieht. Man sieht an dem obigen Beispiel leicht, daß diese Invarianz nicht zutrifft. Der Grenzwert des Inhalts für die eine Menge ist Null, wenn man in jede Strecke $x_n \dots x_{n+1}$ eine inhaltslose Menge setzt; der Grenzwert des Inhalts der Bildmenge ist endlich. Dagegen findet die Invarianz für den Grenzwert von $M:(x_0 - x_n)$ für limes $n = \infty$ statt, falls er existiert. Bortolotti bezeichnet ihn als *Häufigkeit* im Punkt ∞. (Rend. Linc. (5) 15, 1 (1906) S. 684.)

$\varrho_\nu' = \delta_\nu$ ist, daß zweitens die Intervalle δ_ν' die gleiche Anordnung haben wie die Intervalle δ_ν, und daß sie drittens auch die Strecke s überalldicht erfüllen, so ist damit eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Einheitsstrecke der x-Achse auf eine Strecke doppelter Länge auf der y-Achse begründet. Während aber die auf der x-Achse enthaltene perfekte Menge T den Inhalt Null hat, ist der Inhalt der Bildmenge S auf der y-Achse gleich 1.

Daraus kann die Nichtinvarianz auch für ebene und räumliche Mengen leicht gefolgert werden. Um dies z. B. für ebene Mengen zu erweisen, errichte man in den Punkten von S und T auf der xy-Ebene Lote gleicher Länge h und bezeichne die von ihnen gebildeten Mengen durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$. Die erste hat den Flächeninhalt Null, während die zweite den Flächeninhalt h hat.[1]) Das Gleiche läßt sich für jeden R_n beweisen.[2])

§ 19. *Ausdehnung auf den Raum.* Die Methoden der Beweisführung habe ich auch in diesem Kapitel so gewählt, daß sie eine Ausdehnung auf räumliche Gebilde gestatten. Trotzdem sind die Beweise nur zu einem gewissen Teil unmittelbar übertragbar. Erstens ist im Raum auch der Gegensatz zwischen Kurven und Flächen in Betracht zu ziehen, und zweitens spielt die Zusammenhangszahl für die Sätze und die Beweise eine wichtige Rolle. Sie ist ebenfalls eine Invariante der engeren Gruppe; aber ohne Kenntnis dieser Invarianz kann ein Teil der vorstehenden Entwicklungen nicht direkt übertragen werden. Doch wird man hierin einen Mangel der benutzten Methoden nicht erblicken dürfen. Denn die Rücksicht auf die Zusammenhangszahl ist im Raum unvermeidlich; jede Methode, die sie außer acht läßt, würde nur einen Teil dessen leisten, was zu beweisen ist.

Ich muß mich mit diesem Hinweis begnügen. Im einzelnen ist Folgendes zu bemerken.

1. Die Beweise für die Invarianz von Grenzpunkt und Zusammenhang sind von der Dimension unabhängig und bleiben unverändert für jeden R_n in Kraft. Dies gilt für die engere und die weitere Gruppe und im gleichen Umfang wie in § 1.

2. Die in § 3 enthaltenen Hilfssätze, die für die weiteren Untersuchungen das wesentliche Hilfsmittel bilden, beruhen auf dem Polygonsatz von Kap. IV § 1, 3. In dessen Erweiterung auf den Raum gehen

1) Daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ eineindeutig und stetig abbildbar sind, ist offenbar.

2) Sind alle ersten Differentialquotienten der abbildenden Funktionen geschränkt, so ist nach J. Pierpont der Inhalt der Bildmenge ebenfalls Null. Trans. Am. Math. Soc. 6 (1905) S. 423.

aber die Zusammenhangszahlen ein, und so erscheint bereits hier das eben erwähnte Hindernis. Allerdings benutzt man diesen Satz nur in seiner einfachsten Form. Doch ist er auch in dieser Form nicht ohne weiteres übertragbar, da hier der Unterschied zwischen Kurve und Fläche hineinspielt. Die übrigen Argumente sind übertragbar.

3. Ist der in § 3 enthaltene Hilfssatz für den Raum in dem eben genannten Umfang bewiesen, so kann auch der Satz, der die Invarianz der geschlossenen Kurve betrifft, ohne Benutzung neuer Hilfsmittel auf den Raum übertragen werden. Damit würde dann auch bereits ein Beweis für die Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes vorhanden sein. Dies gilt sogar ohne Rücksicht auf die Zusammenhangszahl der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$. Übrigens ist im Raum auch noch die Invarianz der geschlossenen Kurve zu erweisen.

4. Die Beweise für die Invarianz der Anordnung bedürfen ebenfalls keiner neuen Hilfsmittel, sobald die Invarianz der geschlossenen Fläche bewiesen ist.

5. Auch die Sätze über die Invarianz des Gebiets lassen sich unverändert auf den Raum übertragen, sobald die Invarianz der geschlossenen Fläche erwiesen ist. Andere Argumente außer den eben genannten treten in ihrem Beweis nicht auf.

6. Damit ist dann auch der in § 7 enthaltene Beweis für die Invarianz des Dimensionsbegriffs unverändert auf den Raum übertragbar.[1])

7. Der in § 8 enthaltene Beweis des Jordanschen Kurvensatzes ruht auf der überalldicht werdenden zyklischen Anordnung und auf der Zerfällung eines zyklischen Systems von $2n$ Intervallen in zwei Systeme von je n Intervallen, die abwechselnd aufeinander folgen. Im Raum müßte man also eine analoge Anordnung auf der Kugel benutzen[2]); doch fehlt hier zunächst noch die genauere Kenntnis der bezüglichen räumlichen Ordnungstypen.

Ein einzelnes Resultat über die Ausdehnung des Jordanschen Satzes liegt von L. D. Ames vor[3]); seine Methoden sind analog zu denen, die er in der Ebene benutzt. Er geht von drei Gleichungen

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

aus und stützt den Beweis auf die Betrachtung des körperlichen Winkels W, den ein Vektor mt erfüllt, wenn t alle Punkte der durch die drei Gleichungen dargestellten Punktmenge durchläuft. Dieser Winkel erleidet beim Durchgang durch die Fläche einen Sprung, woraus das

1) Vgl. auch die S. 168 Anm. 1 zitierte Arbeit von Baire.

2) Bei Beschränkung auf den einfachsten Fall.

3) Am. Journ. of Math. 27 (1905) S. 363.

weitere analog wie in der Ebene gefolgert wird. Der Beweis muß solche Voraussetzungen über die Funktionen f, φ, ψ machen, daß sie den Gebrauch des Integrals gestatten, das den Winkel W darstellt.

Um den Begriff der *einfachen Folge* und der *Wegdistanz* zu übertragen, hat man so zu verfahren, daß man von den in § 9 genannten Eigenschaften die unter 4) enthaltene zunächst wegläßt, da sie für den Raum illusorisch wird. Sind ferner $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zwei Wege, die einen Punkt m des räumlichen Gebietes $\mathfrak{G}$ mit zwei Punkten t' und t'' seiner Grenze verbinden, ist $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{G}$ approximierendes Polyeder, und sind p' und p'' seine Kreuzungspunkte mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, so kann man auf $\mathfrak{P}$ einen p' und p'' verbindenden *kürzesten* Streckenzug $\mathfrak{p}$ legen, und man kann mit diesem Streckenzug und mit den Wegstücken $m\,..\,p' = l'$ und $m\,..\,p'' = l''$ ein gewisses in $\mathfrak{G}$ enthaltenes polyedrales einfaches Flächenstück[1]) P bilden, dessen Form zunächst teilweise unbestimmt bleibt. Ist $\mathfrak{P}'$ ein Polyeder, das im Abstand $\varepsilon' < \frac{1}{3}\varepsilon$ approximiert, so gibt es auf ihm einen analogen kürzesten Streckenzug $\mathfrak{p}'$, und in dem Hohlraum zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ kann man einen die Streckenzüge $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ verbindenden Flächenstreifen konstruieren, der zusammen mit P ein einziges einfaches Flächenstück P' bildet. Macht man dies für alle Polyeder einer Folge $\{\mathfrak{P}_\lambda\}$, so ergibt sich schließlich ein einfaches polyedrales flächenhaftes Gesamtgebiet

$$G' = \mathfrak{M}\{P_\lambda\},$$

das durch Hinzufügung seiner Grenzpunkte in ein polyedrales Flächenstück Φ' übergeht. Dieses Flächenstück kann man benutzen, um mit den Wegen $\mathfrak{w}$, die *auf ihm* die Punkte t' und t'' verbinden, die Wegdistanz η in analoger Weise wie in § 9 zu definieren.

Ein solches Flächenstück Φ_ν gehört nun zu je zwei Punkten t_ν und $t_{\nu+1}$ einer einfachen Folge, oder genauer zu den Wegen $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$. Zwei solche Flächenstücke Φ_ν und Φ_μ können sich allerdings möglicherweise durchdringen; es dürfte sich aber ohne besondere Schwierigkeit zeigen lassen, daß sich dieser Umstand durch geeignete Wahl der zunächst noch unbestimmten Streifen Φ_ν bei einer einfachen Folge $\{t_\nu\}$ vermeiden läßt.[2]) Ist dies geschehen, so kann man analog wie in § 9 die Teilgebiete und die Teilmengen

$$J_\lambda,\ J_{\lambda\mu},\ J_{\lambda\omega},\quad P_\lambda,\ P_{\lambda\mu},\ P_{\lambda\omega},\quad T_\lambda,\ T_{\lambda\mu},\ T_{\lambda\omega}$$

definieren und sie den weiteren Schlüssen zugrunde legen. Sei noch

$$\Phi = \mathfrak{M}\{\Phi_\nu\}.$$

1) D. h. ein solches, das sich nicht selbst durchdringt.

2) Übrigens könnte man auch Flächenstücke, die sich durchdringen, zu dem gleichen Zweck benutzen, da es nur auf die Anordnung ankommt.

8. Um die Begriffe der Erreichbarkeit und der allseitigen Erreichbarkeit zu übertragen, muß man sich bewußt bleiben, daß die allseitige Erreichbarkeit das geometrische Äquivalent der analytischen Stetigkeit bildet. Die Stetigkeitsdefinition lautet aber im Raum nicht anders als im linearen Gebiet und in der Ebene; sie knüpft sich überall an *Folgen diskreter Punkte vom Typus* ω, und kann insbesondere auch an *einfache* Folgen geknüpft werden. Andererseits muß sie aber auch für *jede* Folge $\{t_\nu\}$ erfüllt sein, die den Punkt t als Grenzpunkt besitzt.[1])

Demgemäß wird die Erreichbarkeit dann und nur dann als *allseitig* zu bezeichnen sein, wenn sie für jedes polyedrale Teilgebiet Φ besteht, das zu einer Folge $\{t_\nu\}$ gehört, und durch irgend welche zu ihnen führende Wege $\{\mathfrak{l}_\nu\}$ dem obigen gemäß gebildet wird, welche Wege $\mathfrak{l}_\nu$ und welche durch sie bestimmte Gebiete Φ_ν man auch benutzen mag. Man hat also auch im Raum nur *flächenhafte* Gebiete in Betracht zu ziehen.

Auf einen Umstand muß aber noch hingewiesen werden. Enthält nämlich die Grenze eines räumlichen Gebietes $\mathfrak{G}$ Punkte, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{G}$ sind, so können Besonderheiten eintreten. Man errichte z. B. längs einer Geraden g auf der Oberfläche eines Würfels in den Punkten einer nirgendsdichten perfekten Menge Lote in das Innere, so sind die Punkte dieser Lote nicht sämtlich allseitig erreichbar, obwohl es polyedrale Teilgebiete im Innern des Würfels gibt, für die sie es sind. Es gibt aber auch solche, für die sie es nicht sind; um eines zu erhalten, genügt es, eine den Würfel *senkrecht* durchschneidende Ebene zu benutzen, die die Gerade g enthält.

Die in § 10 enthaltenen Erreichbarkeitssätze werden sich unter Benutzung geeigneter Gebiete Φ auf den Raum übertragen lassen.

9. Die Definition der einfachen geschlossenen Fläche ist ohne weiteres auf den Raum übertragbar. Das Gleiche gilt auch von dem Satz XIV, falls man für den Beweis wieder die vorstehend eingeführten polyedralen Oberflächen Φ benutzt.

10. Der Beweis des Satzes XV benutzt die bekannten Eigenschaften, die dem Ordnungstypus des Kontinuums eigen sind; er wird daher erst dann übertragbar, sobald eine analoge Theorie für den Ordnungstypus des räumlichen flächenhaften Kontinuums vorliegt.

11. Der in § 13 enthaltene Beweis ist insofern günstiger daran, als er sich eine überalldichte abzählbare Menge, deren Ableitung das Kontinuum ist, in *bestimmter* zweckmäßiger Weise auswählt und sie für die weiteren Schlüsse zugrunde legt.

---

1) Vgl. auch Bericht I S. 116.

Um diesen Beweis zu übertragen, handelt es sich wieder darum, für ein Polyeder $\mathfrak{P}$ ein Analogon der zyklischen überalldichten Anordnung herzustellen. Dazu wird man zweckmäßig einerseits Punkte *größten Abstands* und andererseits wieder *kürzeste Streckenzüge* benutzen.

Hierfür gebe ich noch folgende Hinweise. Auf dem Polyeder $\mathfrak{P}$ nehme man zunächst zwei Punkte m_1 und m_2 an, deren Abstand $\varrho(m_1, m_2)$ ein Maximum ist, und lege durch sie einen auf $\mathfrak{P}$ verlaufenden geschlossenen Streckenzug P, der $\mathfrak{P}$ in zwei polyedrale Teilgebiete J_1 und J_2 zerlegt, und seinerseits durch m_1 und m_2 in die Streckenzüge P' und P'' zerfällt. In jedem dieser Teilgebiete J_i bestimme man nun einen Punkt m_i, dessen Abstand $\varrho(m_i, P)$ ein Maximum ist, und bestimme dann auf P' und P'' je einen Punkt m_i' und m_i'', der von m_i den größten Abstand hat. Alsdann zeichne man wieder in jedem Gebiet J_i die kürzesten Streckenzüge, die den Punkt m_i mit den Punkten m_i' und m_i'' verbinden. Dadurch zerfällt jedes Gebiet J_i in je zwei Gebiete J_{ik}, die ihrerseits von einem Polygon P_{ik} begrenzt sind. Mit jedem von ihnen verfährt man analog; man bestimmt zunächst den Punkt m_{ik}, dessen Abstand von P_{ik} ein Maximum ist, bestimmt auf jedem der Streckenzüge, in die P_{ik} durch die bereits vorhandenen Teilpunkte (die man auch als Ecken von P_{ik} ansehen kann) zerfällt, einen zu m_{ik} nächsten Punkt, und zieht nun wieder in J_{ik} die kürzesten Streckenzüge, die von m_{ik} zu ihnen führen, so dürfte dieses Verfahren den verlangten Ordnungstypus entstehen lassen.

Da die Polyeder $\mathfrak{P}$ aus kongruenten Würfeln bestehen, wird man auch leicht schließen können, daß jeder Oberflächenteil allmählig beliebig klein wird, und daß, wenn man in ihm einen Punkt p annimmt und den zugehörigen nächsten Punkt von $\mathfrak{F}$ bestimmt, deren Anordnung bei geeignetem ε und σ (§ 13) der der Punkte p ähnlich ist.

Von den in § 15 enthaltenen Sätzen gestattet derjenige, der die Erreichbarkeit betrifft, in folgender Weise eine Ausdehnung auf den Raum. Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf die Kugel, so hat man aus den auf ihr liegenden Punkten $\{k_\nu\}$ eine solche Teilmenge $\{k_\nu'\}$ auszuwählen, daß sie ebenfalls eine einfache Folge bildet, die einen Punkt k_ω als Grenzpunkt besitzt. Dann nimmt der Abstand $\varrho(k_\nu', k_\omega)$ mit wachsendem ν ab, und es werden die sämtlichen Radien r_ν', die den Mittelpunkt der Kugel mit den Punkten k_ν' verbinden, einen sich nirgends durchsetzenden polyedralen Sektor bilden, mit dem man in derselben Weise operieren kann, wie es in § 15 geschieht.

Dagegen beruht der Beweis des Satzes XVIII wiederum auf den Hilfssätzen von § 3 und wird daher erst dann übertragbar, wenn diese es sind.

Kapitel VI.

Die stetigen Kurven.

Die Frage, unter welchem Bilde wir uns die allgemeinste stetige Kurve vorzustellen haben, ist vor längerer Zeit einmal von Klein[1]) gestellt worden. Ihm lag daran, auf den empirischen Ursprung unserer geometrischen Vorstellungen hinzuweisen und daran zu erinnern, daß wir uns die durch eine stetige Funktion $y = f(x)$ dargestellten Punkte vermöge unserer psychischen Organisation kaum anders als unter dem Bilde eines *Streifens* vorstellen können. Hier soll dieselbe Frage nicht im Rahmen der Approximationsmathematik, sondern mengentheoretisch und gestaltlich erörtert werden. Es ist also zu untersuchen, welches die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften der ebenen Punktmengen sind, die eindeutiges und stetiges Bild der Strecke sein können. Methodisch stütze ich mich dabei in erster Linie auf die Ergebnisse des vorigen Kapitels. Zu ihnen kommen noch einige neue Hilfsbegriffe, die ich bis hierher zurückstellen konnte, besonders der Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* der approximierenden Polygone und seine Beziehung zur Erreichbarkeit (§ 1 und 2).

Die gestaltlichen Eigenschaften der als *stetige Kurven* zu bezeichnenden Punktmengen sind wesentlich oder vielmehr ausschließlich durch die Invarianten der *weiteren* Gruppe Γ bedingt. Als solche nenne ich den Grenzpunkt, den Zusammenhang und die Erreichbarkeit; es sind diejenigen, in denen, wie wir sahen, die analytische Stetigkeit ihren geometrischen Ausdruck findet. Dagegen bleiben weder die Dimension noch die Gebietsteilung bei der weiteren Gruppe invariant, und dies bewirkt, daß das allgemeinste stetige Kurvenbild sehr mannigfache Formen aufweisen kann; Formen, die die Phantasie sich schwer vorstellen konnte, ehe sie an der Hand der mengentheoretischen Analyse auf sie hingeleitet wurde.[2])

1) Vgl. das von Klein erstattete Gutachten: Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises, Kasan 1897, S. 5.

2) Zwei Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ zu einem einheitlichen Bilde gestaltlich zu verschmelzen, geht im Allgemeinen über unser räumliches Können.

Die *Erreichbarkeit*, die jedem eindeutigen und stetigen Abbild $\mathfrak{C}$ der Strecke eigen ist, bedarf noch näherer Bestimmung; sie kommt darin zum Ausdruck, daß jeder Punkt, der zur Grenze irgend eines der Gebiete gehört, in die die Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{C})$ der Menge $\mathfrak{C}$ die Ebene zerlegt, für dieses Gebiet allseitig erreichbar ist. Ich erweise dies zunächst für den Fall, daß die Menge $\mathfrak{C}$ Grenze eines einzigen Gebietes ist (§ 4), dann für den Fall, daß sie ein Flächenstück darstellt, wofür die Peanosche Kurve das einfachste Beispiel bildet (§ 5), und endlich für den Fall einer beliebigen endlichen Zahl von Gebieten oder Flächenstücken (§ 6). In allen diesen Fällen stellen Zusammenhang und Erreichbarkeit die einzigen notwendigen und hinreichenden Eigenschaften dar.

Zerfällt die Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{C})$ in *unendlich viele* Gebiete $\{\mathfrak{J}_\nu\}$, so erscheint noch eine *neue* Bedingung. Gebiete, deren Breite eine gegebene Größe übersteigt, dürfen nur in endlicher Zahl vorhanden sein (§ 7). *Eine weitere Bedingung existiert jedoch nicht.* Insbesondere unterliegt das Grenzgebilde $\mathfrak{U}$ der unendlich vielen Gebiete $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ einer gestaltlichen Bedingung *nicht mehr*. Es kann jede für eine solche Menge überhaupt mögliche Struktur haben. Dies führt zu der eigenartigen Folgerung, daß eine kurvenhafte Menge, die stetiges Abbild der Strecke ist, Bestandteile enthalten kann, die für sich diese Eigenschaft nicht besitzen.

Der Beweis gestaltet sich verschieden, je nach der Beschaffenheit, die das Grenzgebilde $\mathfrak{U}$ besitzt. Man hat zu unterscheiden, ob es Punkte von $\mathfrak{U}$ gibt, die nicht zugleich zur Grenze eines der Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$ gehören. Ist $\mathfrak{V}$ die von ihnen gebildete Menge, so kann $\mathfrak{V}$ *punkthaft* oder *kurvenhaft* sein; für beide Fälle wird der Beweis gesondert durchgeführt (§ 9, 10, 11). Der zweite Beweis umfaßt auch den Fall, daß der Menge $\mathfrak{C}$ *unendlich viele Flächenstücke* angehören. Eine für den Beweis nötige Hilfsbetrachtung zeigt (§ 8), wie man die sämtlichen Gebiete anzuordnen hat, um ihre Grenzen der Reihe nach auf unendlich viele Teilintervalle der Strecke so abzubilden, daß eine stetige Abbildung ermöglicht wird. Hiermit ist zugleich die wesentliche Grundlage geschaffen, auf die sich die wirkliche Herstellung der Abbildung aufbauen kann.

Durch den so gewonnenen Begriff der stetigen Kurve wird zunächst nur eine *Punktmenge besonderer gestaltlicher Struktur* geometrisch definiert. Eine solche Punktmenge kann auf mannigfache Art als stetiges Abbild der Strecke dargestellt werden. Jede Darstellung wird durch ein besonderes Funktionenpaar

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

vermittelt. Um hier präzise Bezeichnungen zu schaffen, sage ich, daß jedes Paar derartiger Gleichungen eine *Bahnkurve* bestimmt; einer Punktmenge oder einer stetigen Kurve entsprechen daher noch mannigfache Bahnkurven. Diese Bezeichnung soll zugleich dem Zweck dienen, notwendige und zufällige vielfache Punkte der stetigen Kurven und der Bahnkurven zu unterscheiden. Der Vielfachheitscharakter einer Bahnkurve kann die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ erreichen und dies sogar für jeden ihrer Punkte (§ 12).

Von den stetigen Kurven besonderer Art werden nur solche behandelt, die sich möglichst weit von der engsten Gattung, d. h. von der analytischen Kurve entfernen; auch sie nur insoweit, als ihre Eigenschaften mengentheoretisches Interesse haben. Solche Eigenschaften betreffen besonders die Bogenlänge und den Flächeninhalt.[1]

Die neuere Definition der *Bogenlänge* ist auf analytischem Boden erwachsen, sie knüpft nicht an die Punktmenge, sondern an das Funktionenpaar und damit an die Bahnkurve an. Sie geht einerseits auf Jordan und andererseits auf Scheeffer zurück. Scheeffer hat ganz besonders in eindringlichster Weise darauf hingewiesen, daß der ursprüngliche geometrische Grenzprozeß, der zur Bogenlänge führt, ein Resultat liefern kann, wenn der Umweg, der durch den Integralbegriff hindurchführt, versagt; es bedeutet daher eine methodische Vereinfachung, wenn man das geometrische Grenzverfahren direkt der Definition zu Grunde legt. Dies besteht in der Betrachtung der Streckenzüge, deren Endpunkte auf der Kurve liegen und sie allmählich überalldicht erfüllen; hat die Länge dieser Streckenzüge einen von der Wahl der Teilpunkte unabhängigen endlichen Grenzwert, so ist in ihm die Bogenlänge zu erblicken. Eine Verallgemeinerung von Lebesgue besteht noch darin, daß er die Unabhängigkeit von der Wahl der Teilpunkte nicht verlangt, und schon dann von einer endlichen Bogenlänge spricht, wenn die obere Grenze der Längen aller Streckenzüge endlich ist. Da für stetige Kurven die Unabhängigkeit eine Folge der Stetigkeit ist, so kommt der Unterschied beider Definitionen nur für Kurven in Betracht, die durch unstetige Funktionen definiert sind. Diese scheinbare Paradoxie findet darin ihre Lösung, daß man bei den durch unstetige Funktionen definierten Kurven die Sprungstrecken zu ihnen hinzuzurechnen hat, so daß wieder eine zusammenhängende Kurve entsteht. Der Gegensatz zwischen Jordan-Scheeffer und Lebesgue ist alsdann der, daß deren Definition hebbare Unstetigkeiten und äußere Sprünge

---

1) Die Existenz oder Nichtexistenz einer Tangente ist im wesentlichen schon im ersten Teil des Berichts erledigt; vgl. S. 144 ff.

ausschließt, während dies bei Lebesgue nicht der Fall ist; Lebesgue rechnet auch die äußeren Sprungstrecken dem geometrischen Gebilde hinzu.

Die Existenz einer endlichen Bogenlänge hängt aufs engste mit den von Jordan eingeführten Funktionen beschränkter Schwankung zusammen (§ 14). Deren Eigenart besteht darin, daß sie sich als Differenz zweier niemals wachsender oder niemals abnehmender Funktionen darstellen lassen; andererseits ist eine Bogenlänge für eine Bahnkurve immer und nur dann vorhanden, wenn die darstellenden Funktionen solche beschränkter Schwankung sind. Über die Beziehungen der Bogenlänge zur Tangente und zum bestimmten Integral besitzen wir einige Sätze, die von Scheeffer (§ 15) und Lebesgue (§ 16) ausgesprochen worden sind; die von Lebesgue knüpfen an den von ihm verallgemeinerten Integralbegriff an.

Die Frage, ob der durch eine geschlossene Kurve definierten Punktmenge ein *Flächeninhalt* zukommen könne, der nicht Null ist, war bis in die neueste Zeit unerledigt geblieben. Ist die Kurve rektifizierbar, so ist ihr Flächeninhalt nach einem Jordanschen Satz immer Null. Kurven mit Flächeninhalt mußten also unter der großen Menge der nicht rektifizierbaren Kurven aufgesucht werden. Man kann Kurven dieser Art als *nicht quadrierbar* bezeichnen. Das Verdienst, eine erste Kurve dieser Art durch eine besondere einfache Vorschrift konstruiert zu haben, gebührt Osgood. Jetzt wissen wir, daß die Herstellung solcher Kurven auf die mannigfachste Weise möglich ist. Man gelangt dazu mittelst eines von L. Zoretti ausgesprochenen Satzes. Die Verallgemeinerung dieses Satzes besagt nämlich, daß es möglich ist, zu jeder beliebigen punkthaften Menge $\mathfrak{T}$ eine *einfache* geschlossene Kurve zu konstruieren, die die Menge $\mathfrak{T}$ enthält. Da es nun möglich ist, die Menge $\mathfrak{T}$ so zu wählen, daß ihr ein Flächeninhalt zukommt, so sind auch einfache geschlossene Kurven dieser Art in mannigfachster Art konstruierbar. Eine spezielle solche Kurve, die als Menge $\mathfrak{T}$ die von W. Veltmann angegebene erste Menge dieser Art benutzt, hat G. Chisholm Young konstruiert.

Der innere Grund für die Existenz einfacher geschlossener nicht quadrierbarer Kurven liegt darin, daß der Inhalt keine Invariante der Analysis Situs ist; einem Kreis kann daher sehr wohl eine einfache Kurve mit Inhalt entsprechen (§ 17).

Die vorstehenden Begriffe lassen sowohl für die Bogenlänge, wie für die Flächenzahl Verallgemeinerungen auf den Raum zu (§ 18).

§ 1. *Gleichmäßige Konvergenz der approximierenden Polygone.* Während die einfache Kurve durch ihre Erreichbarkeit für das äußere *und* innere Gebiet definiert werden konnte, haben wir jetzt meist solche

geometrischen Gebilde in Betracht zu ziehen, die die Grenze eines *einzigen* Gebietes bilden, und zu erörtern, ob sie als eindeutige und stetige Bilder der Strecke darstellbar sind. Hierzu bedürfen wir eines neuen methodischen Hilfsmittels, nämlich des Begriffs der *gleichmäßigen Konvergenz* der approximierenden Polygone.

Ich werde diesen Begriff sofort näher erörtern, möchte aber zuvor die Auffassung zurückweisen, als sei er künstlich oder entbehrlich. Er bietet sich freilich nicht so unmittelbar dar, wie die übrigen. Er hat sich auch mir selbst erst allmählich aufgedrängt, ich stehe aber nicht an, auch in ihm einen derjenigen zu erblicken, in denen die gestaltlichen Eigenschaften der hier zu betrachtenden Gebilde ihren notwendigen und zureichenden Ausdruck finden.

Sei $\mathfrak{J}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathfrak{T}$ seine Grenze. Wie wir in Kap. IV, § 8 gesehen haben, kann man das in $\mathfrak{J}$ approximierende Polygon $\mathfrak{P}$ in allen Fällen so wählen, daß bei gegebenem σ für *jeden* Punkt t von $\mathfrak{T}$ die Relation

$$(1) \qquad \varrho(t, \mathfrak{P}) < \sigma$$

erfüllt ist. In dieser Tatsache werden wir daher das Merkmal der gleichmäßigen Konvergenz nicht erblicken können. Um einen brauchbaren Begriff dieser Art zu gewinnen, wollen wir vielmehr die Geltung der Relation (1) für *jedes Teilgebiet* J von $\mathfrak{J}$ mit Bezug auf den *es durchziehenden Bestandteil* P von $\mathfrak{P}$ fordern.

Um ihn zunächst an einem Beispiel deutlich zu machen, betrachten wir die S. 120 definierte geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ (Fig. 10). Sie enthält unendlich viele sich gegen die y-Achse häufende Bogen $C_1, C_2, \ldots C_\nu, \ldots$; seien $c_1, c_2, \ldots c_\nu, \ldots$ ihre tiefsten Punkte, und $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_\nu, \ldots$ die von einem Punkt m des Kurveninnern $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ zu ihnen führenden Wege. Ist nun $\mathfrak{P}$ *irgend* ein in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ approximierendes Polygon, so enthält es eine *endliche* Zahl von Buckeln, die zwischen den Kurvenbogen verlaufen; P_n sei derjenige Buckel, der der y-Achse am *nächsten* liegt. Man kann dann erstens, welches auch σ sei, $\mathfrak{P}$ so bestimmen, daß der Buckel P_n von der y-Achse um weniger als σ entfernt ist. Ist zweitens $\mathfrak{J}'$ ein durch zwei Wege $\mathfrak{l}_{n+\lambda}$ und $\mathfrak{l}_{n+\varrho}$ bestimmtes Teilgebiet von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$, so wird ihm (bei geeignetem λ und ϱ) ein *geradliniger* Bestandteil P' von P angehören; ferner gehören zur Grenze dieses Gebietes *alle* zwischen $c_{n+\lambda}$ und $c_{n+\varrho}$ liegenden Punkte c_ν, und jeder von ihnen ist von dem Bestandteil P' um mehr als 2 entfernt. Die Existenz eines solchen Teilgebiets findet überdies für *jedes* approximierende Polygon statt. Die oben geforderte Eigenschaft ist also für diese Kurve nicht erfüllt, und demgemäß wird sich auch zeigen, daß sie nicht stetiges Bild der Strecke sein kann.

Wir definieren also:

I. *Die im Gebiet $\mathfrak{J}$ approximierende Polygonfolge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ soll* ***gleichmäßig*** *konvergent gegen die Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{J}$ heißen, wenn für jedes Teilgebiet J von $\mathfrak{J}$ und jeden Punkt t seiner Grenze T sein Abstand von dem es durchziehenden Streckenzug P_ν von $\mathfrak{P}_\nu$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert, wenn also für jeden solchen Punkt t*

$$\lim \varrho\,(t,\, P_\nu) = 0$$

ist.

Falls also die Polygone $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ *nicht* gleichmäßig gegen $\mathfrak{T}$ konvergieren, so gibt es für unendlich viele von ihnen mindestens *je ein* Teilgebiet J', so daß für einen Punkt t' seiner Grenze und den es durchziehenden Streckenzug P'_ν von $\mathfrak{P}_\nu$ eine Relation

$$(1) \qquad \varrho(t', P'_\nu) > e > 0$$

besteht.

Da der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz nur einen Hilfsbegriff der Beweisführung darstellt, so ist es gestattet, daß wir uns auf gewisse Gebiete besonderer Art beschränken, und zwar auf die Gebiete J_λ, $J_{\lambda\mu}$ und $J_{\lambda\omega}$, die wir an der Hand der einfachen Folge in Kap. V § 9, definiert haben, sowie auf die Gebiete $J_k, J_{kl}, \ldots J_N \ldots$, die wir in Kap. V § 13 benutzt haben. Für die letzten gestaltet sich der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz am einfachsten.

Sei nämlich J_k ein Gebiet, das gemäß Kap. V § 13 mit Hilfe des Polygons $\mathfrak{P}$ konstruiert worden ist, P_k der es durchziehende Streckenzug von $\mathfrak{P}$, t_k ein Punkt seiner Grenze T_k, ferner d_k das Maximum des Abstands $\varrho\,(t_k, P_k)$ und endlich D das Maximum aller d_k, so daß also für *jeden* Punkt t_k von $\mathfrak{T}$

$$(2) \qquad \varrho\,(t_k, P_k) \leqq d_k \leqq D$$

ist, so wird die Polygonfolge $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ dann und nur dann gleichmäßig gegen $\mathfrak{T}$ konvergieren, falls für wachsendes ν $\lim D_\nu = 0$ ist. Bezeichnen wir also die zu den Gebieten J_N zugehörigen Streckenzüge von $\mathfrak{P}_\nu$ durch P_N[1]), so gibt es alsdann zu jedem σ einen Wert ν, so daß für jedes dieser Gebiete, also auch für jede Indizeskombination N die Relationen

$$(2) \qquad \varrho\,(t_N, P_N) \leq D_\nu < \sigma$$

bestehen. Ist dies für einen Wert von ν der Fall, so auch für jeden größeren.

---

1) Für die folgenden Bezeichnungen vgl. S. 184 ff.

Wichtig ist nun, daß die gleichmäßige Konvergenz der Gebiete J_N ausreicht, um sie auch für alle Gebiete $J_\lambda, J_{\lambda\mu}, J_{\lambda\omega}$ behaupten zu können; d. h. es besteht der Satz:

Ist die gleichmäßige Konvergenz für die Gebiete J_N erfüllt, so gilt sie auch für die Gebiete J_λ, $J_{\lambda\mu}$ und $J_{\lambda\omega}$.

Um ihn zu beweisen, setzen wir voraus, daß die Relationen (2) für gegebenes σ und für einen Wert $\nu > M$, d. h. also für ein Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ und alle zugehörigen Teilgebiete J_N erfüllt sind, und beweisen, daß hinreichend große Werte von λ existieren, so daß für *jedes derartige* Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ und für *jedes* Teilgebiet J_λ, $J_{\lambda\mu}$ und $J_{\lambda\omega}$ auch die Relationen

$$(3) \qquad \varrho(t_\lambda, P_\lambda^{(\nu)}) < 2\sigma, \quad \varrho(t_{\lambda\mu}, P_{\lambda\mu}^{(\nu)}) < 2\sigma, \quad \varrho(t_{\lambda\omega}, P_{\lambda\omega}^{(\nu)}) < 2\sigma$$

bestehen, falls t_λ, $t_{\lambda\mu}$, $t_{\lambda\omega}$ irgend ein Punkt der Mengen T_λ, $T_{\lambda\mu}$, $T_{\lambda\omega}$ ist. Dies ist aber leicht zu zeigen. Denn da die Streckenzüge $P_\lambda^{(\nu)}$, $P_{\lambda\mu}^{(\nu)}$, $P_{\lambda\omega}^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{P}_\nu$ durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}_\nu$ mit den zu den Punkten $\{t_\lambda\}$ führenden Wegen $\{\mathfrak{l}_\lambda\}$ bestimmt werden, und diese Schnittpunkte sich gegen einen Grenzpunkt von derselben Seite her verdichten[1]), so kann man für *jedes* Polygon $\mathfrak{P}$ ein hinreichend großes λ so finden, daß

$$\mathfrak{B}(P_\lambda) < \sigma, \quad \mathfrak{B}(P_{\lambda\mu}) < \sigma, \quad \mathfrak{B}(P_{\lambda\omega}) < \sigma$$

ist. Man kann daher λ auch so bestimmen, daß jeder Streckenzug P_λ, $P_{\lambda\mu}$, $P_{\lambda\omega}$ ein Teil eines der Streckenzüge P_N ist, in die das Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ durch die zugehörigen Teilgebiete J_N zerfällt.

Daraus folgt unmittelbar, daß, wenn die Relationen (2) für die Gebiete J_N erfüllt sind, die einem Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ entsprechen, Relationen der Form (3) bei geeignetem λ und dasselbe Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ auch für die Gebiete J_λ, $J_{\lambda\mu}$ und $J_{\lambda\omega}$ erfüllt sind (eventuell für ein andres σ). Sind also die Relationen (3) für eine dieser drei Gattungen nicht erfüllt, so können es auch die Relationen (2) für die Gebiete J_N nicht sein.

§ 2. *Hilfssätze über Erreichbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.*

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz bildet die Grundlage der Sätze, die ich über die allgemeinste stetige Kurve abzuleiten habe. Für einfache Kurven besteht der in Kap. V § 11 bewiesene Satz, daß bei einer einfachen Folge die Breite der zugehörigen Kurvenbogen gegen Null konvergiert. Diese Eigenschaft ist für sie durchaus wesentlich. Sie kommt darüber hinaus *jedem* stetigen Abbild der Strecke zu, und hat für sie die gleiche wichtige Bedeutung. Ist jedoch die Er-

1) Da nämlich $\{t_\lambda\}$ eine einfache Folge bildet.

reichbarkeit nur für ein einziges Gebiet bekannt, so läßt sich der für die einfache Kurve in Kap. V § 11 gegebene Beweis nicht übertragen; er kann aber mittelst der gleichmäßigen Konvergenz geführt werden.

Erreichbarkeit und gleichmäßige Konvergenz sind nämlich durch folgende zwei Sätze miteinander verbunden.

1) *Falls die Polygone* $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ *gegen die Grenze* $\mathfrak{T}$ *des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *gleichmäßig konvergieren, sind alle Punkte von* $\mathfrak{T}$ *allseitig erreichbar für* $\mathfrak{J}$.

Wenn nämlich ein Punkt t von $\mathfrak{T}$ für ein Teilgebiet $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{J}$ nicht erreichbar ist, kann es nach Kap. V § 10 keine Folge $\{t_\nu\}$ mit t als Grenzpunkt geben, deren Wegdistanzen η_ν gegen Null konvergieren. Sei insbesondere die Folge $\{t_\nu\}$ eine reduzierte Folge, so besitzen die η_ν für *jede* derartige Folge einen eigentlichen limes $H > 0$.

Nun bestimmt die Folge $\{t_\nu\}$ gemäß Kap. V § 9 ein Gebiet J_ω, zu dessen Grenze sowohl t wie auch der Punkt τ_ω gehört, für den $\varrho(\tau_\omega, t) = H$ ist. Beide Punkte gehören also auch zur Grenze jedes einzelnen Gebietes $J_{\lambda\omega}$. Sei nun $\mathfrak{P}$ *irgend eines* der approximierenden Polygone, so wird der in J_ω enthaltene Teil P_ω von den Wegen $\mathfrak{l}_\nu$ in Punkten p_ν gekreuzt, die einen zu P_ω gehörigen Grenzpunkt p_ω besitzen, gegen den sie von der gleichen Seite konvergieren.[1]) Wir können daher (Fig. 17) ein Gebiet $J_{\lambda\omega}$ so bestimmen, daß für den Streckenzug $P_{\lambda\omega}$ die Relation

Fig. 17.

$$\mathfrak{B}(P_{\lambda\omega}) < \sigma$$

besteht. Andrerseits ist offenbar

$$(1)\qquad H = \varrho(t, \tau_\omega) < \varrho(t, P_{\lambda\omega}) + \varrho(\tau_\omega, P_{\lambda\omega}) + \mathfrak{B}(P_{\lambda\omega});$$

es muß daher mindestens eine der beiden Größen $\varrho(t, P_{\lambda\omega})$ und $\varrho(\tau_\omega, P_{\lambda\omega})$ größer als $\frac{1}{2}(H - \sigma)$ sein.

Da nun $\mathfrak{P}$ ein *beliebiges* Polygon war, so würde es, falls t für $\mathfrak{J}'$ nicht erreichbar wäre, für *jedes* Polygon $\mathfrak{P}$ ein Teilgebiet $J_{\lambda\omega}$ von $\mathfrak{J}'$ geben, in dem der Maximalabstand $\varrho(t', P_{\lambda\omega})$ größer als eine endliche positive Größe bliebe; gemäß § 1 konvergierten daher die Polygone nicht gleichmäßig.

2) *Ist die Grenze* $\mathfrak{T}$ *des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *allseitig erreichbar, so konvergieren die in* $\mathfrak{J}$ *approximierenden Polygone gleichmäßig gegen* $\mathfrak{T}$.

Falls die Polygone nämlich nicht gleichmäßig konvergieren, so gibt es für unendlich viele von ihnen je ein Teilgebiet J', so daß für einen Punkt t' seiner Grenze T'

$$(2)\qquad \varrho(t', P') > e > 0$$

1) Man beachte, daß p_ω nur als Grenzpunkt aller Punkte $\{p_\nu\}$ definiert ist.

ist.[1]) Sei noch p' der Punkt, in welchem der in J' zu t' führende Weg $\mathfrak{l}$ den Streckenzug P' kreuzt.

Sei nun $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ die bezügliche Polygonfolge, so wollen wir aus ihr in einer sofort näher zu definierenden Weise gewisse Polygone

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^{(\nu)}, \quad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}^{(\varkappa)}, \quad \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}^{(\lambda)}, \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{P}^{(\varrho)} \cdots$$
$$1 < \varkappa < \lambda < \cdots < \varrho < \cdots$$

auswählen und bemerken zuvor, daß gemäß unserer Annahme für alle diese Polygone Relationen der Form

$$(3) \qquad \varrho(t_1, P_1) > e, \ \varrho(t_2, \quad P_2) > e, \cdots \varrho(t_\nu, P_\nu) > e \cdots$$

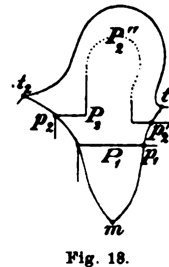
in dem Sinn bestehen, daß es für jedes Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ ein gewisses Gebiet J_ν gibt, so daß die vorstehende Relation für mindestens einen Punkt t_ν seiner Grenze T_ν erfüllt ist.

Die Wahl des Polygons $\mathfrak{P}^{(\varkappa)} = \mathfrak{P}_2$ soll nun insbesondere so getroffen werden, daß $\mathfrak{P}_2$ den Punkt t_1 approximiert (Kap. IV § 8); dann wird der Punkt t_1 auch von jedem Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ $(\nu > 2)$ approximiert. Ebenso wählen wir $\mathfrak{P}^{(\lambda)} = \mathfrak{P}_3$ so, daß $\mathfrak{P}_3$ und damit auch jedes Polygon $\mathfrak{P}_\nu (\nu > 3)$ den Punkt t_2 approximiert usw.

Der Punkt t_1 ist Grenzpunkt des Gebietes J_1. Da $\mathfrak{P}_2$, wie eben festgesetzt, den Punkt t_1 approximiert, so kann man den in J_1 enthaltenen Weg $\mathfrak{l}_1$ insbesondere auch so wählen, daß, wenn p_2' sein Kreuzungspunkt mit dem in J_1 enthaltenen Streckenzug von $\mathfrak{P}_2$ ist, für ihn die Relation

$$\varrho(t_1, p_2') < \tfrac{3}{2}\varepsilon_2$$

besteht. Der Kreuzungspunkt von $\mathfrak{l}_2$ mit $\mathfrak{P}_2$ sei, wie immer, p_2 (Fig. 18). Sei endlich J'' das durch die Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ bestimmte Teilgebiet[2]), so daß der zugehörige Streckenzug P_2'' von $\mathfrak{P}_2$ die Endpunkte p_2 und p_2' hat.


Fig. 18.

In dem durch die Punkte t_1, t_2 p_2, p_2' gebildeten Viereck ist dann

$$\overline{t_2 p_2} < \overline{t_2 t_1} + \overline{t_1 p_2'} + \overline{p_2' p_2},$$

und hieraus folgt, da $\overline{p_2' p_2} \leq \mathfrak{B}(P_2'')$ und $\overline{t_2 p_2} \leq \varrho(t_2, P_2) < e$ ist, weiter

$$(4) \qquad \mathfrak{B}(P_2'') > e - \overline{t_1 t_2} - \tfrac{3}{2}\varepsilon_2 \cdot$$

---

1) Vgl. das in § 1 erwähnte Beispiel.

2) Es gibt zwar zwei, doch kommt für das Folgende immer nur ein bestimmtes wohl definiertes in Betracht.

Die gleiche Relation leitet man für das Teilgebiet J''' ab, das durch die Wege $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_3$ bestimmt ist, sowie für jedes analog definierte Teilgebiet $J^{(\nu)}$; es besteht also für jedes ν die Relation

$$(5)\qquad \mathfrak{B}(P_\nu^{(\nu)}) > e - \overline{t_{\nu-1} t_\nu} - \tfrac{3}{2}\varepsilon_\nu.$$

Man erhält auf diese Weise eine Folge $\{t_\nu\}$, bei der für *je zwei* konsekutive Punkte die Relation (5) besteht. Aus ihr kann man wieder eine *einfache* Folge $\{t'_\nu\}$ auswählen; sei t'_ω ihr Grenzpunkt, und J'_ω das durch sie bestimmte Teilgebiet. Da nun, wie oben erwähnt, *jedes* Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ den Punkt t_1 approximiert, wenn $\nu > 1$ ist, ebenso den Punkt t_2, falls $\nu > 2$ ist usw., so folgert man noch, daß eine Relation der Form (5) auch für *je zwei* konsekutive Punkte der Folge $\{t'_\nu\}$ Geltung hat. Nimmt man nun M so an, daß $\varrho(t'_\nu, t'_{\nu+1}) < \sigma$ ist bei gegebenem σ und für jedes $\nu > M$, so wird, wenn wir die *dieser* Folge entsprechenden Streckenzüge kürzer durch $P^{(\nu)}$ und die zugehörigen ε_ν durch ε'_ν bezeichnen, für jedes derartige ν

$$(8)\qquad \mathfrak{B}(P^{(\nu)}) > e - \sigma - \tfrac{3}{2}\varepsilon'_\nu$$

sein. Ist nun T'_ω die Grenzmenge der Streckenzüge $P^{(\nu)}$, so ist (Kap. IV § 5)

$$\mathfrak{B}(T'_\omega) \geqq e,$$

so daß sich T'_ω nicht auf einen Punkt reduziert.

Die Menge T'_ω gehört zur Grenze von J'_ω und von jedem Teilgebiet $J'_{\lambda\omega}$. Sollte nun ein Punkt t von T'_ω für *jedes* Teilgebiet J'_λ und damit auch für jedes Teilgebiet $J'_{\lambda\omega}$ erreichbar sein, so kann doch, wie wir früher sahen (Kap. V, § 9) nur *ein* solcher Punkt existieren. Seien t' und t'' zwei von diesem eventuellen Punkt t verschiedene Punkte von J'_ω, so kann man ν so finden, daß t' und t'' für $\lambda > \nu$ zur Grenze *keines* Gebietes J'_λ gehören, wohl aber zur Grenze von $J'_{\nu\omega}$. Man betrachte nun die Kreuzungspunkte p_λ der zu den Punkten t'_λ führenden Wege mit *irgend einem* die Menge $\mathfrak{T}$ approximierenden Polygon $\mathfrak{P}$, so kann ein Weg, der in $J'_{\nu\omega}$ zu t' oder t'' führt, das Polygon $\mathfrak{P}$ niemals zwischen zwei Punkten p_λ und p_μ kreuzen, vielmehr müßte der Kreuzungspunkt notwendig auf p_ω fallen. Die beiden zu t' und t'' führenden Wege müßten daher identisch sein. Dies ist aber, wenn beide Punkte t' und t'' für das Gebiet $J'_{\nu\omega}$ erreichbar sein sollen, unmöglich; es könnten also nicht beide Punkte t' und t'' für $J'_{\nu\omega}$ erreichbar sein, obwohl sie zu seiner Grenze gehören. Damit ist der Satz bewiesen.

3) *Sind die Punkte einer Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ für das zugehörige Gebiet allseitig erreichbar, so konvergiert die Breite der zu einer einfachen Folge $\{t_\lambda\}$ gehörigen Teilmengen T_λ mit wachsendem λ gegen Null.*

Es genügt, diesen Satz für die Teilmengen T_N zu beweisen, die den Gebieten J_N entsprechen: denn daraus folgt er gemäß § 1 für hinreichend großes λ auch für die Mengen T_λ. Für die Mengen T_N ergibt er sich aber unmittelbar. Sind nämlich t'_N und t''_N zwei Punkte von T_N, so hat man

$$\varrho(t'_N, t''_N) \leq \varrho(t'_N, P_N) + \varrho(t''_N, P_N) + \mathfrak{B}(P_N),$$
$$< 2D^{(\nu)} + \mathfrak{B}(P_N),$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 3. *Hilfssätze über eindeutige und stetige Abbildung.* Für die Herstellung der Abbildung bedürfen wir zweier Hilfssätze, von denen der erste in präziser Form von T. Brodén aufgestellt wurde.[1]) Er ist von ihm für eine einzige unabhängige Variable ausgesprochen worden, gilt aber für jede abgeschlossene Menge.[2]) Er lautet:

II. *Ist $V = \{v\}$ eine überall dichte Teilmenge einer abgeschlossenen Menge $T = \{t\}$, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine in V stetige Funktion $f(v)$ zu einer in T stetigen Funktion $F(t)$ erweitert werden kann, darin, daß $f(v)$ in V gleichmäßig stetig ist.*

Die *Erweiterung* ist so zu verstehen, daß, wenn die Punktfolge $\{v_\nu\}$ den Punkt t als Grenzpunkt hat, als Wert $F(t)$ jeder Grenzwert der Folge $\{f(v_\nu)\}$ in Frage kommt; der Satz gibt also zugleich die Bedingung dafür an, daß jede Folge $\{f(v_\nu)\}$ nur *einen* Grenzwert besitzt. Dieser Satz ist die Grundlage vieler Methoden, die ich im folgenden benutze, und in denen es sich immer um die Bestimmung stetiger Funktionen durch ihre Werte an einer überall dichten Punktmenge handelt.

Ein zweiter Satz, der ebenfalls die Erweiterung einer bereits vorhandenen stetigen Beziehung betrifft, ist der folgende.[3])

III. *Ist die einfache geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Quadrats $\mathfrak{S}$, so kann man diese Abbildung zu einer analogen Abbildung des Kurveninnern und des Quadratinnern erweitern, die stetig in die gegebene Abbildung von Quadrat und Kurve übergeht.*

Dieser Satz läßt sich zunächst unmittelbar als richtig erkennen, wenn die Kurve $\mathfrak{C}$ ein gewöhnliches Polygon P ist, und zwar auf Grund folgender zwei Tatsachen:

---

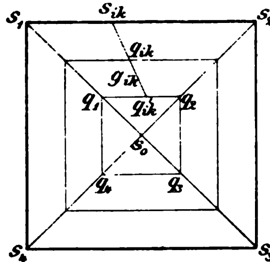
1) Journ. f. Math. 118 (1897) S. 3 und Acta Univ. Lund. 38 (1897) S. 10.

2) Vgl. Bericht I, S. 120. Einen Beweis hat auch E. Phragmén in Rend. Palermo 14 (1900) S. 256 mitgeteilt.

3) Math. Ann. 62 (1906) S. 319.

1) Ist das Polygon P konvex, so ordne man einen innern Punkt p_0 von P einem innern Punkt s_0 von $\mathfrak{S}$ beliebig zu und nehme auf P und $\mathfrak{S}$ entsprechende Punkte $p_1, p_2 \ldots p_\nu$ und $s_1, s_2 \ldots s_\nu$ so an, daß zu ihnen *jede* Ecke von P und *jede* Ecke von $\mathfrak{S}$ gehört. Wird dann p_0 mit allen Punkten p_i und s_0 mit allen Punkten s_i verbunden, so zerfallen P und $\mathfrak{S}$ in eine endliche Zahl von Dreiecken. Unsere Aufgabe ist also nur noch für die Dreiecke zu lösen. Dies kann offenbar für jedes einzelne Dreieck so geschehen, daß man alle von p_0 und s_0 ausgehenden Seiten ähnlich aufeinander bezieht und dann, wenn p und s entsprechende Punkte von P und $\mathfrak{S}$ sind, und p', p'' und s', s'' entsprechende Punkte auf den eben genannten Seiten zweier entsprechenden Dreiecke, dem Schnittpunkte von $p'p''$ und pp_0 den von $s's''$ und ss_0 entsprechen läßt.

2) Ist p eine konkave Ecke eines Polygons P, so zerfällt P durch eine von p ins Innere gehende Diagonale pp_1 in zwei Polygone geringerer Seitenzahl; andrerseits zerfällt $\mathfrak{S}$ durch die entsprechende Diagonale ss_1 in zwei *konvexe* Teile. Ordnet man nun pp_1 und ss_1 einander ähnlich zu, so sind auch die Umfänge der Teilpolygone umkehrbar eindeutig und stetig bezogen, und die Aufgabe wird für P und $\mathfrak{S}$ selbst gelöst sein, falls man sie für die Teilpolygone gelöst hat. Andrerseits kann man P und $\mathfrak{S}$ durch hinreichend viele Diagonalen in lauter *konvexe* Bestandteile zerlegen, und daraus folgt, daß die Abbildung für ein Quadrat $\mathfrak{S}$ und für *jedes* gewöhnliche Polygon endlicher Seitenzahl bewirkt werden kann.



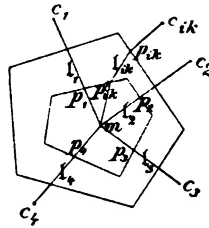


Fig. 19.

Um den Beweis des allgemeinen Satzes möglichst einfach zu führen, benutzen wir zwei Folgen $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ und $\{\mathfrak{Q}_\nu\}$, die für dieselbe Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ gegen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ konvergieren, und denken uns auf jedem Polygon $\mathfrak{P}_\nu$ gemäß Kap. V § 13 die dort eingeführten Teilpunkte $\{p_N\}$ bestimmt. Sie legen wir dem Abbildungsverfahren zugrunde und zwar folgendermaßen. (Fig. 19)

Seien jetzt s_1, s_2, s_3, s_4 die sukzessiven Ecken des Quadrats $\mathfrak{S}$ und c_1, c_2, c_3, c_4 ihre vier Bildpunkte auf $\mathfrak{C}$; ferner seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4$ die zu ihnen laufenden Wege. Dann sind

$$C_1 = \{c_i\} \quad \text{und} \quad S_1 = \{s_i\}$$

Mengen entsprechender Punkte auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$.

Seien nun $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ die im Abstand ε_1 approximierenden Polygone, so können wir zunächst die Flächen $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}_1) = \mathfrak{V}_1$ dem vorstehenden gemäß aufeinander abbilden. Dies möge wie folgt geschehen.

Die vier Wege $\mathfrak{l}_i$ zerlegen die Fläche $\mathfrak{U}_1$ in gewisse polygonale Teilgebiete J_k, und ebenso wird $\mathfrak{V}_1$ durch die Geraden $s_0\, s_i$ in vier Teilgebiete L_k zerlegt. Diese können wir in der eben angegebenen Art einander entsprechen lassen. Bezeichnen wir wieder den Schnittpunkt von $\mathfrak{l}_i$ mit $\mathfrak{P}_1$ durch p_i und den Schnittpunkt von $s_0 s_i$ mit $\mathfrak{Q}_1$ durch q_i, so sind p_i und q_i entsprechende Punkte von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$.

Sei jetzt $\mathfrak{P}_2$ das nächste approximierende Polygon, und seien $\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{V}_2$ die Ringflächen, die durch $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ gebildet werden. Diese sind so aufeinander abzubilden, daß die Abbildung längs $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ mit derjenigen von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ übereinstimmt. Seien dazu $\{p_{ik}\}$ die auf $\mathfrak{P}_2$ liegenden obengenannten Teilpunkte. Sie ergaben sich so, daß wir von den Schnittpunkten von $\mathfrak{P}_2$ mit den Wegen $\mathfrak{l}_i$ ausgingen und jeden durch sie gebildeten Streckenzug des Polygons $\mathfrak{P}_2$ in weitere Teile zerlegten. Diese Punkte bestimmen (S. 105) gewisse ihnen zunächst liegende Punkte $\{c_{ik}\}$ von $\mathfrak{C}$, und denen entsprechen wieder gewisse Punkte s_{ik} von $\mathfrak{S}$; wir erhalten so auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ bereits die weiteren Punktmengen

$$C_2 = \{c_{ik}\} \quad \text{und} \quad S_2 = \{s_{ik}\},$$

so daß C_1 Teilmenge von C_2 und S_1 Teilmenge von S_2 ist.

Wir wollen nun die Abbildung von $\mathfrak{P}_2$ auf $\mathfrak{Q}_2$ folgendermaßen vornehmen. Der zu jedem Punkt p_{ik} führende Weg $\mathfrak{l}_{ik}$ möge $\mathfrak{P}_1$ in einem Punkt p'_{ik} schneiden; dem entspricht auf $\mathfrak{Q}_1$ gemäß der *vorhandenen* Abbildung ein Punkt q'_{ik}, und wir ziehen nun die Gerade $q'_{ik}\, s_{ik}$, so schneidet sie $\mathfrak{Q}_2$ in einem Punkt q_{ik}. Ihn wählen wir für die Abbildung von $\mathfrak{P}_2$ auf $\mathfrak{Q}_2$ als Bildpunkt von p_{ik}. Sei $g_{ik} = q'_{ik}\, q_{ik}$. Ist ferner $l_{ik} = p'_{ik} \ldots p_{ik}$ das Stück des Weges $\mathfrak{l}_{ik}$, das in dem Ringgebiet $\mathfrak{U}_2$ enthalten ist, so zerlegen diese Wegstücke l_{ik} das Ringgebiet $\mathfrak{U}_2$ in polygonale Gebiete J_{ik}, und ebenso zerlegen die Geraden g_{ik} das Ringgebiet $\mathfrak{V}_2$ in Teilgebiete L_{ik}, und wir richten nun die Abbildung von $\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{V}_2$ so ein, daß J_{ik} und L_{ik} einander entsprechen; dabei wird von selbst die Abbildung längs $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ mit derjenigen für $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ übereinstimmen. Alle Gebiete L_{ik} sind konvexe Vierecke.

Dies läßt sich analog auf zwei Ringgebiete $\mathfrak{U}_\nu$ und $\mathfrak{V}_\nu$ und ihre Grenzpolygone $\mathfrak{P}_{\nu-1}, \mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{Q}_{\nu-1}, \mathfrak{Q}_\nu$ übertragen. Die Teilpunkte p_N auf $\mathfrak{P}_\nu$ bestimmen zunächst wieder die Mengen

$$C_\nu = \{c_N\} \quad \text{und} \quad S_\nu = \{s_N\}\,.$$

Ein Weg $\mathfrak{l}_N$, der über p_N zu einem Punkte c_N führt, schneidet wieder $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ in einem Punkte p'_N; ihm entspricht auf $\mathfrak{Q}_{\nu-1}$ auf Grund der vorhandenen Abbildung ein Punkt q'_N, und wie vorher bestimmt man wieder die Punkte q_N auf $\mathfrak{Q}_\nu$ als Schnittpunkte mit den Geraden $q'_N s_N$. Man erhält daher für die Ringgebiete $\mathfrak{U}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ wieder eine Zerfällung in entsprechende Gebiete J_N und L_N, so daß alle L_N konvex sind, und kann die Abbildung so vornehmen, daß sie längs $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{Q}_{\nu-1}$ mit der bereits vorhandenen übereinstimmt.

Es ist jetzt nur noch nachzuweisen, daß die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Abbildung auch beim Übergang zu $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ erhalten bleibt.

Da die Polygone $\mathfrak{P}_\nu$ gleichmäßig gegen $\mathfrak{C}$ konvergieren, so weiß man, daß für *jede* Indizesgruppe N mit wachsendem ν nicht nur $\mathfrak{B}(P_N)$, sondern auch $\mathfrak{B}(J_N)$ gegen Null konvergiert. Auf Grund des Abbildungsverfahrens folgt ferner das Gleiche auch für $\mathfrak{B}(L_N)$. Daraus kann aber der Beweis leicht entnommen werden. Ist nämlich jetzt s irgend ein Punkt von $\mathfrak{S}$, so ist er Grenzpunkt einer Folge innerer Punkte von $\mathfrak{S}$, und es ist klar, daß es gestattet ist, diese Punktfolge so zu wählen, daß jedem Gebiet L_N nur einer ihrer Punkte angehört. Wir wählen sie überdies, was erlaubt ist, so, daß auch *jedes* L_N wirklich einen Punkt der Folge enthält. Die Bildpunkte sind daher Punkte der analogen Gebiete J_N. Da nun mit $\mathfrak{B}(L_N)$ auch $\mathfrak{B}(J_N)$ gegen Null konvergiert, so schließt man bereits, daß dem Punkt s nur *ein* Punkt von $\mathfrak{C}$ entsprechen kann, und ebenso läßt sich das Umgekehrte beweisen. Daß schließlich diese Punkte auch diejenigen sind, die bei der vorgegebenen Abbildung von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ einander entsprechen, beruht, wie man nunmehr leicht erkennt, darauf daß die Abbildung für je zwei Gebiete J_N und L_N dieselbe Anordnung befolgt, wie für die Punktmengen C_ν und S_ν, was einer näheren Ausführung nicht bedarf.

§ 4. *Die stetige Kurve als Gebietsgrenze.* Sind

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t); \quad 0 \leq t \leq 1^{1)} \tag{1}$$

zwei im Intervalle $0 \ldots 1$ eindeutige und stetige Funktionen, so soll die durch sie dargestellte *Punktmenge* eine *stetige Kurve* heißen; sie ist also als eindeutiges und stetiges Abbild der Strecke definiert. Als unmittelbare Folge des vorigen Kapitels ergibt sich zunächst der folgende Satz:

1) Ich bezeichne im Folgenden die Punkte der Einheitsstrecke durch t, die Kurvenpunkte durch c. Die Kurve selbst und ihre Teilmengen bezeichne ich durch $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{T}$. Diese Inkonsequenz, die ich erst beim Druck bemerkte, ließ sich leider nicht mehr beseitigen.

IV. *Jede stetige Kurve ist eine geschränkte, perfekte, zusammenhängende Menge.*

Die gestaltlichen Eigenschaften dieser Punktmenge $\mathfrak{C}$ wollen wir im folgenden näher erörtern. Wir beschäftigen uns also zunächst *ausschließlich* mit der Punktmenge als solcher und ihren geometrischen Eigenschaften, und zwar auf Grund der früher festgelegten Definitionen. Dagegen spielt die Art, in der die Punkte auf die Einheitsstrecke abgebildet sind, zunächst keine Rolle. Ich komme hierauf in § 12 wieder zurück.

Ich beginne mit dem einfachen Fall, daß die stetige Kurve aus den Grenzpunkten eines und desselben Gebietes $\mathfrak{G}$ besteht. Alsdann können wir ihre Eigenschaften aus den Entwicklungen des vorigen Kapitels ziemlich unmittelbar entnehmen. Da wir dort in § 15 nachgewiesen haben, daß die Erreichbarkeit auch für die weitere Gruppe Γ eine Invariante ist, so folgt zunächst, daß jeder Punkt der Gebietsgrenze *allseitig erreichbar* für das Gebiet $\mathfrak{G}$ sein muß.

Umgekehrt ist diese Bedingung aber auch hinreichend. Dies beruht darauf, daß die Erreichbarkeit den Satz (3) von § 2 zur Folge hat, und daß dieser Satz die Grundlage der Stetigkeit ist. Den Beweis knüpfen wir wieder an die Zerlegung in Teilgebiete, die wir mit Hilfe der approximierenden Polygone $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ in Kap. V § 13 vorgenommen haben. Diese Zerlegung wurde zwar dort nur für den Fall ausgeführt, daß die Grenze des Gebiets eine einfache geschlossene Kurve ist; sie ist aber, wie man unmittelbar erkennt, davon unabhängig und kann für jedes einfach zusammenhängende Gebiet und seine Grenze durchgeführt werden.

Gemäß der Bezeichnung, die in Kap. V am Ende von § 13 angegeben wurde, seien $C_k^{(\nu)}$ die sich auf $\mathfrak{C}$ ergebenden Teilmengen, die zu den Grenzen der Gebiete $J_k^{(\nu)}$ gehören. Aus der Voraussetzung der allseitigen Erreichbarkeit folgt dann zunächst gemäß § 2, daß die Polygone $\mathfrak{P}_\nu$ *gleichmäßig* gegen $\mathfrak{C}$ konvergieren; es besteht daher für hinreichend großes ν und vorgegebenes σ für jeden Punkt $c_k^{(\nu)}$ einer jeden Menge $C_k^{(\nu)}$ die Relation

$$(2) \qquad \varrho\,(c_k^{(\nu)}, C_k^{(\nu)}) \leq d_k^{(\nu)} \leq D^{(\nu)} < \sigma\,.$$

Sei nun $\mathfrak{P}$ irgendeines der approximierenden Polygone, und seien wieder $\{p_i\}$ die auf $\mathfrak{P}$ liegenden Teilpunkte, so kann man $\mathfrak{P}$ in folgender Weise stetig auf die Einheitsstrecke abbilden. Man teile sie durch die Punkte $\{t_i\}$ in der Einfachheit halber gleiche Teile σ_x und ordne jedem Intervall σ_x, dessen Endpunkte t_i und t_{i+1} sind, stetig den Streckenzug P_k von $\mathfrak{P}$ zu, dessen Endpunkte p_i und p_{i+1} sind. Dann hat man auf diese Weise zwei stetige Funktionen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

definiert, die das Polygon eindeutig und stetig auf die Strecke abbilden. Wir schreiben ferner vor, die herzustellende Abbildung der Kurve $\mathfrak{C}$ auf die Strecke so zu bewirken, daß den Punkten t_i die Punkte c_i und den Intervallen $\sigma_\varkappa$ die Teilmengen C_k zugewiesen werden, was eine erlaubte Festsetzung ist.

Ein solches Funktionenpaar

$$x = f_\nu(t), \quad y = \varphi_\nu(t)$$

gehört zu jedem Polygon $\mathfrak{P}_\nu$. Da nun wegen der gleichmäßigen Konvergenz die in (2) enthaltene Größe $D^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert, so folgert man leicht, daß diese Funktionenpaare gleichmäßig gegen zwei stetige Grenzfunktionen konvergieren.

Sei nämlich wieder $J_k^{(\nu)}$ ein durch $\mathfrak{P}_\nu$ gemäß Kap. V § 13 bestimmtes Teilgebiet, und $J_l^{(\varrho)}$ ein solches, das für $\varrho > \nu$ durch $\mathfrak{P}_\varrho$ bestimmt ist und zugleich Teilgebiet von $J_k^{(\nu)}$ ist. Ist dann c ein Punkt, der sowohl zu $C_k^{(\nu)}$ wie zu $C_l^{(\varrho)}$ gehört, so hat man

$$\varrho(c, P_k^{(\nu)}) \leq D^{(\nu)}, \quad \varrho(c, P_l^{(\varrho)}) \leq D^{(\varrho)}.$$

Sind daher $p^{(\nu)}$ und $p^{(\varrho)}$ *irgend* zwei Punkte von $P_k^{(\nu)}$ und $P_l^{(\varrho)}$, so ist offenbar

$$\varrho(p^{(\nu)}, p^{(\varrho)}) < D^{(\nu)} + D^{(\varrho)} + \mathfrak{B}(P_k^{(\nu)}) + \mathfrak{B}(P_l^{(\varrho)}).$$

Eine solche Relation gilt daher auch für zwei *solche* Punkte von $P_k^{(\nu)}$ und $P_l^{(\varrho)}$, die *demselben* Wert von t entsprechen. Damit ist aber die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $f_\nu(t)$ und $\varphi_\nu(t)$ dargetan. Nach einem bekannten Satze bestimmen sie daher zwei stetige Grenzfunktionen

$$(3) \qquad x = f_\omega(t), \quad y = \varphi_\omega(t),$$

und es ist nur noch zu zeigen, daß diese Funktionen die Kurve $\mathfrak{C}$ darstellen.

Dies ergibt sich fast unmittelbar auf Grund des Satzes II von § 3. Sei nämlich T_r die Teilmenge, die auf der Einheitsstrecke von den Endpunkten der durch fortgesetzte Teilung entstehenden Intervalle $\{\sigma_\varkappa^{(\nu)}\}$ gebildet wird, und seien

$$(5) \qquad C_r \text{ und } \{C_k^{(\nu)}\}$$

die entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{C}$, so konvergiert gemäß § 2 $\mathfrak{B}(C_k^{(\nu)})$ für alle diese Teilmengen gleichmäßig gegen Null, und daraus folgt erstens, daß die von ihren Endpunkten bestimmte Menge C_r überalldicht auf $\mathfrak{C}$ ist, und zweitens, daß sie gleichmäßig stetiges Abbild der Menge T_r ist. Damit kann dem genannten Satz gemäß eine eindeutige und stetige Beziehung auch zwischen der Strecke und der Kurve hergestellt werden. Da aber bei dieser Beziehung den Punkten

der Menge T_r *dieselben* Punkte von $\mathfrak{C}$ entsprechen wie bei dem Funktionenpaar (3), so stellen diese Funktionen wirklich die Kurve $\mathfrak{C}$ dar.

Der vorstehende Beweis gilt offenbar auch für eine solche Bildmenge der Strecke, deren Komplementärmenge ein einziges Gebiet ist. Also folgt:

V. *Eine zusammenhängende Punktmenge, die Grenze eines und desselben Gebietes ist, ist immer und nur dann stetiges Bild der Strecke, falls jeder ihrer Punkte für dieses Gebiet allseitig erreichbar ist.*[1])

Zu diesen Punktmengen gehört z. B. das überalldicht mit inneren oder mit äußeren Stacheln besetzte Quadrat (S. 115). Nach Kap. V § 10 sind nämlich alle seine Punkte allseitig erreichbar, was übrigens auf denselben Tatsachen beruht, wie die Stetigkeit der analogen Riemannschen Funktion in den irrationalen Punkten.

Um ein abbildendes Funktionenpaar für das Quadrat auf einfachste Weise herzustellen, kann man es so stellen, daß die Diagonalen den Koordinatenaxen parallel laufen. Dann konstruiere man auf der Einheitsstrecke eine nirgendsdichte perfekte Menge T in folgender Weise. Um die Mitte lege man ein Intervall der Länge σ_1 so, daß Mitte auf Mitte fällt, um die Mitte der beiden freien Teilintervalle je ein Intervall der Länge δ_2 in derselben Weise, um die Mitte der vier freien Teilintervalle wieder je ein Intervall der Länge δ_3 und fahre so fort, sodaß

$$\sigma = \delta_1 + 2\delta_2 + 4\delta_3 + \cdots + 2^\nu\delta_{\nu+1} \cdots \leqq 1$$

ist, und lasse den Intervallen die Stacheln entsprechen. Es werden dann denjenigen Grenzpunkten der Intervalle, die nicht zugleich Intervallendpunkte sind, die sämtlichen irrationalen Punkte des Quadratumfangs entsprechen. Die Stacheln selbst wird man am einfachsten so auf die Intervalle abbilden, daß der Mitte eines Intervalls der im Innern des Quadrats liegende Stachelendpunkt entspricht, und die abbildenden Funktionen linear sind. Übrigens kann man auch das mit den Dreiecken besetzte Quadrat (S. 115) in dieser Weise darstellen.

Aus dem Vorherstehenden ziehen wir noch eine wichtige Folgerung für den Fall, daß die Punktmenge eine geschlossene Kurve ist. Dann gilt:

VI. *Sind alle Punkte einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ für eines der beiden Gebiete $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$ allseitig erreichbar, so sind sie es auch für das andere.*

Wenn nämlich alle Punkte von $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{J}$ aus allseitig erreichbar sind, so läßt sich $\mathfrak{C}$ durch stetige Funktionen $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ darstellen, und nunmehr folgt die Erreichbarkeit ihrer Punkte auch für $\mathfrak{A}$.

1) Es ist klar, daß man den Punkten 0 und 1 zwei beliebige Punkte c_0 und c_1 zuweisen kann.

Man könnte daher die Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes etwas modifizieren. Denn man brauchte auch für ihn die allseitige Erreichbarkeit nur für $\mathfrak{J}$ oder nur für $\mathfrak{A}$ vorauszusetzen. Doch scheint es in diesem Falle zweckmäßiger zu sein, mit der einfachen Erreichbarkeit für $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ zu operieren.

§ 5. *Die stetige Kurve als Fläche.* Der Kurventypus, der hier zu erörtern ist, ergibt sich durch Verallgemeinerung der Peanoschen Abbildung des Quadrats auf die Strecke. Man kann die Frage stellen, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind, unter denen ein von einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ begrenztes Flächenstück $\mathfrak{T} = \mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ eine solche Abbildung gestattet. Die Antwort lautet, daß die einzige Bedingung wieder in der allseitigen Erreichbarkeit der Punkte von $\mathfrak{C}$ besteht, d. h. es besteht der Satz:

VII. *Ein von einer geschlossenen Kurve begrenztes, einfach zusammenhängendes Flächenstück ist immer und nur dann stetiges Bild einer Strecke, wenn seine Grenze eine einfache Kurve ist.*

Gemäß § 4 genügt es die Erreichbarkeit für das äußere Gebiet $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ nachzuweisen. Doch können wir die bisherigen Beweismethoden hier nicht unmittelbar anwenden. Im vorigen Kapitel (§ 15) entnahmen wir den Beweis der Erreichbarkeit dem Umstand, daß *jede* zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{C}$, die zwei Punkte c' und c'' enthält, auch einen der beiden durch c' und c'' bestimmten Kurvenbogen enthalten muß. Hier ist jedoch die gesamte Fläche $\mathfrak{T}$ Abbild der Strecke, und die im Beweis benutzte Teilmenge T', die c' und c'' enthält, braucht nur Teilmenge von $\mathfrak{T}$ selbst zu sein. Eine solche kann aber in diesem Fall das Gebiet $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ durchsetzen und kann daher mit $\varrho(c', c'')$ beliebig klein werden. Dies macht die Anwendung des dort benutzten Beweisverfahrens unmöglich, denn man kann auf die dort benutzte Art Schlüsse auf die *Grenzkurve* der Fläche $\mathfrak{T}$ jetzt nicht mehr machen. Wir müssen daher den Beweis etwas anders führen.

Wir nehmen dazu an, ein Punkt c der Kurve $\mathfrak{C}$ sei für ein Teilgebiet A von $\mathfrak{A}$ *nicht erreichbar*, dann können wir eine einfache Folge $\{c_\nu\}$ mit c als Grenzpunkt konstruieren, deren Wegdistanzen η_ν nicht gegen Null konvergieren (Fig. 20). Wir nehmen sie von vornherein als *reduzierte* Folge an (Kap. V, § 9), so daß die Wegdistanzen η_ν einen eigentlichen Grenzwert H besitzen. Da die erreichbaren Punkte auf $\mathfrak{C}$ überalldicht liegen, so können wir auf jedem durch c_ν und $c_{\nu+1}$ bestimmten Kurvenbogen C_ν einen *erreichbaren* Punkt γ_ν bestimmen, so daß bei gegebenem δ und für $\nu > N$

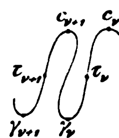


Fig. 20.

$$\eta'_\nu = \overline{c_\nu \gamma_\nu} > \eta_\nu - \delta$$

ist, und es bilden auch diese Punkte $\{\gamma_\nu\}$ eine einfache Folge. Ebenso können wir auf dem Kurvenbogen C'_ν, der durch c_ν und γ_ν definiert ist, einen *erreichbaren* Punkt τ_ν so wählen, daß bei gegebenem σ

$$\tfrac{1}{2}\eta'_\nu - \sigma < \overline{c_\nu \tau_\nu} < \tfrac{1}{2}\eta'_\nu + \sigma, \text{ also } \overline{\tau_\nu \gamma_\nu} > \tfrac{1}{2}\eta'_\nu - \sigma$$

ist. Dann ist auch der Grenzpunkt τ_ω der Folge $\{\tau_\nu\}$ unerreichbar; man hat nämlich

$$\overline{\tau_\nu \gamma_\nu} > \overline{c_\nu \gamma_\nu} - \overline{c_\nu \tau_\nu}, \quad \overline{\tau_{\nu+1} \gamma_\nu} > \overline{c_{\nu+1} \gamma_\nu} - \overline{c_{\nu+1} \tau_{\nu+1}},$$

woraus die Behauptung leicht gefolgert werden kann.

Die so definierte Folge $\{\tau_\nu\}$ wird uns nun für den Beweis dieselben Dienste leisten, wie die Folge $\{t_\nu\}$ in Kap. V, § 15 für den analogen Beweis im Fall einer geschlossenen Kurve. Wir wollen zunächst nachweisen, daß auf Grund unserer Annahme (daß nämlich c_ν für das Teilgebiet A von $\mathfrak{A}$ *nicht* erreichbar ist) *jede* die Punkte τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ enthaltende zusammenhängende Teilmenge T'_ν von $\mathfrak{T}$ eine Breite besitzen würde, die mit wachsendem ν nicht gegen Null konvergierte. Sei dazu $\mathfrak{P}$ ein Polygon, das von $\mathfrak{A}$ aus die Kurve $\mathfrak{C}$ so approximiert, daß auch τ_ν, $\tau_{\nu+1}$ und $c_{\nu+1}$ von ihm approximiert werden, und seien $\mathfrak{l}_{\nu+1}$, λ_ν und $\lambda_{\nu+1}$ die in $\mathfrak{A}$ von einem Punkt a zu $c_{\nu+1}$, τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ führenden Wege. Sei ferner A_ν das von λ_ν und $\lambda_{\nu+1}$ eingeschlossene Teilgebiet von $\mathfrak{A}$, P_ν der es durchziehende Streckenzug von $\mathfrak{P}$, $p_{\nu+1}$ sein Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{l}_{\nu+1}$, und endlich $\mathfrak{P}'_\nu$ das durch λ_ν, $\lambda_{\nu+1}$ und P_ν bestimmte Polygon. Welches nun auch die zusammenhängende und die Punkte τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ enthaltende Teilmenge T'_ν von $\mathfrak{T}$ sein mag, so kann man für hinreichend großes μ ein die Menge T'_ν approximierendes Polygon $\mathfrak{P}_\mu$ so bestimmen, daß es außerhalb von $\mathfrak{P}'_\nu$ liegt und mithin den Punkt $p_{\nu+1}$ ausschließt. Andrerseits muß jedes solche Polygon die Punkte τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ einschließen. Seine Breite bleibt daher auch für jedes derartige μ oberhalb einer endlichen Größe H', und zwar kann erreicht werden, daß H' beliebig wenig kleiner als $\frac{1}{2}H$ ist.[1])

Alles weitere ergibt sich ähnlich wie in Kap. V § 15; der dort geführte Beweis beruht nämlich darauf, daß die den Intervallen $t_\nu t_{\nu+1}$ entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{C}$ mit wachsendem ν unendlich klein werden. Wenn es jedoch einen unerreichbaren Punkt t gäbe, würde, wie eben bewiesen, *jede* zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$, die zwei konsekutive Punkte der zugehörigen Folge $\{t_\nu\}$ enthält, eine Breite besitzen, die mit wachsendem ν nicht gegen Null konvergierte.

---

1) Ich hielt es für nötig, den Beweis eingehender durchzuführen. Vgl. meine Arbeit Gött. Nachr. 1907, S. 44, wo auch die Größenrelationen ausführlich angegeben sind.

Daß die Erreichbarkeitsbedingung auch *hinreichend* ist, folgern wir ınmehr aus dem Satz III von § 3.

Auf Grund dieses Hilfssatzes können wir nämlich die Kurve $\mathfrak{C}$ ıuf ein Quadrat $\mathfrak{S}$ und zugleich die Menge $\mathfrak{T}$ auf die Quadratfläche $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ umkehrbar eindeutig und stetig beziehen. Seien

$$\xi = F(x, y), \quad \eta = \Phi(x, y)$$

die bezüglichen Funktionen, wo ξ, η ein Punkt von $\mathfrak{T}$ und x, y ein Punkt von $\mathfrak{F}$ ist. Andrerseits können wir nach Peano die Punkte der Quadratfläche $\mathfrak{F}$ eindeutig und stetig auf die Strecke abbilden durch die Funktionen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t).$$

Daraus folgt unmittelbar

(25) $$\xi = f_1(t), \quad \eta = \varphi_1(t),$$

und es sind $f_1(t)$ und $\varphi_1(t)$ stetige Funktionen von t, die für $0 \leqq t \leqq 1$ jeden Punkt ξ, η mindestens einmal darstellen.

Der Kürze halber soll die Menge $\mathfrak{T}$ eine *Peanosche Fläche* heißen.

Da man bei der Abbildung von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{S}$ zwei Gegenecken von $\mathfrak{S}$ zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{C}$ zuweisen kann, so ist die Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf die Strecke auch so möglich, daß den Punkten 0 und 1 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{C}$ entsprechen.

§ 6. *Stetige Kurven, deren Komplementärmenge eine endliche Zahl von Gebieten bestimmt.*[1]) Falls die stetige Kurve $\mathfrak{C}$ in der Ebene eine endliche Zahl von Gebieten bestimmt, so treten zu den in den Sätzen V und VII genannten Bedingungen keine weiteren mehr hinzu. Es besteht also der Satz:

VIII. *Ein Kontinuum, das in der Ebene eine endliche Zahl von Gebieten bestimmt, ist dann und nur dann stetiges Bild der Strecke, falls jeder seiner Punkte für jedes Gebiet, zu dessen Grenze er gehört, allseitig erreichbar ist.*

Sei nämlich $\mathfrak{J}'$ zunächst ein solches Gebiet, das *nicht* zu $\mathfrak{C}$ gehört, und $\mathfrak{T}'$ seine Grenze. (Das Gebiet $\mathfrak{A}$ ist stets mitzuzählen.) Dann kann die Erreichbarkeit der Punkte von $\mathfrak{T}'$ wiederum nach der Methode

1) Damit ist gemeint, daß der stetigen Kurve auch nur eine *endliche* Zahl Peanoscher Flächenstücke angehört. Die Flächen der sämtlichen in Fig. 21 enthaltenen Kreise (S. 220) entsprechen also nicht den Annahmen dieses Paragraphen; ·den in § 11 erledigt.

des vorigen Paragraphen bewiesen werden. Der Unterschied ist nur der, daß die Gebietsgrenze $\mathfrak{T}'$ keine geschlossene Kurve zu sein braucht, sondern eine allgemeinere Gestalt haben kann. Doch ist dies für den Beweis ohne Belang.

Falls es nämlich einen für $\mathfrak{J}'$ unerreichbaren Punkt c' von $\mathfrak{T}'$ gäbe, könnte man auch hier einen ebenfalls unerreichbaren Punkt τ'_ω einer Folge $\{\tau'_\nu\}$ in der Weise konstruieren, daß *jede* zusammenhängende Teilmenge T'_ν der Gesamtmenge $\mathfrak{C}$, die zwei Punkte τ'_ν und $\tau'_{\nu+1}$ enthält, eine Breite hätte, die für jedes ν oberhalb einer von Null verschiedenen Größe bliebe.

Ist zweitens $\mathfrak{T}'$ eine Peanosche Fläche, so bedarf der in § 5 enthaltene Beweis einer gewissen Modifikation. Die Grenze von $\mathfrak{T}'$ braucht jetzt nicht mehr Grenze eines *einzigen* der Gebiete zu sein, die durch $\mathfrak{C}$ bestimmt werden. Aber da es für die Breite aller Gebiete eine von Null verschiedene untere Grenze e gibt, so kann man, falls $e < H$ ist, die oben benutzte Folge $\{\tau_\nu\}$ immer noch so wählen, daß die Breite eines *jeden* zwei konsekutive Punkte τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ verbindenden Kontinuums T'_ν jedenfalls größer als $\frac{1}{2}e$ bleibt. Damit ist der erste Teil des Satzes wiederum bewiesen.

Für den Beweis des zweiten Teiles wollen wir uns zunächst jede Peanosche Fläche, die zur Kurve $\mathfrak{C}$ gehört, falls sie nicht von selbst einfach zusammenhängend ist, durch einfache Wege in einfach zusammenhängende Bestandteile zerlegt denken. Man erhält dann eine immer noch endliche Zahl von Flächenstücken und Gebieten, deren Grenzpunkte ebenfalls noch allseitig erreichbar sind. Sei M ihre Gesamtzahl.

Ich stütze mich nun weiter auf den Satz, daß es möglich ist, diese Gebiete in einem Zuge zu durchlaufen, wobei ein Gebiet auch mehrfach berührt werden darf.[1]) Sei

(1) $$\mathfrak{J}', \mathfrak{J}'', \cdots \mathfrak{J}^{(\lambda)} \cdots \mathfrak{J}^{(\varrho)}$$

die so bestimmte Reihenfolge, und seien

(2) $$\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \cdots \mathfrak{T}^{(\lambda)} \cdots \mathfrak{T}^{(\varrho)}$$

die bezüglichen ihnen entsprechenden Mengen, so daß $\mathfrak{T}^{(\lambda)}$ die Grenze von $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ ist, oder aber, falls $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ eine Peanosche Fläche ist, mit $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ und seiner Grenze identisch, so haben je zwei konsekutive Mengen (2) mindestens je einen Punkt gemein. Man wähle nun den Punkt $c^{(\lambda)}$ auf $\mathfrak{T}^{(\lambda)}$ so, daß er gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{T}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{T}^{(\lambda+1)}$ ist. Zerlegt

1) Einen Beweis dieses evidenten Satzes gab ich in den Gött. Nachr. 1907 S. 46.

man dann die Einheitsstrecke in ϱ Teilintervalle $\{\sigma_\lambda\}$ und bildet $\mathfrak{T}^{(\lambda+1)}$ eindeutig und stetig so auf das Intervall $\sigma_{\lambda+1}$ ab, daß $c^{(\lambda)}$ und $c^{(\lambda+1)}$ den Endpunkten von $\sigma_{\lambda+1}$ entsprechen, so ist damit auch die ganze Menge $\mathfrak{C}$ eindeutig und stetig auf die Einheitsstrecke abgebildet.

§ 7. *Notwendige gestaltliche Eigenschaften der allgemeinsten stetigen Kurve.* Als allgemeinste stetige Kurve $\mathfrak{C}$ bezeichne ich diejenige, deren Komplementärmenge $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ in unendlich viele Gebiete zerfällt; sei $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ die Gesamtheit dieser Gebiete. Sie bestimmen ein Grenzgebilde (Kap. IV § 5), das wir jetzt durch $\mathfrak{U} = \{u\}$ bezeichnen wollen. Die Punkte von $\mathfrak{U}$ zerfallen wieder in zwei Klassen, je nachdem sie der Grenze eines der Gebiete $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ angehören, oder nicht. Diejenigen, die *nicht* zur Grenze eines Gebietes $\mathfrak{J}_\nu$ gehören, bezeichne ich durch $\mathfrak{V} = \{v\}$. Die Menge $\mathfrak{U}$ ist abgeschlossen, dagegen braucht $\mathfrak{V}$ nicht abgeschlossen zu sein.

Über die Struktur der Menge $\mathfrak{U}$ läßt sich nur aussagen, daß sie keinen flächenhaften Bestandteil enthält. Im übrigen gilt für sie der allgemeine Satz, den wir in Kap. IV § 11 über Mengen dieser Art abgeleitet haben. Ich lasse zunächst einige Beispiele folgen.[1]

1) Man nehme drei Punkte a, b, c einer Geraden so an, daß b und c Häufungspunkte von Punktmengen sind, die auf ab und bc liegen, und lege um alle Punkte dieser Menge außer um b und c Kreise, die einander (Fig. 21) konsekutiv berühren, so stellen b und c die Menge $\mathfrak{U}$ dar, während eine Menge $\mathfrak{V}$ nicht vorhanden ist.[2]

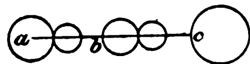


Fig. 21.

2) Auf einer Strecke ab nehme man eine sich gegen b verdichtende Punktmenge $\{p_\nu\}$ an, errichte über jedem Teilintervall $p_\nu p_{\nu+1}$ ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe gegen Null konvergiert, und beschreibe in jedes Dreieck Kreise, die einander berühren und sich gegen die Spitze verdichten. Dann bilden alle Spitzen dieser Dreiecke nebst dem Punkt b die Menge $\mathfrak{U}$, während sich die Menge $\mathfrak{V}$ wieder auf Null reduziert.

3) Denkt man sich eine Reihe konzentrischer Kreise, deren Radien die Längen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \cdots$ haben, und zieht in ihnen zwei zu einander senkrechte Durchmesser, so stellt der Mittelpunkt aller Kreise die Menge $\mathfrak{V}$ und zugleich die Menge $\mathfrak{U}$ dar.

4) Ein einfachstes Beispiel, das eine kurvenhafte Menge $\mathfrak{U}$ enthält, liefert das in Kap. IV erwähnte, überalldicht mit schmalen Dreiecken

1) Die Beispiele sind mit Rücksicht auf das Folgende gewählt.

2) Die Punkte b und c gehören auch zur Grenze von $\mathfrak{A}$.

besetzte Quadrat (S. 115). Hier stellt der Umfang des Quadrats die Menge $\mathfrak{U}$ dar, während eine Menge $\mathfrak{B}$ nicht vorhanden ist.

5) Zieht man durch ein Quadrat Parallelen zu den Seiten, die sich von links und rechts gegen eine Mittellinie l verdichten, so stellt l sowohl die Menge $\mathfrak{U}$ wie die Menge $\mathfrak{B}$ dar. Dies bleibt bestehen, wenn man jedes entstehende Rechteck so in kongruente Teilrechtecke zerlegt, daß ihre Zahl bei Annäherung an die Linie l unbegrenzt zunimmt (Fig. 22).

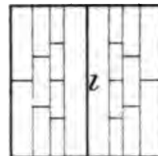


Fig. 22.

6) Zieht man in einem Kreis k einen Durchmesser d, schreibt ihm zwei Kreise k_1 und k_2 ein, die sich im Zentrum m von k berühren, verfährt mit k_1 und k_2 ebenso und setzt dies unbegrenzt fort, so stellt der Durchmesser d die Menge $\mathfrak{U}$ dar, während $\mathfrak{B}$ nur überalldicht auf d liegt (Fig. 12 auf S. 125).

Ich gehe nun zur Erörterung der für die Abbildung notwendigen Eigenschaften der Menge $\mathfrak{C}$ über. Man sieht zunächst leicht, daß für die Grenze jedes einzelnen Gebietes $\mathfrak{J}_\nu$ der Komplementärmenge die Erreichbarkeitsbedingung bestehen bleibt. Dies ist eine unmittelbare Folge davon, daß sowohl für den Begriff der Erreichbarkeit wie auch für den Beweis des Erreichbarkeitssatzes nur die Grenze des Gebiets selbst in Frage kommt, unabhängig davon, ob der Punktmenge noch andere Punkte der Ebene angehören oder nicht. Hierzu tritt aber noch eine neue Bedingung. Gebiete, deren Breite eine Größe $\eta > 0$ übersteigt, dürfen nur in *endlicher* Zahl vorhanden sein. Es besteht nämlich der Satz:

IX. *Enthält die Komplementärmenge der stetigen Kurve $\mathfrak{C}$ unendlich viele Gebiete $\{\mathfrak{J}_\nu\}$, so muß jedes einzelne Gebiet $\mathfrak{J}_\nu$ der Erreichbarkeitsbedingung genügen, und es kann nur eine endliche Zahl von Gebieten geben, deren Breite eine beliebig gegebene Größe $\eta > 0$ übertrifft.*

Den zweiten Teil des Satzes kann man folgendermaßen beweisen. Angenommen es gebe unendlich viele Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$, so daß, wenn $\mathfrak{T}_\nu$ die Grenze von $\mathfrak{J}_\nu$ ist,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{J}_\nu) = \mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu) = e_\nu > \eta$$

ist, so seien c'_ν und c''_ν zwei Punkte von $\mathfrak{T}_\nu$, so daß

$$\varrho(c'_\nu, c''_\nu) = \mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu) = e_\nu$$

ist. Dann gehören diese beiden Punkte notwendig der geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ an, die die *äußere* Randkurve von $\mathfrak{J}_\nu$ bildet. Sie zerlegen diese Kurve in zwei Kurvenbogen, und auf jedem von ihnen gibt es einen Punkt, der von c'_ν und c''_ν gleichen Abstand hat. Diese Punkte seien

τ'_ν und τ''_ν. Auch sie zerlegen $\mathfrak{C}_\nu$ in zwei Kurvenbogen C'_ν und C''_ν, und es ist offenbar

$$\mathfrak{B}(C'_\nu) \geq \tfrac{1}{2} e_\nu \text{ und } \mathfrak{B}(C''_\nu) \geq \tfrac{1}{2} e_\nu.$$

Daraus folgt weiter, daß wenn T'_ν *irgendeine* zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ ist, der τ'_ν und τ''_ν angehören, auch

$$\mathfrak{B}(T'_\nu) \geq \tfrac{1}{2} e_\nu$$

ist. Dies wird ebenso bewiesen, wie der analoge Satz in § 5.

Wir zeigen nun weiter, daß man aus der Gesamtheit der so definierten Punkte τ'_ν und τ''_ν eine Folge $\{c_\nu\}$ in der Weise herausheben könnte, daß wenn nunmehr T_ν *irgend* eine Teilmenge ist, der zwei konsekutive Punkte c_ν und $c_{\nu+1}$ *dieser* Folge angehören, bei beliebig kleinem ε die Relation

$$\mathfrak{B}(T_\nu) \geq \tfrac{1}{2}(\eta - \varepsilon)$$

für jedes hinreichend große ν erfüllt wäre. Hierzu nehme man in dem Gebiet $\mathfrak{J}_\nu$ einen inneren Punkt m_ν beliebig an und ziehe von einem Punkt a des äußeren Gebietes $\mathfrak{A}$ einen Streckenzug $\mathfrak{p}_\nu$ zum Punkt m_ν, so daß alle diese Streckenzüge einander nicht kreuzen[1]) und einen um a gelegten Kreis je einmal in einem Punkt k'_ν schneiden. Dann kann man aus den Punkten $\{k'_\nu\}$ wieder eine einfache Folge von Punkten $\{k''_\nu\}$ herausheben, die von derselben Seite gegen einen Grenzpunkt k_ω konvergieren und deren Indizes wachsen (vgl. Kap. V § 9). Aus dieser Folge $\{k''_\nu\}$ wähle man nun wieder eine Teilfolge $\{k_\nu\}$ aus, die *keine zwei konsekutiven Punkte der Folge* $\{k''_\nu\}$ *enthält.* Diese Folge $\{k_\nu\}$ bestimmt eindeutig eine Teilmenge der Menge $\{m_\nu\}$, also auch eine entsprechende Teilmenge von $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ und $\{\mathfrak{T}_\nu\}$. In jeder Menge $\mathfrak{T}_\nu$, die dieser Teilmenge angehört, wähle man nun einen der beiden Punkte τ'_ν und τ''_ν beliebig als Punkt c_ν aus, so wird, wie man leicht beweist, die so definierte Folge $\{c_\nu\}$ die verlangte Eigenschaft besitzen. Das gleiche gilt daher auch von jeder Teilmenge dieser Folge, deren Indizes wachsen.

Damit haben wir für die so definierte Folge $\{c_\nu\}$ diejenige Eigenschaft abgeleitet, die hier immer die Grundlage der weiteren Schlüsse bildet. Wird nämlich nun auf der Einheitsstrecke *irgend* ein Punkt t_ν angenommen, der Bildpunkt von c_ν ist, und aus diesen Punkten wieder eine einfache Folge $\{t'_\nu\}$ ausgewählt, die gegen einen Grenzpunkt t_ω konvergiert, und ist wieder c'_ν der Bildpunkt von t'_ν, so entspricht jedem Intervall $t'_\nu t'_{\nu+1}$ eine zusammenhängende Teilmenge T'_ν von $\mathfrak{C}$, der die Punkte c'_ν und $c'_{\nu+1}$ angehören, und es ist bei hinreichend großem ν

$$\mathfrak{B}(T'_\nu) \geq \tfrac{1}{2}(\eta - \varepsilon).$$

1) Von der Menge $\mathfrak{C}$ wird hier ganz abgesehen.

Dies steht aber, da die Intervalle $t'_\nu t'_{\nu+1}$ mit wachsendem ν unter jede Grenze sinken, mit der Stetigkeit der Abbildung im Widerspruch.

Die somit als notwendig erwiesene Bedingung wird sich auch als hinreichend erweisen. Der Beweis dieser Behauptung kann verschieden geführt werden. Ich beschränke mich zunächst auf den Fall, daß der Menge $\mathfrak{C}$ keine Peanoschen Flächen angehören, und schicke noch einen Hilfssatz voraus.

§ 8. *Ein Anordnungssatz.* Die unendlich vielen Gebiete der Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{C})$ denken wir uns zunächst nach dem Werte ihrer Breite geordnet; für Gebiete gleicher Breite werde die Anordnung willkürlich festgesetzt. Zu den Gebieten von $\mathfrak{K}(\mathfrak{C})$ gehört auch das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$; es nimmt in der Anordnung stets die erste Stelle ein.[1])

Wir erhalten so eine Gebietsfolge $\{\mathfrak{J}'_\nu\}$ und eine Folge von Gebietsgrenzen $\{\mathfrak{T}'_\nu\}$. Wir heben nun diejenigen Gebiete heraus, für die bei beliebig gegebenem $e > 0$

$$\mathfrak{B}'_\nu = \mathfrak{B}(\mathfrak{T}'_\nu) \geq e$$

ist. Ihre Zahl sei M, und ihre Grenzmengen seien

(1) $$\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2, \cdots \mathfrak{T}'_M.$$

Den noch verbleibenden Rest von $\{\mathfrak{T}'_\nu\}$ bezeichnen wir durch

(2) $$\{T_\lambda\} = T_1, T_2, \cdots T_\lambda, \cdots$$

Mit den Gebietsgrenzen T_λ bilden wir nun zusammenhängende Bestandteile, die wir mit den M Mengen $\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2, \cdots \mathfrak{T}'_M$ vereinigen. Daß dies möglich sein muß, liegt auf der Hand; es handelt sich nur darum, ein Ausführungsverfahren in präziser Form anzugeben. Es ist das folgende.

Hängt die erste Menge T_1 mit keiner der Mengen T_λ zusammen, so hängt sie notwendig mit einer Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ zusammen. Solcher kann es mehrere geben. Es kann insbesondere die ganze Menge T_1 Teil einer der Mengen (1) sein, alsdann wählen wir diese als Menge $\mathfrak{T}'_\nu$; im andern Fall wählen wir $\mathfrak{T}'_\nu$ beliebig, doch so, daß $\mathfrak{T}'_\nu$ und T_1 nicht etwa nur einen einzigen Punkt gemein haben.[2]) Wir bilden dann die Menge (S. 11 Anm. 1)

(3) $$\mathfrak{T}''_\nu = \mathfrak{M}\{\mathfrak{T}'_\nu, T_1\},$$

1) Von den im folgenden genannten Gebieten ist also $\mathfrak{J}'_1 = \mathfrak{A}$.

2) Solche muß es notwendig geben, da T_1 mit allen Mengen zusammenhängt, die Grenzen der zu $\mathfrak{J}(T_1)$ benachbarten Gebiete sind. Bei der Figur 7 (S. 115) hängt jedes Dreieck einerseits mit $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ zusammen, andrerseits auch mit dem Gebiet $\mathfrak{G}$, zu dem der Mittelpunkt des Quadrats gehört. Mit $\mathfrak{A}$ hat es nur je einen Punkt gemein, mit $\mathfrak{G}$ seinen ganzen Umfang.

tilgen sofort T_1 in der Reihe 2) und ersetzen in der Reihe (1) die Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ durch $\mathfrak{T}''_\nu$. Wir gelangen so zu einer Reihe (1').

Hängt dagegen T_1 mit einer der Mengen T_λ zusammen, so sei T_i die erste; wir bilden dann

(4) $$T'_1 = \mathfrak{M}\,\{T_1, T_i\},$$

tilgen sofort T_i in der Reihe (2) und ersetzen T_1 durch T'_1; die Reihe (2) gehe dadurch in die Reihe (2') über. Wir operieren dann mit T'_1 wie eben mit T_1, unterscheiden also die beiden auch für T_1 unterschiedenen Möglichkeiten und haben nur den Fall weiter zu erörtern, daß T'_1 mit einer der Mengen der Reihe (2') zusammenhängt. Ist T_k die erste, so bilden wir wieder

$$T''_1 = \mathfrak{M}\,\{T'_1, T_k\} = \mathfrak{M}\,\{T_1, T_i, T_k\},$$

tilgen in der Reihe (2') die Menge T_k, ersetzen T'_1 durch T''_1 und erhalten so eine Reihe (2''); mit ihr und der Menge T''_1 verfahren wir wiederum in der gleichen Weise. Nach einer endlichen oder unendlichen Menge von Schritten gelangen wir so zu einer wohl definierten Menge

(5) $$\mathfrak{M}\,\{T_1, T_i, T_k, \cdots T_p, \cdots\},$$

die mit keiner Menge T_λ zusammenhängt und daher notwendig mit einer Menge von (1) zusammenhängen muß.[1] Ist dies wieder die Menge $\mathfrak{T}'_\nu$, die genau so bestimmt wird wie oben, so bilden wir zunächst die Menge

$$\mathfrak{T}''_\nu = \mathfrak{M}\,\{\mathfrak{T}'_\nu, T_1^{(\nu)}\},$$

wo $T_1^{(\nu)}$ die eben bestimmte Menge (5) sein soll, und ersetzen nunmehr in der Reihe (1) die Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ durch $\mathfrak{T}''_\nu$. Die Reihe (1) hat sich dadurch wieder in eine Reihe (1') verwandelt, die ebenfalls M Mengen enthält.

Mit der so modifizierten Reihe (1') und dem noch vorhandenen Rest von (2), falls einer existiert, verfahren wir nun in der gleichen Weise. Dies können wir eventuell unbegrenzt fortsetzen; nach den allgemeinen Sätzen der Mengenlehre müssen wir aber nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Schritten zu Ende kommen, d. h. die Reihe (2) völlig erschöpfen. Die M Mengen, die sich dabei aus (1) ergeben, bezeichnen wir nun durch

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots \mathfrak{T}_\nu, \cdots \mathfrak{T}_M,$$

und zwar ist für jedes ν

$$\mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{M}\,\{\mathfrak{T}'_\nu, T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}, \cdots T_\lambda^{(\nu)}, \cdots\},$$

1) Die Zahl der Schritte kann auch transfinit sein. In dem oben (§ 7) angeführten ersten Beispiel ist sie gleich $\omega \cdot 2$.

wo die $T_\lambda^{(\nu)}$ die Mengen sind, durch deren sukzessive Vereinigung mit $\mathfrak{T}'_\nu$ die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ entstanden ist. Ihre Zahl kann endlich oder unendlich sein.

Von den Mengen $T_\lambda^{(\nu)}$ ist noch zu zeigen, daß jeder ihrer Punkte, der überhaupt Grenzpunkt eines Gebietes ist, *allseitig erreichbar ist.* Die Gebiete, die hierfür überhaupt in Frage kommen, sind die der Komplementärmenge $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$. Für diejenigen von ihnen, deren Grenzen einer der Mengen $T_\lambda^{(\nu)}$ angehören, bedarf die Behauptung keines Beweises; sie ist nur für die übrigen Gebiete, falls solche vorhanden sind, nachzuweisen.

Dazu gehen wir zu unserm Anordnungsprozeß zurück und betrachten zunächst die Menge $T_1^{(\nu)}$. Gemäß ihrer Definition ist jeder ihrer Punkte, der überhaupt Grenzpunkt eines Gebietes ist, aber nicht Grenzpunkt eines derjenigen Gebiete, deren Grenzen die in $T_1^{(\nu)}$ eingehenden Mengen $T_1, T_i, T_k \cdots$ sind, notwendig Grenzpunkt von einem der Gebiete $\mathfrak{J}'_\nu$, die von den Mengen $\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2, \cdots \mathfrak{T}'_M$ begrenzt werden. Denn die nicht in $T_1^{(\nu)}$ eingehenden Mengen der Reihe (2) hängen mit $T_1^{(\nu)}$ nicht zusammen. Daraus ist die allseitige Erreichbarkeit der Punkte von $T_1^{(\nu)}$ unmittelbar zu schließen.

Durch die Hinzufügung der Menge $T_1^{(\nu)}$ zur Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ kann sich aber die Grenze eines der Gebiete $\mathfrak{J}'_\nu$ in keiner Weise ändern, da sie ja durch die Menge $\mathfrak{C}$ an sich bestimmt ist. Die behauptete Eigenschaft muß daher in gleicher Weise auch für die Menge $T_2^{(\nu)}$, sowie für jede weitere Menge erfüllt sein, die Bestandteil von $\mathfrak{T}_\nu$ ist, sowie auch für jede Menge, die aus irgend welchen von ihnen durch Vereinigung gebildet wird.

§ 9. *Herstellung der Abbildung für den Fall, daß die Menge $\mathfrak{B}$ höchstens punkthaft*[1]) *ist.* Wir denken uns zunächst die im vorigen Paragraphen angegebene Anordnung ausgeführt. Sie liefert die M Mengen

$$(1) \qquad \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots \mathfrak{T}_\nu, \cdots \mathfrak{T}_M$$

und die in sie eingehenden Mengen $\{T_\lambda^{(\nu)}\}$. Gemäß § 7 kann es unter ihnen nur eine endliche Zahl geben, für die bei beliebigem ε

$$(2) \qquad \mathfrak{B}(T_\lambda^{(\nu)}) > \varepsilon$$

ist.

Die M Mengen (1) konstituieren zusammen die Menge $\mathfrak{T}$, jede von ihnen muß daher mit mindestens einer andern zusammenhängen.

1) Die wirkliche Abbildung kann vielfach erheblich einfacher bewirkt werden, als gemäß dem folgenden allgemeinen Verfahren. Vgl. das in § 4 behandelte Beispiel sowie eine demnächst erscheinende Königsberger Dissertation von O. Janzen.

Sie lassen sich daher (vgl. § 6) in einem Zuge durchlaufen. Ihre Abbildung auf die Einheitsstrecke wird daher nachgewiesen sein, wenn wir dies für jede von ihnen einzeln nachweisen können.

Sei
$$\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \cdots \mathfrak{T}^{(\nu)}, \cdots \mathfrak{T}^{(\varrho)}$$
die Reihenfolge, in der die Mengen durchlaufen werden, und sei σ_ν das Intervall der Einheitsstrecke, dem die Menge $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ entsprechen soll, so setzen wir

(3) $$\sigma_\nu = \varrho\mathfrak{B}(\mathfrak{T}^{(\nu)}) = \varrho\mathfrak{B}_\nu,$$

so daß also σ_ν proportional zu $\mathfrak{B}_\nu$ ist, und verfahren analog auch für das Folgende. Wir haben dann zu zeigen, wie man $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ eindeutig und stetig auf σ_ν abbilden kann.

Bezeichnen wir zu diesem Zweck der Einfachheit halber *für den Augenblick* die Menge $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ durch $\mathfrak{T}$, die ihr zugehörigen Mengen $\{T_\lambda^{(\nu)}\}$ durch

(4) $$\{T_\lambda\} = T_1, T_2, \cdots T_\lambda \cdots$$

und das zugehörige Intervall durch σ; ferner durch $\mathfrak{T}'$ die ursprüngliche Menge, die durch ihre Vereinigung mit den Mengen $\{T_\lambda\}$ die Menge $\mathfrak{T}$ ergibt. Wir wollen insbesondere zunächst annehmen, daß *jede* Menge T mit *der Menge* $\mathfrak{T}'$ *selbst* Punkte gemein hat.[1]) Wir wissen dann, daß gemäß § 8 jede Menge T_λ mit $\mathfrak{T}'$ einen kurvenhaften Bestandteil gemein hat.

Die Menge $\mathfrak{T}'$ ist nach Annahme als stetiges Bild einer Strecke darstellbar; wir bilden sie auf die in § 4 genannte Art auf eine Strecke $\sigma' < \sigma$ ab. Ferner sei c_λ *irgend* ein Punkt von $\mathfrak{T}'$, den die Menge T_λ mit $\mathfrak{T}'$ gemein hat, und s_λ ein ihm gemäß § 4 zugeordneter Punkt der Strecke σ'. Da jede Menge T_λ mit $\mathfrak{T}'$ einen kurvenhaften Bestandteil gemein hat, können wir alle Punkte c_λ verschieden von einander wählen, also auch alle Punkte s_λ. Sei nun S die durch alle diese Punkte $\{s_\lambda\}$ bestimmte *abgeschlossene* Teilmenge von σ' und T ihr Bild in $\mathfrak{T}'$. Sie zerlegt das Intervall σ' in gewisse Teilintervalle σ'_μ, denen wieder gewisse Teilmengen T'_μ von $\mathfrak{T}'$ eindeutig entsprechen, und zwar entspricht einem gemeinsamen Endpunkt zweier Intervalle σ'_μ ein gemeinsamer Endpunkt der Bildmengen T'_μ. Überdies konstituieren

1) Ein Beispiel liefert Fig. 9 auf S. 115, wenn man $\mathfrak{J}'$ als das Gebiet nimmt, dem der Mittelpunkt des Quadrats angehört, und die Dreiecke als Mengen T_λ. Dann gehört jede Menge T_λ ganz zu $\mathfrak{T}'$, und die oben gegebene Darstellung stellt jedes Dreieck doppelt dar. Die Punkte c_λ kann man auf den Dreiecken T_λ beliebig auswählen, z. B. jeden als Mitte der Grundlinie.

die Mengen T'_μ zusammen mit der Menge T die Menge $\mathfrak{T}'$ in der Weise, daß

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{M}(\{T'_\mu\},\ T)$$

ist.

Nun werde ein Intervall δ_λ so angenommen, daß

$$\delta_\lambda = \varrho_\lambda \mathfrak{B}(T_\lambda) = \varrho_\lambda e_\lambda; \quad \sum \delta_\lambda = \sigma - \sigma' \tag{5}$$

ist, so daß also die ϱ_λ so zu wählen sind, daß $\lim \delta_\lambda = 0$ ist. Die Abbildung soll nun so eingerichtet werden, daß diesem Intervall δ_λ die Menge T_λ als Bildmenge entspricht, und überdies seinen beiden Endpunkten der Punkt c_λ.

Wir bringen dazu die Intervalle $\{\delta_\lambda\}$ und $\{\sigma'_\mu\}$ auf einer Strecke der Länge σ so in eine geordnete Reihe, daß sie diese Strecke überalldicht erfüllen, und ihre Anordnung derjenigen der Punkte $\{s_\lambda\}$ und der Intervalle $\{\sigma'_\mu\}$ auf der Strecke σ' ähnlich ist, und haben überdies zu beachten, daß ein Intervall δ_λ stets an zwei Intervalle σ'_μ angrenzen muß.[1]) Wir werden dann die Aufgabe der stetigen Abbildung für die Menge $\mathfrak{T}$ gelöst haben, falls wir im Stande sind jede Menge T'_μ auf das bezügliche Intervall σ'_μ und jede Menge T_λ auf das Intervall δ_λ in der Weise stetig abzubilden, daß auch die Gesamtabbildung eine stetige ist. Dies soll übrigens stets so durchgeführt werden, daß wir als Abbildung von T'_μ auf σ'_μ die *bereits vorhandene Abbildung*, d. h. die von $\mathfrak{T}'$ auf σ', *beibehalten*.

Liegt der eben vorausgesetzte einfache Fall, daß jedes T_λ *mit* $\mathfrak{T}'$ *selbst* Punkte gemein hat, nicht vor, so wird dadurch nichts wesentliches geändert. Um nämlich die gewünschte Intervallanordnung zu erhalten, haben wir alsdann zunächst nur diejenigen der Mengen $\{T_\lambda\}$ zu berücksichtigen, die *mit* $\mathfrak{T}'$ *selbst* Punkte gemein haben. Sei $\mathfrak{T}'_1$ das Kontinuum, das durch ihre Verbindung mit $\mathfrak{T}'$ entsteht, und seien wieder $\{\delta_\lambda\}$ und $\{\sigma'_\mu\}$ die dadurch bestimmten Intervalle. Wir operieren alsdann in derselben Weise mit denjenigen der Mengen $\{T_\lambda\}$, die mit der Menge $\mathfrak{T}'_1$ Punkte gemein haben. Dadurch erhalten wir eine neue Intervallanordnung; sie entsteht dadurch, daß jetzt auch jedes Intervall δ_λ in der gleichen Weise zerfallen kann, wie vorher σ'. Da aber die Abbildung für die Intervalle $\{\delta_\lambda\}$ erst zu leisten ist, so brauchen wir deren Zerfallen gar nicht weiter in Betracht zu ziehen. Wir können also auch in diesem Fall das Gesamtergebnis dahin aussprechen, daß sich die Strecke σ mit zwei Arten von Teilintervallen bedeckt, so daß für die

1) Eine Ausnahme kann nur eintreten, wenn es ein erstes oder letztes Intervall δ oder σ' gibt. Die Anordnung ist, wie man leicht sieht, eindeutig bestimmt.

einen die Abbildung bereits vorhanden ist, während sie für die andern erst zu bewirken ist.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zu den Mengen (1) zurück, ersetzen also $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ und σ durch σ_ν, und verfahren mit jedem Intervalle σ_ν, wie wir soeben mit σ verfuhren. Jedes Intervall σ_ν bedeckt sich dann mit Intervallen von zweierlei Art, also auch die gesamte Einheitsstrecke. Diese *sämtlichen* Intervalle und die entsprechenden Teilmengen bezeichnen wir nunmehr ebenfalls durch

$$\{\sigma'_\mu\}, \quad \{\delta_\lambda\}; \quad \{T'_\mu\}, \quad \{T_\lambda\}^{1)},$$

und zwar ist für jedes Intervall σ'_μ und die zugehörige Bildmenge T'_μ die Abbildung bereits vorhanden, während sie für jedes Intervall δ_λ und die zugehörige Menge T_λ noch zu leisten ist. Auch besteht für die Intervalle $\{\delta_\lambda\}$ und $\{\sigma'_\mu\}$ wieder die Gleichung

$$\sum \delta_\lambda + \sum \sigma'_\mu = \sum \sigma_\nu = 1.$$

Die Menge T_λ, die einem Intervall δ_λ entspricht, kann nun zunächst von der Art sein, daß ihre Komplementärmenge $\mathfrak{R}_\lambda$ aus einer endlichen Zahl von Gebieten besteht; dann kann sie, da wir in § 8 ihre allseitige Erreichbarkeit nachgewiesen haben, gemäß § 6 so als stetiges Bild der Strecke δ_λ dargestellt werden, daß den beiden Endpunkten von δ_λ der Punkt c_λ entspricht. Die Strecke δ_λ zerfällt dadurch in eine endliche Zahl von Intervallen $\sigma'_{\lambda\mu}$, auf denen die stetige Abbildung bereits geleistet ist. Falls jedoch die Komplementärmenge $\mathfrak{R}_\lambda$ in unendlich viele Gebiete zerfällt, so ist T_λ eine Menge derselben Art wie $\mathfrak{T}^{(\nu)}$. In diesem Fall spaltet sich δ_λ in derselben Weise, wie soeben die Einheitsstrecke, zunächst in gewisse Teilintervalle $\sigma_{\lambda\nu}$[2]), die wieder der Breite $\mathfrak{B}(T_{\lambda\nu})$ proportional angenommen werden, und dann wieder in gewisse Intervalle $\sigma'_{\lambda\mu}$ und in gewisse Intervalle $\delta_{\lambda\mu}$[3]), deren Größe sich ebenfalls wie oben bestimmt. Auf den Intervallen $\sigma'_{\lambda\mu}$ kann die stetige Abbildung den früheren Sätzen gemäß in analoger Weise bewirkt werden wie auf den Intervallen σ'_μ, während sie für die Intervalle $\delta_{\lambda\mu}$ noch zu leisten ist, und zwar wiederum so, daß den beiden Endpunkten von $\delta_{\lambda\mu}$ derselbe Punkt $c_{\lambda\mu}$ von $T_{\lambda\mu}$ entspricht.

In dieser Weise kann man fortfahren. Dabei ist zu beachten, daß die Intervalle $\{\delta\}$ bei jedem Schritt von ν zu $\nu + 1$ weiter zer-

1) Die hier mit T_λ bezeichneten Mengen können sich aus mehreren der früheren Mengen T_λ zusammensetzen; doch scheint es nicht nötig, eine neue Bezeichnung einzuführen.

2) Sie entsprechen den obigen Intervallen σ_ν.

3) Sie entsprechen den obigen Intervallen σ'_μ und δ_λ.

fallen, und zwar konvergieren sie mit wachsender Indizeszahl gleichmäßig gegen Null. Dies folgt unmittelbar aus der Gl. (5) sowie daraus, daß gemäß § 2 die Breiten $\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{B}_{\lambda\mu}\ldots$ mit wachsender Indizeszahl gleichmäßig gegen Null konvergieren. Sie verschwinden also bei dem obigen Verfahren schließlich ganz bis auf solche Punkte, die unendlich vielen von ihnen als innere Punkte gemeinsam sind. Die Intervalle $\{\sigma'\}$ zerfallen dagegen beim Fortgang von ν zu $\nu+1$ *nicht*. Es erfüllt sich daher die Einheitsstrecke schließlich einerseits mit den Intervallen

$$(6)\qquad \sigma'_\mu,\quad \sigma'_{\lambda\mu},\quad \sigma'_{\varkappa\lambda\mu},\ldots,$$

andrerseits mit denjenigen Punkten, die keinem Intervall σ' angehören, aber gemeinsame Punkte einer unendlichen Folge von Intervallen

$$(7)\qquad \delta_\lambda,\quad \delta_{\lambda\mu},\quad \delta_{\lambda\mu\nu}\ldots$$

sind. Da sich nun jedes Intervall δ in Intervalle σ' spaltet, so ist jeder dieser Punkte auch Grenzpunkt gewisser Intervalle σ' mit wachsender Indizeszahl, d. h. einer Folge der Form (6). Jedem dieser Punkte entspricht offenbar ein solcher Punkt von $\mathfrak{C}$, der zugleich Punkt von $\mathfrak{B}$ ist.

§ 10. *Der Stetigkeitsbeweis.*[1]) Den Beweis der Stetigkeit kann man folgendermaßen führen. Nach den Festsetzungen von § 9 ist die Abbildung auf jedem Intervalle σ_ν eine solche, daß sie für die Intervalle σ'_μ mit derjenigen der Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ auf σ_ν übereinstimmt. Nun bilden diese Intervalle σ'_μ mit ihren eventuellen Grenzpunkten auf σ_ν eine *abgeschlossene* Menge $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$; aus Satz II folgt daher, daß sich die Stetigkeit der Abbildung auch auf diejenigen Punkte von $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$, die nicht innere Punkte eines Intervalls σ'_μ sind, immer dann überträgt, wenn die den Intervallen σ'_μ entsprechenden Mengen T'_μ nur einen Grenzpunkt besitzen, und wenn man ihn dem bezüglichen Grenzpunkt der Intervalle σ'_μ zuordnet. Das ist aber hier der Fall und zwar für jedes Intervall σ_ν; damit gilt es auch für die gesamte Einheitsstrecke und die gesamte abgeschlossene Menge

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{M}\{\mathfrak{Q}^{(\nu)}\}.$$

Sei $\mathfrak{T}_1$ die Teilmenge von $\mathfrak{C}$, die stetiges Bild von $\mathfrak{Q}_1$ ist.

Gemäß der Festsetzung von § 9 ist die Abbildung auf jedem Intervall δ_λ weiter so zu leisten, daß sie auf ihm stetig ist und in seinen

1) Ich bin genötigt, im folgenden einiges aus § 9 zu wiederholen, hielt es aber im Interesse der Übersichtlichkeit für gut, den Stetigkeitsbeweis für sich darzustellen.

Endpunkten mit derjenigen übereinstimmt, die für $\mathfrak{Q}_1$ besteht. Wir zeigen zunächst, daß wenn dies ausführbar ist, die Abbildung auch für die ganze Einheitsstrecke stetig ist. Dazu ist nur zu beweisen, daß sie auf den Intervallen δ_λ auch *gleichmäßig* stetig ist. Dies ist aber wieder eine unmittelbare Folge davon, daß mit δ_λ auch die Breite $\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}(T_\lambda)$ gegen Null konvergiert; und daraus folgt schließlich, daß die Abbildung auch in jedem Grenzpunkte unendlich vieler Intervalle δ_λ mit der für $\mathfrak{Q}_1$ vorhandenen übereinstimmt. Die Abbildung wird daher für die gesamte Einheitsstrecke stetig sein, falls sie für jedes δ_λ der obigen Festsetzung gemäß eingerichtet werden kann.

Beim Fortgang der Abbildung zerfällt nun zunächst jedes Intervall δ_λ in eine *endliche* Menge von Intervallen $\sigma_{\lambda\nu}$, die den Intervallen σ_ν analog sind, und zwar ist jedes Intervall $\sigma_{\lambda\nu}$ der Breite derjenigen Menge $T_{\lambda\nu}$ proportional, die ihr Bild werden soll. Jedes dieser Intervalle spaltet sich wieder in gewisse analog bestimmte Intervalle $\sigma'_{\lambda\mu}$ und $\delta_{\lambda\mu}$. Alle diese Intervalle $\{\sigma'_{\lambda\mu}\}$ definieren zusammen mit den Intervallen $\{\sigma_\mu\}$ eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{Q}_2$, und für alle Punkte dieser Menge liefert die von uns getroffene Festsetzung eine stetige Beziehung einer Teilmenge $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{Q}_2$. Die Abbildung ist dann weiter für alle Punkte eines Intervalles $\delta_{\lambda\mu}$ so einzurichten, daß sie auf $\delta_{\lambda\mu}$ stetig ist und in den Endpunkten von $\delta_{\lambda\mu}$ mit der für $\mathfrak{Q}_2$ vorhandenen übereinstimmt. Ist dies ausführbar, so folgt die gleichmäßige Stetigkeit auf allen Intervallen $\delta_{\lambda\mu}$ ebenso wie oben, woraus wieder in der nämlichen Weise die Stetigkeit für die gesamte Einheitsstrecke zu schließen ist.

Die vorstehende Betrachtung überträgt sich unmittelbar von ν auf $\nu + 1$. Die Erhaltung der Stetigkeit ist daher nur noch für den Übergang von $\{\nu\}$ auf ω nachzuweisen. Dies folgt aber wieder leicht aus der Tatsache, daß alle Intervalle $\{\sigma'\}$ und alle Intervalle $\{\delta\}$ mit der Zahl ihrer Indizes gleichmäßig gegen Null konvergieren.

Seien nämlich

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_\nu \ldots$$

die vorstehend definierten Mengen, so ist die Abbildung stetig für $\mathfrak{Q}_\nu$, also für alle Punkte, die entweder innere Punkte der Intervalle σ' mit höchstens ν Indizes sind oder Grenzpunkte dieser Intervalle. Sie ist aber, wie eben hervorgehoben, auch für alle diese Mengen gleichmäßig stetig. Die Stetigkeit ist also nur noch nachzuweisen für solche Punkte, die niemals einer Menge $\mathfrak{Q}_\nu$ angehören. Das sind diejenigen Punkte, die für *jede* Indizeszahl einem Intervall δ angehören, also gemeinsame Punkte von Intervallen

$$\delta_\lambda, \delta_{\lambda\mu}, \delta_{\lambda\mu\nu}, \ldots \tag{8}$$

für irgend welche Indizes $\lambda, \mu, \nu \ldots$ sind. Jeder derartige Punkt ist aber gemäß § 9 zugleich Grenzpunkt unendlich vieler Intervalle σ', also auch von Intervallen der Mengen $\mathfrak{Q}_\nu$. Da nun die Abbildung für alle Mengen $\mathfrak{Q}_\nu$, also auch für alle Intervalle σ' gleichmäßig stetig ist, so überträgt sich die Stetigkeit gemäß Satz II immer dann auf den Grenzpunkt einer solchen Folge, wenn die ihren Intervallen entsprechenden Bildmengen

(9) $$T_\lambda, \; T_{\lambda\mu}, \; T_{\lambda\mu\nu}, \ldots$$

nur einen Grenzpunkt besitzen, und wenn man ihn dem Grenzpunkt der Intervalle (8) entsprechen läßt. Das ist aber hier der Fall, und damit ist der Stetigkeitsbeweis geliefert.

Wir haben daher den folgenden Satz:

Besteht die Komplementärmenge eines geschränkten kurvenhaften Kontinuums $\mathfrak{C}$ aus unendlich vielen Gebieten, ist für jedes Gebiet die Erreichbarkeitsbedingung erfüllt, gibt es Gebiete jeder endlichen Breite nur in endlicher Zahl und bilden diejenigen Punkte von $\mathfrak{C}$, die Häufungspunkte unendlich vieler Gebiete sind, ohne zugleich der Grenze eines dieser Gebiete anzugehören, eine punkthafte Menge: so ist $\mathfrak{C}$ als eindeutiges und stetiges Bild der Strecke darstellbar, also eine stetige Kurve.

§ 11. *Der allgemeinste gestaltliche Typus stetiger Kurven.* Die weitgehendste gestaltliche Verallgemeinerung, die eine stetige Kurve der Annahme des § 9 gegenüber aufweisen kann, besteht erstens darin, daß die Menge $\mathfrak{V}$ auf Teilen der Menge $\mathfrak{U}$ überalldicht liegen kann, und daß der Kurve zweitens auch unendlich viele Peanosche Flächen angehören können.[1]) Gehen wir von der Menge $\mathfrak{V}$ sofort zu der aus ihr entstehenden *abgeschlossenen* Menge über, so wird diese Menge jetzt notwendig kurvenhaft sein, wie es in den Beispielen (5) und (6) von § 7 der Fall ist. Dieser Menge wollen wir nun auch noch die Peanoschen Flächenstücke hinzufügen und die gesamte so definierte *abgeschlossene* Teilmenge der Kurve $\mathfrak{C}$ durch V bezeichnen. Außerdem operieren wir nach wie vor mit der Menge $\mathfrak{U} = \{u\}$, die ihre frühere Bedeutung als Grenzgebilde aller Gebiete unverändert behält. Es wird sich herausstellen, daß auch in diesem Falle die im Satz IX aufgestellte notwendige Bedingung zugleich hinreichend ist; *insbesondere kommt eine Erreichbarkeitsbedingung für die Menge V nicht in Betracht.* Jeder Punkt der Menge V verhält sich in dieser Hinsicht sozusagen ebenso wie diejenigen Punkte, die zu Peanoschen Gebieten gehören.

1) Damit wird nun auch der S. 218 Anm. 1 genannte Fall erledigt.

Von den in § 7 genannten Beispielen (5) und (6) stellt das zweite eine stetige Kurve dar, das erste nur dann, falls man die von zwei Parallelen gebildeten Rechtecke noch weiter zerteilt; ohne die Zerlegung in die Teilrechtecke würde die Figur dem Satz IX widersprechen. Ein einfaches Beispiel einer solchen stetigen Kurve, die keine Peanosche Fläche enthält, und deren Menge V keine allseitige Erreichbarkeit besitzt, ist das folgende (Fig. 23). In einem Rechteck der Seite 1 und der Höhe h nehme man auf der Grundlinie eine gegen den Nullpunkt sich häufende Punktmenge $\{1/\nu\}$ an, und errichte über jeder Teilstrecke δ_ν ein gleichschenkliges Dreieck Δ_ν von der Höhe h. In jedem Dreiecke Δ_ν ziehe man Parallelen in den Abständen $\{d_\nu\}$ zur Grundlinie, die sich gegen die Spitze häufen, und fälle von ihren Endpunkten Lote auf die benachbarten Parallelen. Dadurch zerfällt jedes Dreieck Δ_ν in gewisse Rechtecke $\{R_\nu\}$ und in gewisse rechtwinklige Dreiecke Δ'_ν. Mit jedem dieser Dreiecke Δ'_ν verfahre man analog und setze dies unbegrenzt fort, indem man jedes entstehende Rechteck beibehält und nur die Dreiecke weiter zerlegt. Ist dies ausgeführt, so verfahre man ebenso mit denjenigen Dreiecken $\{D_\nu\}$, deren Grundlinien auf der oberen Seite des Rechtecks liegen; so wird die auf diese Weise hergestellte, abgeschlossene kurvenhafte Menge ein Beispiel des verlangten Kurventypus darbieten, und zwar besteht die Menge V aus den sämtlichen Dreiecken Δ_ν und der einen (linken) Rechteckseite, gegen die sich die Seiten dieser Dreiecke verdichten, und für diese Menge V besteht keine allseitige Erreichbarkeit.

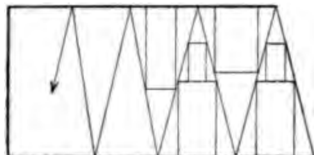


Fig. 23.

Man kann dies Beispiel auch so abändern, daß zur Kurve unendlich viele Peanosche Flächen gehören. Man braucht hierzu nur die Flächen der sämtlichen Dreiecke $\{D_\nu\}$ zu wählen.

Um den behaupteten Satz zu beweisen, benutze ich eine Methode, die sich teilweise an die Methode von § 9 und teilweise an diejenige anlehnt, die ich für die geometrische Ableitung der Peanoschen Abbildung des Quadrats auf die Strecke benutzt habe.[1]) Man gehe dazu von einer quadratischen Teilung der Ebene mit der *Diagonale* η aus und betrachte alle Quadrate, deren *Fläche* mindestens einen Punkt von $\mathfrak{C}$ enthält. Sie zerfallen in drei Klassen. Seien $\{q'\}$ diejenigen, deren *Fläche* keinen Punkt von V enthält, $\{q'''\}$ diejenigen, deren Flächen ganz einem Peanoschen Flächenstück angehören, und $\{q''\}$ die übrigen. Jeder Punkt von V liegt dann *außerhalb* aller Quadrate q'.

1) Vgl. Bericht I S. 122.

Sei nun m' irgend ein *innerer* Punkt eines Quadrates q', der zugleich Punkt der Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{C})$ ist, so muß er irgend einem Gebiet $\mathfrak{J}'_\mu$ dieser Menge angehören. Dann gehört auch dessen Grenze $\mathfrak{T}'_\mu$ wenigstens teilweise zu $\mathfrak{F}(q')$.[1] Die Gesamtheit aller Gebiete von $\mathfrak{K}(\mathfrak{C})$, denen derartige Punkte m' angehören, sei $\{\mathfrak{J}'_\mu\}$. Ist dann $\mathfrak{T}'$ diejenige *abgeschlossene* Menge, zu der die Grenze $\mathfrak{T}'_\mu$ eines *jeden dieser* Gebiete $\mathfrak{J}'_\mu$ gehört, so läßt sich leicht zeigen, daß ihr kein Punkt u von $\mathfrak{U}$ angehören kann, der *außerhalb* aller Quadrate $\{q'\}$ liegt. Denn jeder derartige Punkt u müßte Grenzpunkt von Punkten unendlich vieler unserer Mengen $\mathfrak{T}'_\mu$ sein; es müßte also unendlich viele Gebiete $\mathfrak{J}'_\mu$ geben, zu denen Punkte sowohl in unmittelbarer Nähe von u, wie auch innerhalb mindestens eines Quadrates q' gehören, und daraus würde man wieder folgern können, daß sich eine Größe $\varepsilon > o$ bestimmen ließe, so daß die Breite unendlich vieler Gebiete $\mathfrak{J}'_\mu$ größer als ε ausfiele. Damit ist die obige Behauptung erwiesen. Da nun die Menge V außerhalb aller Quadrate q' liegt, so folgt hieraus weiter, daß die Menge $\mathfrak{T}'$ keinen Punkt von V enthalten kann.

Die Menge $\mathfrak{T}'$ braucht ihrer Definition nach kein Kontinuum zu sein; sie kann in eine endliche oder abzählbare Menge *getrennter* Kontinua zerfallen. Jedes einzelne ist nach den früheren Sätzen als stetiges und eindeutiges Bild einer Strecke darstellbar. Keines von ihnen liegt, wie aus ihrer Definition unmittelbar folgt, außerhalb aller Quadrate q'. Endlich gibt es auch von ihnen, wie wir sofort zeigen wollen, nur eine endliche Zahl, deren Breite eine Größe $\varepsilon > 0$ übersteigt.

Die Flächen der Quadrate $\{q'\}$ bestimmen nämlich eine endliche Zahl getrennter Polygone P_k; jede Polygonfläche muß mindestens eine Quadratfläche enthalten. Gäbe es nun unendlich viele Kontinua der genannten Art, so müßte es mindestens ein Polygon P_k geben, das ebenfalls von unendlich vielen von ihnen durchzogen würde. Dies ist aber unmöglich. Zerfällt nämlich die in P_k enthaltene Teilmenge $\mathfrak{T}_k$ von $\mathfrak{C}$ zunächst in zwei getrennte Bestandteile, so kann man einen das Polygon P_k durchziehenden Streckenzug $\mathfrak{p}$ legen, der keinen Punkt von $\mathfrak{C}$ enthält und diese Bestandteile voneinander trennt. Dieser Streckenzug wird in irgend einem Gebiet $\mathfrak{J}_\lambda$ der Menge $\mathfrak{K}$ verlaufen (das Gebiet $\mathfrak{A}$ eingeschlossen). Falls nun die in P_k enthaltene Teilmenge $\mathfrak{T}_k$ in unendlich viele getrennte Bestandteile zerfiele, deren Breite größer als ε wäre, so gäbe es unendlich viele solche Streckenzüge. Es gäbe dann entweder unendlich viele verschiedene Gebiete $\mathfrak{J}_\lambda$, deren jedes mindestens einen dieser Streckenzüge enthielte, oder aber es gäbe

1) Sonst gehörte $\mathfrak{F}(q')$ selbst zu $\mathfrak{J}'_\mu$, was der Festsetzung über die Quadrate q' widerspricht.

mindestens ein Gebiet $\mathfrak{J}_\mu$, das unendlich viele Streckenzüge enthielte. Beides steht aber, wie man leicht sieht, mit den für die Darstellbarkeit notwendigen Bedingungen in Widerspruch. Die erste Möglichkeit widerstreitet nämlich dem Satz IX und die zweite der Erreichbarkeitsbedingung für das Gebiet $\mathfrak{J}_\mu$. Damit ist die Behauptung bewiesen, und wir folgern wiederum, daß sich diese Mengen der Breite nach so anordnen lassen, daß sie eine einfache Folge bilden. Zu ihnen fügen wir noch die Flächen der Quadrate $\{q'''\}$ hinzu und erhalten so die Mengen

$$\{T'_\lambda\} = T'_1, T'_2, \ldots T'_\lambda, \ldots$$

Wir gehen nun zu einem Quadrat q'' über, dessen Fläche mindestens einen Punkt von V enthält. Die in ihm enthaltene Teilmenge von $\mathfrak{C}$ können wir einfacher behandeln. Wie sie auch beschaffen sei, so wird sie entweder ein einzelnes Kontinuum sein oder aber in mehrere Kontinua zerfallen; aber es kann auch hier nur eine endliche Zahl von solchen geben, deren Breite eine Größe ε übersteigt. Dies wird ebenso bewiesen wie für die Menge $\mathfrak{T}$, nur daß hier das Quadrat q'' an die Stelle des Polygons P_k tritt.

Da dies für jedes Quadrat q'' gilt, so zerfallen auch die sämtlichen, in den Flächen der Quadrate $\{q''\}$ enthaltenen Teilmengen von $\mathfrak{C}$ in eine endliche oder abzählbare Menge einzelner Kontinua, von der Art, daß nur eine endliche Zahl existiert, deren Breite eine Größe ε übersteigt. Diese Kontinua seien der Breite nach geordnet

$$\{T''_\nu\} = T''_1, T''_2, \ldots T''_\nu \ldots$$

Jedes von ihnen soll, wie ich noch ausdrücklich bemerke, nur in einem *einzigen* Quadrat q'' enthalten sein. Alle diese Kontinua $\{T'_\lambda\}$ und $\{T''_\nu\}$ bilden zusammen naturgemäß wieder ein einziges Kontinuum, nämlich die Menge $\mathfrak{C}$ selbst.

Man spalte nun die vorstehend erhaltenen Kontinua in zwei Gruppen. In die erste nehmen wir alle diejenigen auf, deren Breite größer als η ist, *sowie auch die sämtlichen Quadrate* q''', die ganz einem Peanoschen Flächenstück angehören; ihre Gesamtheit sei

$$\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2, \ldots \mathfrak{T}'_\nu \ldots \mathfrak{T}'_M;$$

die zweite Gruppe soll alle übrigen enthalten. *Zu ihnen gehört insbesondere jede Menge* T''_ν, wir ordnen sie wieder der Größe nach und bezeichnen sie durch

$$\{T_\lambda\} = T_1, T_2, \ldots T_\lambda \ldots$$

Es ist also (da η die Diagonale der Quadrate ist)

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{T}'_\nu) \geq \eta, \quad \mathfrak{B}(T_\lambda) \leq \eta.$$

Man kann nun wieder wie in § 8 die Mengen T_λ mit den Mengen $\mathfrak{T}'_\nu$ zu zusammenhängenden Bestandteilen vereinigen. Dadurch möge $\mathfrak{T}'_\nu$ in eine Menge $\mathfrak{T}_\nu$ übergehen, so daß wie dort

$$\mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{M}\{\mathfrak{T}'_\nu,\ T_1^{(\nu)},\ T_2^{(\nu)} \dots T_\lambda^{(\nu)} \dots\}$$

ist. Dadurch erhalten wir wieder eine endliche Zahl von Mengen $\mathfrak{T}_\nu$, die ebenfalls miteinander zusammenhängen und daher in einem Zuge durchlaufen werden können; in dieser Reihenfolge mögen sich die Mengen

$$\mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2 \dots \mathfrak{T}_\nu, \dots \mathfrak{T}_N$$

ergeben. Wir teilen dann zunächst wieder die Einheitsstrecke in Bestandteile σ_ν, so daß

$$\sigma_\nu = \varrho\mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu)$$

ist, ordnen dem Intervall σ_ν die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ zu und haben nun die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ auf σ_ν abzubilden.

Wir können nunmehr wieder die Methode anwenden, die wir in § 10 für die Herstellung der Abbildung zugrunde legten. Dadurch bedeckt sich die Einheitsstrecke wie dort überalldicht mit gewissen Intervallen, und zwar in der Weise, daß ihre Anordnung und Lage den in § 10 genannten Bedingungen unterliegt. Die Intervalle haben aber hier eine etwas geänderte Bedeutung. Wir bezeichnen sie durch σ'_λ und σ''_λ, und zwar sollen $\{\sigma'_\lambda\}$ diejenigen sein, denen die Mengen T'_λ entsprechen, während die T''_λ die Bildmengen der Intervalle σ''_λ sein sollen. Für die Intervalle σ'_λ kann dann die Abbildung den früheren Sätzen gemäß ausgeführt werden, während sie für die Intervalle σ''_λ noch zu leisten ist.

Um nun die Abbildung einer Menge T''_λ auf das Intervall σ''_λ zu bewirken, nehmen wir eine Größe $\eta_1 < \eta/n$ beliebig an, denken uns das Quadrat q'' in Teilquadrate der Diagonale η_1 zerlegt und verfahren mit T''_λ, wie wir soeben mit $\mathfrak{C}$ verfuhren. Werde zuvor die Menge T''_λ durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet, und seien $\{\mathfrak{H}_\lambda\}$ die ihr zugehörigen Gebiete.[1]) Alle Quadrate, die überhaupt Punkte von $\mathfrak{S}$ enthalten, spalten wir wieder in die Quadrate $\{q''_1\}$, deren Fläche mindestens einen Punkt von V enthält, ohne jedoch ganz zu V zu gehören, in die Quadrate $\{q'''_1\}$, die ganz zu V gehören, und in die Quadrate $\{q'_1\}$, deren Flächen keinen Punkt von V enthalten. Durch die Quadrate $\{q'_1\}$ wird dann wieder eine Teilmenge $\{\mathfrak{H}'_\mu\}$ aller Gebiete $\{\mathfrak{H}_\lambda\}$ definiert, zu der wir diejenigen Gebiete rechnen, von denen ein innerer Punkt zugleich innerer Punkt eines Quadrates $\{q'_1\}$ ist. Die Grenzen $\{\mathfrak{S}'_\mu\}$ aller dieser Gebiete bestimmen dann wieder

1) Jedes Gebiet $\mathfrak{H}_\lambda$ ist hier Teil der Fläche von q''.

eine Teilmenge $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$, von der man ebenso wie oben zeigt, daß ihr kein Punkt von $\mathfrak{U}$ angehört, der außerhalb aller Quadrate $\{q_1'\}$ liegt, und daß sie nur eine endliche Zahl von Bestandteilen enthält, deren Breite größer als eine Größe ε_1 ist. Die so definierte Menge $\mathfrak{S}'$ zerfällt wieder in eine endliche oder abzählbare Menge von Teilmengen; ihnen fügen wir wieder die Flächen der Quadrate $\{q_1'''\}$ hinzu und erhalten so die Mengen

$$\{S_\nu'\} = S_1', S_2', \dots S_\nu', \dots,$$

deren jede als eindeutiges und stetiges Bild einer Strecke darstellbar ist. In gleicher Weise gelangen wir zu den Teilmengen

$$\{S_\nu''\} = S_1'', S_2'', \dots S_\nu'' \dots,$$

denen Punkte der Menge V angehören, und beide Mengengruppen besitzen die gleichen Eigenschaften, wie die vorstehenden Mengen $\{T_\nu'\}$ und $\{T_\nu''\}$. Mit ihnen bilden wir wieder die Mengen

$$\mathfrak{S}_1', \mathfrak{S}_2', \dots \mathfrak{S}_{M_1}',$$

deren Breite größer oder gleich η_1 ist, und die Mengen

$$\{S_\lambda\} = S_1, S_2 \dots S_\lambda \dots,$$

deren Breite kleiner oder gleich η_1 ist, und zu denen jede Menge S_ν'' gehört, sowie endlich die Mengen

$$\mathfrak{S}_\nu = \mathfrak{M}\{\mathfrak{S}_\nu', S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots S_\lambda^{(\nu)} \dots\}.$$

Die Abbildung wird nun wieder so vor sich gehen, daß das Intervall σ_λ'' in gewisse Teilintervalle $\sigma_{\lambda\mu}'$ und $\sigma_{\lambda\mu}''$ zerfällt, so daß für jedes Intervall $\sigma_{\lambda\mu}'$ und die entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{C}$ die stetige Abbildung den früheren Sätzen gemäß geleistet werden kann, während sie für die Intervalle $\sigma_{\lambda\mu}''$ und für die Mengen S_λ'' noch zu leisten ist.

In dieser Weise kann man fortfahren, und es ist nur noch zu zeigen, daß die Bedingungen erfüllt sind, auf Grund deren die Stetigkeit der Abbildung für alle Intervalle und ihre Grenzpunkte geschlossen werden kann. Dies kann aber in der gleichen Weise geschehen wie in § 10; hier wie dort bildet die Endlichkeit der Zahl von Teilmengen, deren Breite eine Größe ε übersteigt, die alleinige Grundlage der Schlüsse. In der Tat konvergiert aber auch hier die Breite der den Intervallen σ' und σ'' entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{C}$ zugleich mit den Quadraten q'', in denen diese Teilmengen enthalten sind, gleichmäßig gegen Null. Beachten wir nun, daß in den Beweis eine Erreichbarkeitsbedingung für die Peanoschen Flächen überhaupt nicht eingeht, so folgt schließlich folgendes zusammenfassende Theorem:

X. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein ebenes, geschränktes Kontinuum als stetiges und eindeutiges Bild der Strecke darstellbar ist, besteht darin, daß für jedes Gebiet, das der Komplementärmenge angehört, die allseitige Erreichbarkeit ihrer Grenze vorhanden ist, und daß Gebiete, deren Breite eine beliebig gegebene Größe übersteigt, nur in endlicher Anzahl auftreten.*

§ 12. *Die vielfachen Punkte.* Der im vorstehenden gewonnene allgemeinste Begriff der stetigen ebenen Kurve ist ein *gestaltlicher rein geometrischer* Begriff. Er stellt die *stetige Kurve* als eine *Punktmenge* hin, die besondere wohl definierte notwendige und hinreichende Eigenschaften hat. Auf Grund dieser Eigenschaften gestattet sie eine eindeutige und stetige Abbildung auf die Einheitsstrecke, mittels zweier eindeutigen und stetigen Funktionen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t) \cdot \tag{1}$$

Diese Darstellung ist auf die mannigfachste Art möglich. Wird dieselbe Punktmenge z. B. mehrmals hintereinander durchlaufen, mittels desselben oder auch verschiedener Funktionenpaare (1), so bilden alle durchlaufenen Punkte immer noch ein eindeutiges und stetiges Abbild der Einheitsstrecke. Man hat daher zwischen einem *notwendigen* und einem *zufälligen* Vielfachheitscharakter eines Kurvenpunktes zu unterscheiden. Der zufällige Charakter haftet nur an der Darstellung. Der notwendige kommt *jedem* Funktionenpaar zu, das die Kurve darstellt, während der zufällige auf Rechnung des besonderen Funktionenpaares kommt. So ist bei dem mit inneren Stacheln versehenen Quadrat jeder Punkt eines Stachels ein notwendiger Doppelpunkt[1]), während die irrationalen Punkte an sich einfache Punkte sind. Man kann den Tatbestand auch so ausdrücken, daß man zwischen der *Bahn* eines beweglichen Punktes und der *Kurve* oder *Punktmenge* unterscheiden muß, auf der er läuft. Zum Unterschied von der Punktmenge soll die so definierte Bahn als *Bahnkurve* bezeichnet werden; jedes Funktionenpaar (1) bestimmt also in diesem Sinne eine *Bahnkurve.* Die *Punktmenge* soll, um sie gestaltlich zu charakterisieren, nach wie vor als *stetige Kurve* bezeichnet werden.

Man kann nun fragen, wann man Bahnkurven als identisch ansehen will. Dies kann man im Anschluß an Fréchet so machen, daß man zwei Bahnkurven

$$\underset{0 \leq t \leq 1}{x = f(t),\ y = \varphi(t)} \quad \text{und} \quad \underset{0 \leq \tau \leq 1}{x = f_1(\tau),\ y = \varphi_1(\tau)} \tag{2}$$

1) Ein Stachel kann freilich eine Ausnahme bilden.

dann und nur dann als identisch bezeichnet, wenn das eine Funktionenpaar mittels einer eineindeutigen und stetigen Substitution in das andere transformiert werden kann.[1]) Fréchet bedient sich allerdings eines anderen Sprachgebrauchs. Er bezeichnet allgemein als stetige Kurve, was ich Bahnkurve nenne. Diesem Sprachgebrauch habe ich mich deswegen nicht angeschlossen, weil bei ihm die gestaltlichen Verhältnisse, die hier in den Vordergrund gestellt sind, unberücksichtigt bleiben würden.

Allgemeine Erörterungen über den Vielfachheitscharakter der stetigen Kurve beabsichtige ich nicht zu geben; ich beschränke mich im wesentlichen auf einige Bemerkungen über den *zufälligen* Vielfachheitscharakter der Bahnkurven.[2]) Es ist leicht, Bahnkurven herzustellen, die vielfache Punkte unendlich hoher Ordnung enthalten. Wird auf einer Strecke ein Punkt a und eine gegen ihn konvergierende Punktfolge $\{p_\nu\}$ angenommen, und durchläuft man nacheinander jede Strecke ap_ν hin und zurück, so liefern die darstellenden Funktionen bereits eine Bahnkurve, die den Punkt a als vielfachen Punkt unendlich hoher Ordnung enthält, während er für die stetige Kurve, die in diesem Falle durch die Strecke dargestellt wird, ein einfacher Punkt ist.

Die Ordnung der Vielfachheit kann aber auch die des Kontinuums sein. Wählt man z. B. $f(t)$ und $\varphi(t)$ als zwei Funktionen, die für *gleiche* Intervalle von t streckenweise konstant sind, so entspricht jedem dieser Intervalle je ein Punkt der Kurve, dessen Vielfachheit diejenige des Kontinuums ist. Um aber sofort ein Beispiel vorzuführen, das hierin das Äußerste leistet, so weise ich auf eine Bahnkurve hin, bei der *jeder ihrer Punkte vielfacher Punkt von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.* Man kann nämlich alle Punkte eines Würfels eindeutig und stetig auf die Strecke abbilden und wie die Peanosche Kurve in einem Zuge durchlaufen.[3]) Betrachten wir jetzt die Projektion des Kurvenpunktes in der xy-Ebene. Sie bildet das Abbild zweier stetigen Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$, so daß sich in jeden ihrer Punkte *alle* Punkte der zugehörigen z-Koordinate projizieren. Wir müssen also jeden Punkt als vielfachen Punkt der eben genannten Art betrachten.

Es liegt nahe, nach dem notwendigen Vielfachheitscharakter der Punkte der Peanoschen Kurve zu fragen. Die Peanosche und die

1) Vgl. Rend. Palermo 22 (1906) S. 52. Die Bahnkurven sind hiernach auch dann verschieden, wenn sie nur in der Umlaufsrichtung differieren.

2) Ausführlichere Erörterungen gibt O. Janzen in der S. 225 Anm. genannten Dissertation, Königsberg 1907.

3) Dies bemerkt bereits Peano Math. Ann. Bd. 36 (1890) Bd. 159. Vgl. auch Bericht I S. 125.

Hilbertsche Abbildung sind bekanntlich im allgemeinen eineindeutig, ihre vielfachen Punkte erfüllen das Quadrat überalldicht, und zwar gibt es eine überalldichte Teilmenge von ihnen, für die die Abbildung einvierdeutig (Peano) resp. eindreideutig (Hilbert) ist. Man kann auch erreichen, daß die Abbildung in den Punkten, in denen sie nicht eineindeutig ist, teils eindreideutig und teils einzweideutig ist. Ob der notwendige Vielfachheitscharakter dieser Abbildung darin besteht, daß *nur* Doppelpunkte auftreten, muß offen bleiben. Daß die vielfachen Punkte überalldicht liegen, ist bereits eine Folge von der Unmöglichkeit, Strecke und Fläche eineindeutig und stetig aufeinander abzubilden.

Der zufällige Vielfachheitscharakter dieser Abbildung ist, wie das obengenannte Beispiel erkennen läßt, weit höher. Es zeigt, daß die Abbildung in keinem Punkte eineindeutig zu sein braucht, daß es also Peanosche Kurven gibt, die keinen einzigen einfachen Punkt besitzen. Eine fernere Eigenschaft der Peanoschen und Hilbertschen Abbildung ist die, daß jeder das Quadrat durchziehenden Geraden auf der Einheitsstrecke eine nirgendsdichte Menge entspricht.[1]) Auch dies ist keine notwendige Eigenschaft der Abbildung. Man kann z. B. den das Quadrat durchlaufenden Punkt in irgendeiner Stelle seiner Bahn, d. h. also von irgendeinem Punkte des Quadrats aus eine ganz im Innern gelegene Strecke vorwärts und rückwärts durchlaufen lassen, so behält man immer noch eine stetige Bahnkurve; aber der Geraden, die diese Strecke enthält, entspricht dann auf der Einheitsstrecke keine nirgendsdichte Menge.[2])

§ 13. *Die Bogenlänge und die rektifizierbare Kurve.* Die Definition der Bogenlänge, die an die *Bahnkurve* anknüpft, ist folgende. Seien

$$(1) \qquad x = f(t), \quad y = \varphi(t); \quad 0 \leq t \leq 1$$

zwei auf der Einheitsstrecke *eindeutige* Funktionen, die nicht stetig zu sein brauchen, so wollen wir dem üblichen Sprachgebrauch folgend, auch dann noch sagen, daß sie eine *Kurve* oder auch eine Bahnkurve definieren — was zwar von den früheren Festsetzungen abweicht, aber alsbald mit ihnen in Übereinstimmung gebracht werden wird. Den Punkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu$ der Einheitsstrecke mögen die Punkte $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ der Kurve entsprechen. Die Verbindungslinien je zweier

1) Vgl. Bericht I S. 124.

2) In Bericht I S. 125 habe ich die Frage gestellt, ob immer einer im Quadrat enthaltenen Geraden eine nirgendsdichte Menge der Einheitsstrecke entsprechen müsse. Diese Frage ist also zu verneinen.

konsekutiven Punkte c_i und c_{i+1} bestimmen einen Streckenzug P, der eine Länge L hat.[1]) Läßt man nun die Punkte $\{t_i\}$ auf der Einheitsstrecke überalldicht werden, so wird die Menge $\{L\}$, die allen diesen Streckenzügen entspricht, einen *oberen Grenzwert* $\mathfrak{L}$ haben.[2]) Ihn bezeichnen wir, falls er *endlich* ist, als *Bogenlänge* der Kurve und nennen die Kurve im Intervalle $0 \ldots 1$ *rektifizierbar.*[3]) Analytisch stellt sich also die Bogenlänge $\mathfrak{L}$ durch die Formel

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Lim} \sum \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

dar.

In dieser allgemeinsten Form findet sich die Definition bei Lebesgue[4]). Sie weicht von den Definitionen, die Jordan[5]) und Scheeffer[6]) gegeben hatten, etwas ab; diese verlangten nämlich, daß die Längen L der Polygone P gegen einen *festen* Grenzwert konvergieren, der *unabhängig* davon ist, in welcher Art man die Teilpunkte t_i auf der Einheitsstrecke wählt und überalldicht werden läßt. Dies wird bei Lebesgue nicht verlangt; es wird sich alsbald zeigen, welche geometrische Bedeutung es hat. Scheeffer hat übrigens nur Kurven der Form $y = f(x)$ in Betracht gezogen.[7])

Ist die Bahnkurve im besonderen *stetig*, so ist diese Unabhängigkeit eine Folge der Stetigkeit,[8]) was ebenso wie beim Integralbegriff bewiesen werden kann. Von der stetigen Kurve zeigt man auch leicht, daß die Bogenlänge eine stetige Funktion von t ist.[9])

Wird aber der Begriff der Bahnkurve auch auf ein *unstetiges* Funktionenpaar (1) ausgedehnt, so haben wir folgende allgemeinste Definition der Bogenlänge:

---

1) Die Strecken können auch teilweise oder ganz zusammenfallen; jede ist naturgemäß für sich zu betrachten.

2) Die Benutzung der oberen Grenze statt eines eigentlichen Limes tritt wohl zuerst bei G. Peano auf; Rend. Lincei (4) 6, 1, (1890) S. 54.

3) Man sieht leicht, daß die Bogenlänge nicht kleiner ist, als die Länge irgendeines der Streckenzüge.

4) Die in diesem Begriff enthaltenen Grundeigenschaften und ihre axiomatische Bedeutung erörtert Lebesgue eingehend in seiner These, Paris 1902, und Ann. di mat. (3) 7, S. 282. Dort operiert er übrigens mit Streckenzügen, die irgendwie gegen die Kurve approximieren.

5) C. R. 92 (1881) S. 228 und Cours d'analyse Bd. III (1887) S. 594.

6) Acta math. 5 (1884) S. 49.

7) Vgl. auch die eingehenden Erörterungen von E. Study, Math. Ann. 47 (1896) S. 298.

8) Vgl. die Beweise bei Scheeffer und Lebesgue a. a. O. S. 54.

9) Sie ist stets eine unterhalb stetige Funktion im Sinne von R. Baire; Bericht I, S. 141.

XI. *Der durch die geschränkten und eindeutigen Funktionen*

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t) \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

definierten Bahnkurve kommt eine endliche Bogenlänge dann und nur dann zu, wenn die Länge L des Polygonzuges, der den ν Werten $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu < 1$ *entspricht, falls diese Werte die Einheitsstrecke allmählich überalldicht erfüllen, einen* **endlichen** *oberen Grenzwert besitzt. Dieser Grenzwert stellt die Bogenlänge dar. Die Bahnkurve heißt rektifizierbar.*

Eine unmittelbare Folge dieser Definition ist die, daß eine für die Einheitsstrecke rektifizierbare Bahnkurve auch für jedes Teilintervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ rektifizierbar ist. Umgekehrt ist die Rektifizierbarkeit auch für das Gesamtintervall vorhanden, wenn sie bei dessen Zerlegung in eine *endliche* Zahl von Teilintervallen für jedes Teilintervall vorhanden ist. Wird das Gesamtintervall in eine *unendliche* Menge von Teilintervallen zerlegt, so gilt dasselbe, vorausgesetzt, daß die Endpunkte nebst ihren Grenzpunkten eine *abzählbare* Menge bilden[1]), und daß die Summe aller ihnen entsprechenden Bogenlängen selbst endlich ist.[2])

Endlich erwähne ich noch die *allgemeinste* Definition, die Lebesgue aufgestellt hat.[3]) Er nimmt die approximierenden Polygonzüge so an, daß ihre Ecken nicht notwendig auf die Kurve fallen. Er geht nämlich von einem durch zwei Gleichungen

$$(2) \qquad x = f_\nu(t), \quad y = \varphi_\nu(t)$$

definierten Polygonzug P_ν aus und läßt f_ν und φ_ν gleichmäßig gegen f und φ konvergieren. Ist L_ν die Länge von P_ν, so werden die Längen $\{L_\nu\}$ für jede einzelne durch Gleichungen der Form (2) definierte Folge von Funktionen eine obere Grenze L besitzen. Diese kann naturgemäß unendlich sein. Die *untere* Grenze $\mathfrak{L}$ aller sich so einstellenden Werte $\{L\}$ definiert er als Bogenlänge.[4])

Ein ganz anderes Resultat ergibt sich, wenn man die Bogenlänge im unmittelbaren Anschluß an die *Punktmenge* definiert. Um hier zu einem exakten Begriff zu gelangen, der dem vorstehenden möglichst analog ist, wird man der Punktmenge zunächst ebenfalls einen Polygonzug einschreiben und den Grenzwert L betrachten, dem sich seine Länge

1) Bilden sie eine nicht abzählbare Menge, so gilt das obige nicht; vgl. die Beispiele.

2) Der Beweis ist einfach. Man vgl. z. B. Scheeffer, a. a. O. S. 70 und Lebesgue, Leçons S. 54.

3) In seiner These, S. 54, sowie Ann. di mat. (3) 7 (1902) S. 285.

4) Diese Definition umfaßt die obige.

nähert, wenn seine Ecken allmählich überalldicht auf der Punktmenge werden. Analog zu der ebenerwähnten allgemeinsten Definition, die Lebesgue in seiner These ausgesprochen hat, wird man dann wieder die *untere* Grenze aller Werte $\{L\}$ als Bogenlänge einführen. In der Tat stellt diese Definition, sobald man die Grundlage der analytischen Darstellung verläßt, nur eine Eigenschaft der Punktmenge dar. Denn mit dem Übergang zur *unteren* Grenze aller Werte $\{L\}$ wird in diesem Fall stillschweigend der Übergang zur Punktmenge vollzogen (vgl. auch § 18).

Für die so definierte Bogenlänge der Punktmenge kommt dann im Sinne des vorigen Paragraphen nur ihr notwendiger Vielfachheitscharakter in Betracht, während in die Bahnkurve auch der zufällige eingeht. Es genüge, einige Beispiele zu erwähnen; setzt man $x = y = \sin 1/t$ so ist die Punktmenge eine endliche Strecke, während die Bogenlänge der Bahnkurve unendlich ist.[1]) Das Gleiche läßt sich auch durch *stetige* Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ erreichen. Wenn in dem ersten Beispiel von § 12 die gegen den Punkt a konvergierende Punktmenge $\{p_\nu\}$ so angenommen wird, daß $\sum \overline{ap_\nu}$ divergiert, so hat die Bahnkurve keine endliche Bogenlänge, während der Punktmenge selbst wieder eine zukommt.

Man mag geneigt sein, diesen Begriff der Bogenlänge für unzweckmäßig oder entbehrlich zu betrachten. Wie dem auch sei, so mußte doch im Interesse der Klarheit auf ihn hingewiesen werden. Außerdem ist er auch in der Literatur vorhanden. *Ihm entspricht jede Definition, die nicht an die analytische Darstellung anschließt,* wie z. B. die von Minkowski aufgestellte, die von ihm freilich nur auf einfache konvexe Kurven angewendet wird.[2]) Ihm entspricht ferner die von Peano aufgestellte Definition.[3]) Sie dürfte jedoch ebenfalls nur im Hinblick auf einfachere Kurventypen ausgesprochen sein, wenngleich der in ihr auftretende Kurvenbegriff einer Beschränkung nicht unterliegt.

Ich lasse nun einige Beispiele folgen, insbesondere auch solche, die den Unterschied der Jordan-Scheefferschen und der Lebesgueschen Definition erkennen lassen.

1. Es ist wahrscheinlich, daß sich die Scheefferschen Ideen wesent-

---

1) Andere Beispiele gibt Janzen in seiner Dissertation. Vgl. S. 225. Anm.

2) Vgl. S. 93 Anm. 1. Im Anschluß an Minkowski hat H. W. Young in allgemeinerer Weise den *linearen* Inhalt einer kurvenhaften Punktmenge allgemeinster Art definiert. Doch beruhen diese Definitionen auf Festsetzungen, die dem hier vorliegenden Begriff der Bogenlänge fremd sind, und können deshalb an dieser Stelle außer Betracht bleiben. Man vgl. S. 93 Anm. 2.

3) Rend. Linc. (4) 6, 1 (1890) S. 54.

lich im Anschluß an die *monotonen*[1]) streckenweise konstanten Funktionen ausgebildet haben; jedenfalls gibt er viele Beispiele dieser Art. Andrerseits bilden diese Funktionen eine einfachste, sogar der Anschauung zugängliche Gattung von Funktionen mit Bogenlänge, für die die Integraldefinition versagt (§ 16). Wird auf dem Intervall $x_0 \ldots X$ eine Intervallmenge $\{\delta_\nu\}$ so angeordnet, daß sie durch ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte eine perfekte Menge T bestimmt, und nimmt man für jedes δ_ν den Wert y_ν der Ordinate in der Weise konstant an, daß eine monoton wachsende stetige Funktion entsteht[2]), so ist, wie leicht ersichtlich,

$$(2) \qquad \lim \sum \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = X - x_0 + Y - y_0 .$$

2. Augenscheinlich erhält man den gleichen Grenzwert, wenn man sich bei der Auswahl der Punkte x_i auf die Menge T beschränkt. Dies hat eine wichtige Folgerung. Vertauscht man nämlich jetzt die x- und y-Achse, so *kann dieser formale Prozeß die geometrische Eigenschaft der Rektifizierbarkeit und den Wert der Bogenlänge nicht ändern;* man erhält also in der inversen Funktion $x = \varphi(y)$ ein Beispiel einer rektifizierbaren *unstetigen* Funktion, die unendlich viele überalldicht liegende Sprungstellen besitzt. Um diese Funktion $\varphi(y)$ zu einer *eindeutigen* zu machen, hat man nur noch ihren Wert an einer Sprungstelle so anzunehmen, daß er der Sprungstrecke angehört, da sich sonst die Bogenlänge ändern würde.

3. Bildet man im Anschluß an Riemann eine Funktion $f(x)$ für die Einheitsstrecke, so daß

$$f\left(\frac{2\lambda+1}{2^\nu}\right) = \frac{1}{2^{2\nu}}, \quad \text{sonst } f(x) = 0 \text{[3])}$$

ist, so hat diese Kurve gemäß der Lebesgueschen Definition eine Bogenlänge, und es ist

$$\mathfrak{L} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu-1}}{2^{2\nu}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2,$$

während ihr nach der Jordan-Scheefferschen Definition eine Bogenlänge nicht zukommt. Denn man kann die Teilpunkte x_i der Streckenzüge offenbar so wählen, daß sie sämtlich in irrationale Punkte fallen, und die Längen dieser Streckenzüge liefern 1 als gemeinsamen Wert, also auch als Grenzwert. Ähnlich ist es mit dem mit Stacheln be-

1) Darunter verstehe ich immer niemals abnehmende oder niemals wachsende Funktionen.

2) Über diese Funktionen und ihre Eigenschaften vgl. Bericht I, S. 166ff.

3) Es ist also auch $f(1) = 0$.

setzten Quadrat, wenn man der Länge der Stacheln die vorstehend angegebenen Werte gibt.

4. Von stetigen Kurven der Form $y = f(x)$ sind besonders auch diejenigen von Interesse, deren Maxima und Minima überalldicht liegen; man kann sie leicht so einrichten, daß sie eine endliche Bogenlänge haben oder entbehren.[1]) Ich gehe dazu von den Formeln aus, die ich im ersten Teil des Berichts benutzt habe.[2]) Zuvor beachte man, daß

$$(3)\quad |y_{i+1} - y_i| < \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} < x_{i+1} - x_i + |y_{i+1} - y_i|$$

ist, und daß deshalb für die Existenz einer endlichen Bogenlänge nur der Grenzwert von $\sum |y_{i+1} - y_i|$ in Frage kommt. Man darf daher die Polygonzüge insbesondere auch so wählen, daß die Endpunkte ihrer Strecken in die Maxima und Minima fallen, und kann jeden neuen Polygonzug so entstehen lassen, daß man zwischen je ein bereits vorhandenes Maximum und Minimum zwei neue einschaltet. Mit Benutzung der im Bericht a. a. O. benutzten Bezeichnung hat man dann

$$t_{N0} + |t_{N1}| + t_{N2} = t_N(1 + \varphi_{N0} + \varphi_{N2}); \quad \varphi_{N0} > 0,\ \varphi_{N2} > 0,$$

woraus sofort

$$\lim \sum |y_{i+1} - y_i| = (X - x_0) \prod_0^\infty (1 + \varphi_{N0} + \varphi_{N2})$$

folgt. Je nachdem also das unendliche Produkt konvergiert oder divergiert, erhält man eine Kurve mit endlicher oder unendlicher Bogenlänge.

5. Im Anschluß hieran kann man auch stetige streckenweise konstante Funktionen in der Weise bestimmen, daß sie eine endliche Bogenlänge nicht besitzen. Sei $\{\delta\}$ die zugehörige Intervallmenge, so zerlege man die durch sie bestimmte perfekte Menge $T\{\xi\}$ in die Bestandteile

$$\{\xi\} = \{\xi_r\} + \{\xi_g\},$$

wo $\{\xi_r\}$ die Endpunkte der Intervalle darstellt, und setze die Menge aller Werte des Intervalls $x_0 \ldots X$ in die Form

$$\{x\} = \{x_\nu\} + \{x_g\},$$

so daß $\{x_\nu\}$ die Maxima und Minima darstellt. Ist nun $y = f(x)$ eine der eben betrachteten Funktionen, so ordne man die Intervalle $\{\delta_\nu\}$ den

1) Ein Beispiel dieser Art gibt auch L. Scheeffer, a. a. O. S. 73. Von Kurven, die unendlich viele Maxima und Minima mit einem einzigen Verdichtungspunkt haben, hat $y = x \sin {}^1\!/x$ keine Bogenlänge, dagegen hat schon $y = x^2 \sin ({}^1\!/x)^{4:3}$ eine solche; vgl. Lebesgue, Leçons, S. 56. Dort werden auch Beispiele stetiger Kurven mit Bogenlänge gegeben, deren Maxima und Minima überalldicht liegen.

2) Vgl. S. 161 ff.

Punkten $\{x_\nu\}$ unter Erhaltung der Anordnung zu, und jedem Grenzpunkt x_ϱ, der Grenzpunkt gewisser Werte x_ν ist, den Grenzpunkt ξ_ϱ der entsprechenden Intervalle δ_ν. Bestimmt man nun eine Funktion $\varphi(x)$ durch die Vorschrift

$$\varphi(\delta_\nu) = f(x_\nu), \quad \varphi(\xi_\varrho) = f(x_\varrho),$$

wo $\varphi(\delta_\nu)$ den konstanten Wert von $\varphi(x)$ auf dem Intervall δ_ν darstellen soll, so hat $\varphi(x)$ eine Bogenlänge oder nicht, je nachdem es für $f(x)$ der Fall ist.[1])

6. Die obenerwähnte allgemeine Definition von Lebesgue, die sich auf gleichmäßig konvergente Polygonzüge stützt, bezieht sich infolgedessen nur auf *stetige Bahnkurven* im Sinn von § 12. Zu ihnen zählt aber auch die im dritten Beispiel betrachtete Riemannsche Funktion. Sie ist als Funktion *einer* Variablen punktweise *unstetig*, doch kommt ihr eine Bogenlänge auch gemäß der Definition XI zu. Beide Definitionen sind also, wie nötig, in Übereinstimmung. Ich komme hierauf in § 14 zurück, hielt es aber für zweckmäßig, schon hier darauf hinzuweisen; man wird auch erwarten dürfen, daß der gestaltliche Charakter der rektifizierbaren Bahnkurven für beide Definitionen der gleiche sein muß.

Wird die Bahnkurve durch ein Funktionenpaar $f(t)$ und $\varphi(t)$ dargestellt, so kann es eintreten, daß beide Funktionen für ein und dasselbe Intervall $t' \ldots t''$ einen konstanten Wert haben. Dann entspricht diesem Intervall nur *ein einziger* Punkt der Bahnkurve. Dieser Umstand stört jedoch die oben aufgestellte Definition der Bogenlänge nicht. Wir brauchen ihn auch nicht auszuschließen, wenn wir jetzt dazu übergehen, die analytischen Eigenschaften der Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ in Betracht zu ziehen, von denen die Existenz einer Bogenlänge abhängt.

§ 14. *Funktionen geschränkter Schwankung.* Sei $y = f(x)$ eine im Intervall $x_0 \ldots X$ eindeutige und geschränkte Funktion, so wird sie gemäß folgender Definition eine Funktion geschränkter Schwankung genannt.

XII. *Teilt man das Intervall $x_0 \ldots X$ durch die Teilpunkte $x_0 < x_1 \cdots < x_{\nu-1} < X$ in ν Teile δ_i, und hat für jedes Intervall δ_i die zugehörige Schwankung der Funktion*[2]) *$y = f(x)$ den Wert Δ_i, ist ferner $s = \Delta_0 + \Delta_1 \cdots + \Delta_\nu$, so heißt die Funktion von geschränkter Schwankung,*

---

1) Man sieht auch leicht, daß die Bogenlänge von $\varphi(x)$ um $\Sigma\,\delta_\nu$ größer ist, als die von $f(x)$.

2) Dies ist die Differenz zwischen der oberen und unteren Grenze aller Funktionswerte in diesem Intervall.

falls der obere Grenzwert der Wertmenge $\{s\}$, der sich für überalldicht werdende Teilpunkte $\{x_i\}$ einstellt, endlich ist.

Zu diesem Funktionsbegriff kommt man auch auf folgendem Wege, der hier zweckmäßiger ist. Man teile das Intervall $x_0 \dots X$ wieder in ν Teile δ_i durch die Teilpunkte x_i und setze

$$(1) \qquad v = |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \cdots + |Y - y_{\nu-1}| = \sum \delta y_i,$$

so daß δy_i der absolute Wert von $y_{i+1} - y_i$ ist. Wird nun jedes Intervall δ_i immer wieder in Teilintervalle geteilt, bis die Teilpunkte überalldicht liegen, und jedesmal die Summe der absoluten Werte der Differenzen der zugehörigen Funktionswerte gebildet, so gibt es für die Menge $\{v\}$, die allen diesen möglichen Teilungen entspricht, einen *oberen Grenzwert* V.[1]) Er soll die *Gesamtänderung* der Funktion im Intervall $x_0 \dots X$ heißen. Ist er endlich, so hat die Funktion $f(x)$ eine *geschränkte* Gesamtänderung im Intervall $x_0 \dots X$.[2])

Dies ist die Definition von Lebesgue. Jordan, auf den die vorstehenden Begriffsbestimmungen zurückgehen[3]), hat die Definition enger gefaßt; er verlangt, daß sich für die Größen $\{v\}$ ein *einziger fester* Grenzwert einstellt, in welcher Weise man auch die Teilpunkte x_i überalldicht werden läßt, was für die stetigen Funktionen wiederum von selbst erfüllt ist. Diese Verschiedenheit ist ganz analog zu derjenigen, die wir für die Bogenlänge erwähnten. Für beide Definitionen folgt nun leicht, daß auch die Summe

$$s = \varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_n = \sum \varDelta_i,$$

in der $\varDelta_i$ wieder die dem Intervall δ_i zukommende *Funktionsschwankung* bedeutet, die Eigenschaft hat, daß die Menge aller Werte $\{s\}$, wenn man die Teilpunkte beliebig sich verdichten läßt, den obersten Grenzwert V hat. Ebenso ist das umgekehrte der Fall. Die Funktionen mit endlichem Wert von V sind daher identisch mit den *Funktionen geschränkter Schwankung.*

Sowohl für den Lebesgueschen wie für den Jordanschen Begriff der Bogenlänge und der Funktionen geschränkter Schrankung besteht nun der folgende Satz:

XIII. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei geschränkte Funktionen $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ eine Bahnkurve mit Bogen-*

---

1) Da die Größe v bei fortgesetzter Teilung niemals abnimmt, so ist kein v größer als V.

2) Man kann auch hier, wie für die Definition der Bogenlänge, das Gesamtintervall so in unendlich viele Teilintervalle zerlegen, daß die zugehörige abgeschlossene Punktmenge abzählbar ist. Vgl. auch S. 241 Anm. 1.

3) Vgl. C. R. 92 (1881) S. 228.

länge bestimmen, besteht darin, daß $f(t)$ und $\varphi(t)$ Funktionen geschränkter Schwankung sind.

Sind nämlich t' und t'' zwei Werte von t, c' und c'' die zugehörigen Kurvenpunkte, ist σ die sie verbindende Sehne und sind

$$|x'' - x'| = \sigma_x, \quad |y'' - y'| = \sigma_y$$

ihre Projektionen auf den Achsen, so ist

$$\sigma_x \leqq \sigma \leqq \sigma_x + \sigma_y, \quad \sigma_y \leqq \sigma \leqq \sigma_x + \sigma_y. \tag{2}$$

Betrachten wir nun wieder den durch die Teilpunkte $t_1, t_2 \ldots t_{\nu-1}$ bestimmten Streckenzug, und sind $(x_0 y_0)$ und (XY) die Punkte, die den Werten $t = 0$ und $t = 1$ entsprechen, so folgt

$$\begin{aligned} \sum \sigma_x' &= |x_1 - x_0| + \cdots + |X - x_{\nu-1}| = v_x, \\ \sum \sigma_y' &= |y_1 - y_0| + \cdots + |Y - y_{\nu-1}| = v_y, \end{aligned} \tag{3}$$

so daß v_x und v_y die zu den Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ zugehörigen Werte von v bedeuten. Die durch die Relationen (2) und (3) zwischen den Mengen $\{\sigma\}$, $\{v_x\}$ und $\{v_y\}$ begründete Beziehung läßt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar erkennen Denn wenn $\{\sigma\}$ eine geschränkte Menge ist, muß es diesen Relationen gemäß auch $\{v_x\}$ und $\{v_y\}$ sein, und wenn beide es sind, ist es auch $\{\sigma\}$.

Die Funktionen geschränkter Schwankung haben eine wichtige analytische Eigenschaft, die ebenfalls von Jordan gefunden wurde. Wir gehen zur Gleichung (1) zurück und bezeichnen die Summe der positiven Differenzen $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ durch p, die Summe der absoluten Beträge der negativen durch n, so ergibt sich

$$v = p + n; \quad f(X) - f(x_0) = p - n,$$

woraus weiter folgt

$$f(X) = f(x_0) + p - n.$$

Geht man nun wieder zu neuen Teilpunkten über, so bestehen jedesmal analoge Gleichungen; diese bleiben also auch beim Übergang zur oberen Grenze richtig; andrerseits ist mit dem Grenzwert von v auch derjenige von p und n endlich und umgekehrt. Sind V, P, N die bezüglichen Grenzwerte, so hat man daher

$$f(X) = f(x_0) + P - N; \quad V = P + N.$$

Da aber X ein beliebiger Wert ist, so besteht eine analoge Gleichung auch für jedes Teilintervall $x_0 \ldots x$ von $x_0 \ldots X$, d. h. P, N, V sind eindeutige Funktionen von x, und man hat

$$f(x) = f(x_0) + P(x) - N(x),$$

wo nun $P(x)$ und $N(x)$ eindeutige monoton zunehmende Funktionen von x sind. Also folgt

XIV. *Jede Funktion geschränkter Schwankung kann als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden.*

Ist insbesondere $f(x)$ eine *stetige* Funktion von x, so sind, wie man leicht beweist, auch $P(x)$ und $N(x)$ stetige Funktionen von x und umgekehrt.[1])

Aus den vorstehenden Definitionen und Sätzen ergeben sich verschiedene gestaltliche Folgerungen für die rektifizierbare Bahnkurve, die ich jedoch zunächst nur für den engeren Jordan-Scheefferschen Begriff der Rektifizierbarkeit ableiten will.

1) Aus der Definition XI folgt unmittelbar, daß die Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ keine Unstetigkeit zweiter Art besitzen können. 2) Sie können auch keine hebbare Unstetigkeit besitzen, was unmittelbar daraus folgt, daß der Grenzwert von v von der Art der Teilpunkte unabhängig sein soll.[2]) 3) Sie weisen daher nur eigentliche Sprünge als Unstetigkeiten auf; doch darf mit einem Sprung nicht auch noch ein äußerer Sprung verbunden sein[3]); was sich ebenso erkennen läßt, wie die vorstehende Folgerung. 4) Die Zahl der Sprünge muß endlich oder abzählbar sein; auch muß die Summe aller positiven und aller negativen Sprünge für sich endlich sein. 5) An jeder Sprungstelle geht die ganze Sprungstrecke und nur diese in die bezüglichen Projektionen der Bogenlänge als Bestandteil ein.

Es ist daher nur naturgemäß, wenn *wir die Sprungstrecken zu den Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ gestaltlich hinzurechnen.* Damit wird die *ursprünglich zusammenhangslose* Punktmenge, die den unstetigen Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ entspricht, in eine *zusammenhängende* Menge umgeformt, und der im Beginn von § 13 nur formal eingeführte Kurvenbegriff legalisiert. Es zeigt sich sogar, daß *die Unstetigkeit der so definierten geometrischen Bahnkurve sowie auch der zugehörigen Punktmenge nur an der besonderen analytischen Darstellung haftet.* Wählt man statt t die Bogenlänge s als unabhängige Variable, so läßt sich die Kurve stets durch zwei stetige Funktionen von s darstellen.

1) Weitere Eigenschaften der Funktionen geschränkter Schwankung gibt Lebesgue in den Leçons sur l'Intégration p. 49 ff. Man bemerke noch, daß die Funktionen $P(x)$ und $N(x)$ durch die obige Ableitung *ein*deutig bestimmt sind; sie können aber um jede beliebige monotone Funktion vermehrt werden.

2) Man vgl. auch das oben in § 13 behandelte dritte Beispiel.

3) Damit ist gemeint, daß der Funktionswert an der Sprungstelle t der Sprungstrecke angehören muß, also dem durch $f(t-0)$ und $f(t+0)$ bestimmten Intervall. Vgl. auch Bericht I S. 133.

Gehen wir endlich zu den Lebesgueschen Definitionen über, so tritt nur die eine Änderung ein, daß hebbare Unstetigkeiten und äußere Sprünge nicht mehr ausgeschlossen werden. In der Tat werden sie, wie das dritte Beispiel von § 13 zeigt, von dem allgemeineren Begriff der Rektifizierbarkeit umfaßt. *Man hat jetzt auch die hebbaren Unstetigkeitsstrecken und die äußeren Sprungstrecken gestaltlich zur geometrischen Kurve hinzuzufügen*, analog wie die Stacheln des oben benutzten Quadrats; jede solche Unstetigkeitsstrecke geht im allgemeinen mit ihrer doppelten Länge in die Bogenlänge ein.[1])

Die obigen Sätze modifizieren sich dadurch so, daß der Satz 3) wegfällt, und die Sätze 4) und 5) für *alle* möglicherweise vorhandenen Sprünge Geltung haben. Man kann dies auch so ausdrücken, daß die zu jeder unstetigen Funktion zugehörige Funktion der Sprünge selbst eine Funktion beschränkter Schwankung sein muß. Alle diese Tatsachen ergeben sich fast unmittelbar als Folge der benutzten Begriffe.[2])

§ 15. *Beziehungen der Bogenlänge zu den Ableitungen.* Die vier Derivierten einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x bezeichne ich mit Scheeffer als vordere obere, vordere untere, hintere obere und hintere untere Ableitung; dann gelten nach ihm folgende Sätze[3]):

1) Sei $y = f(x)$ eine stetige Kurve, und seien g und g' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist $(g \geqq g')$. Wenn dann die beiden vorderen (oder hinteren) Ableitungen für alle *inneren* Punkte eines Intervalls $x_0 \ldots X$ dem Intervall $g' \ldots g$ mit Einschluß seiner Endpunkte angehören, so hat die Kurve im Intervall $x_0 \ldots X$ eine endliche Bogenlänge.

2) Sei $y = f(x)$ eine geschränkte Funktion, die nicht stetig zu sein braucht, und seien wieder g und g' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist. Wenn dann alle vier Ableitungen an allen *inneren* Punkten des Intervalls $x_0 \ldots X$ dem Intervall $g' \ldots g$ mit Einschluß der Endpunkte angehören, so hat die Kurve im Intervall $x_0 \ldots X$ eine endliche Bogenlänge.

Ein Beispiel für den ersten Satz liefert zunächst jede monoton wachsende streckenweise konstante Funktion; für sie ist $g' = 0$ und $g = \infty$. Ein anderes Beispiel ist die von Scheeffer aufgestellte Funktion

$$(1) \qquad f(x) = \sum c_\nu (x - \xi_\nu)^{\frac{1}{3}},$$

1) Vgl. auch die S. 225 erwähnte Dissertation von Janzen.

2) Vgl. auch Lebesgue, Leçons S. 58.

3) a. a. O. S. 62 ff. Dort werden auch obere Grenzen für den Wert der Bogenlänge gegeben.

in der $\{\xi_\nu\}$ die irgendwie geordneten rationalen Punkte des Intervalls $x_0 \cdots X$ sind, die Koeffizienten c_ν positiv sind und überdies so gewählt, daß die Reihe im ganzen Intervall gleichmäßig konvergiert.[1]) Diese Funktion ist dann einerseits stetig, andrerseits wächst sie mit x und die vorderen Derivierten liegen ebenfalls zwischen 0 und ∞.

Ein Beispiel für den zweiten Satz ist folgende ebenfalls von Scheeffer angegebene Funktion. Bezeichnet man mit Riemann durch (x) die Differenz $x - \nu$, wenn ν die nächste ganze Zahl von x ist, und setzt $(x) = 0$, falls x in die Mitte zwischen zwei Zahlen ν und $\nu + 1$ fällt, so stellt

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(\nu x)}{\nu^2}$$

eine Funktion dieser Art dar. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß für $x' > x$

$$(\nu x') - (\nu x) \leqq \nu(x' - x)$$

ist, und daher ist

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq \frac{\pi^2}{6}.$$

Damit liegen alle Ableitungen an jeder Stelle zwischen $-\infty$ und $\frac{1}{6}\pi^2$, und die Kurve hat in der Tat eine Bogenlänge. Wie die Riemannsche der vorstehenden ähnliche Funktion hat auch die Funktion $f(x)$ in jedem Intervall unendlich viele Sprünge und nimmt überdies in jedem Intervall unendlich oft zu und ab.

Ein dritter Satz von Scheeffer knüpft an den Begriff der *Richtungsschwankung* an. Die Richtungsschwankung an der Stelle x ist durch die Differenz $\alpha' - \alpha$ definiert, wenn α' und α die Richtungswinkel sind, die dem größeren Wert der beiden oberen und dem kleineren Wert der beiden unteren Ableitungen entsprechen. Hiervon unterscheidet er die Richtungsschwankung in der Umgebung eines Punktes x. Sie ergibt sich so, daß man zunächst im Intervall $x - h \cdots x + h$, aus dem man aber den Punkt x *ausschließt*, die obere Grenze des eben definierten Winkels α' und die untere Grenze von α ins Auge faßt. Sind diese Grenzen α'_h und α_h, so kann α'_h bei abnehmendem h nicht wachsen und α_h nicht abnehmen, es existiert daher für $\lim h = 0$ je ein Grenzwert β' und β dieser Größen, und es stellt $\beta' - \beta$ die Richtungsschwankung in der Umgebung der

1) Ist $x_0 \cdots x_1$ die Einheitsstrecke und $\xi_\nu = \frac{p}{q}$, so kann man $c_\nu = \frac{1}{(p+q)^3}$ setzen. Der Gedanke, Funktionen dieser Art zu bilden und zu benutzen, stammt von Weierstraß; vgl. Kap. VIII § 3.

Stelle x dar. Aus dieser Definition folgt sofort, daß alle Stellen x, in deren Umgebung die Richtungsschwankung eine bestimmte Größe g übertrifft, eine abgeschlossene Menge bilden. Der Scheeffersche Satz bezieht sich nun auf den Fall, daß diese Menge abzählbar ist, und daß auch die Stellen, in denen die Richtungsschwankung die Zahl g überteigt, eine abzählbare nirgendsdichte Menge bilden, und lautet:

3) Bilden im Intervall $x_0 \cdots X$ die Punkte, in denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung eine Größe $\vartheta < \pi$ übersteigt, eine nirgendsdichte abzählbare Punktmenge Q, und sind $\{\delta_i\}$ die durch die Menge Q bestimmten Intervalle, so hat die stetige Kurve $y = f(x)$ eine Bogenlänge, je nachdem die Summe δy_i, wo δy_i der absolute Wert der Differenz der Funktionswerte in den Endpunkten von δ_i ist, endlich ist oder nicht.[1])

§ 16. *Bogenlänge und Integral.* Die Einsicht, daß die Definition der Bogenlänge durch das Integral nicht allen Fällen gerecht wird, in denen eine Bogenlänge im geometrischen Sinn definiert werden kann, dürfte sich gleichfalls an die streckenweise konstanten stetigen Funktionen angeschlossen haben. Die Grundlage bildet der Harnacksche Satz, daß man einem uneigentlichen Integral auch dann einen bestimmten Wert beizulegen hat, wenn die Punkte, in denen der Unstetigkeitsgrad unendlich groß ist, eine *perfekte* Menge vom Inhalt Null bilden.[2]) Ich benutze sie daher ebenfalls, um den Sachverhalt darzulegen.

Sei also $y = f(x)$ eine stetige streckenweise konstante Funktion, und $D = \{\delta_\nu\}$ die Intervallmenge, die durch ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte die perfekte Menge $\{\xi\} = T$ bestimmt. Wir nehmen insbesondere an, daß die Funktion $f(x)$ eine monoton wachsende Funktion ist. Sei nun $x_0 \ldots X$ das von T erfüllte Intervall, und seien y_0 und Y die zugehörigen Werte von y, so haben wir für die Bogenlänge den Wert (§ 13)

$$s = X - x_0 + Y - y_0.$$

---

1) Der Satz gilt auch für unstetige Funktionen $f(x)$, wenn die Funktion $\psi(x)$ der Sprünge eine Funktion beschränkter Schwankung ist, und die stetige Funktion $\varphi(x)$ den obigen Bedingungen genügt. Ein Beispiel zum obigen Satz bildet nach Scheefer (a. a. O. S. 80) die Funktion $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, wenn man setzt (vgl. das Beispiel zum Satz 2)

$$f_1(x) = \sum c_\nu (x - \xi_\nu)^{\frac{1}{3}} + C; \quad f_2(x) = x \lg \frac{1}{x} \sin \left(\lg \lg \frac{1}{x}\right).$$

2) Math. Ann. 24 (1884) S. 220; vgl. auch Bericht I, S. 186.

Wählt man nun die Punktmenge T insbesondere so, daß sie den Inhalt Null hat, so ist in allen Fällen das Integral

$$\int_{x_0}^{X} dx \sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Denn für jeden *inneren* Punkt eines Intervalls δ_ν ist $y' = 0$, und da die Punkte von T eine inhaltslose Menge bilden, so ist das Integral, welche endlichen oder unendlichen Ableitungswerte den Punkten von T auch entsprechen mögen, nach dem oben erwähnten Harnackschen Satz gleich Null und gibt mithin nicht den Wert der Bogenlänge.

Ist die Menge T nicht inhaltslos, so hat die Bogenlänge immer noch den in Gleichung (1) stehenden Wert, während das Integral (2) seine Bedeutung ganz und gar verliert, sobald die Ableitungswerte für eine in T überalldichte Menge unendlich groß sind.[1])

In dem oben unter (1) enthaltenen Scheefferschen Beispiel einer rektifizierbaren Kurve liegen sogar die Punkte, in denen eine Ableitung positiv unendlich groß ist, überalldicht.

Man wird daher allgemein die Frage stellen, unter welchen Bedingungen die Bogenlänge durch das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + y'^2} \quad \text{resp.} \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{f'^2 + \varphi'^2}$$

dargestellt wird. Naturgemäß hat sie nur dann einen Sinn, wenn die Kurve wirklich rektifizierbar ist, also eine endliche Bogenlänge besitzt. Allgemeinere Sätze hierüber hat, wenn man von den einfacheren Fällen absieht, erst Lebesgue gegeben. Wenn die Ableitungen $f'(t)$ und $\varphi'(t)$ für jeden Wert des Intervalls $t_0 \ldots t_1$ existieren und geschränkte integrierbare Funktionen sind, ist der Beweis, daß die obigen Integrale die Bogenlänge darstellen, nicht schwierig; er folgt fast unmittelbar aus den Mittelwertsätzen. In ähnlicher Weise zeigt man, daß, wenn $f'(t)$ und $\varphi'(t)$ für das ganze Intervall existieren und geschränkt sind, die Bogenlänge zwischen dem oberen und unteren Integral enthalten ist. Endlich kann man auch noch zeigen, daß wenn $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2}$ die Ableitung einer Funktion $s(t)$ ist, die Differenz $s(t_1) - s(t_0)$ auch dann die Bogen länge darstellt, wenn f' und φ' keine geschränkten Funktionen sind.[2])

Tiefergehende Resultate von Lebesgue beruhen auf seinem neuen Integralbegriff. Aus den allgemeinen Sätzen, die in Kap. VIII, § 5

1) Ein Beispiel enthält Bericht I S. 173 Anm. 1.

2) Vgl. Leçons S. 61.

über ihn ausgesprochen sind, kann man folgende Eigenschaften der rektifizierbaren Bahnkurven ableiten[1]):

1) Sind alle Ableitungen der beiden Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ geschränkt, so stellt das Lebesguesche Integral die Bogenlänge dar. 2) Unter denselben Bedingungen besteht im Intervall $t_0 \ldots t_1$ höchstens mit Ausnahme einer Menge $\{t\}$ vom Inhalt Null die Relation

$$s'^2 = f'^2 + \varphi'^2.$$

3) *Jede* rektifizierbare Bahnkurve hat im allgemeinen eine Tangente; für die Punkte, in denen dies nicht der Fall ist, bilden die zugehörigen Werte $\{s\}$ stets eine Menge vom Inhalt Null.[2]) Dies gilt also insbesondere auch für jede streckenweise konstante Funktion, die eine Bogenlänge besitzt, insbesondere also für alle monotonen.[3])

§ 17. *Quadrierbare und nicht quadrierbare einfache geschlossene Kurven.* Die einfachste Art, das Inhaltsproblem für die zu einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ gehörige Fläche $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ zu formulieren, ist die, daß man die Inhaltssätze für Polygone zugrunde legt und die Kurve von außen und innen durch Polygone approximiert.[4]) Dies geschieht in Über-

1) Leçons, S. 125. Der im folgenden auftretende Inhaltsbegriff ist der von Kap. III, § 5.

2) Hier ist also s die unabhängige Variable.

3) Vgl. hierzu die Sätze über die Ableitungswerte dieser Funktionen im Bericht I, S. 168. Lebesgue folgert aus dem Satz (3) noch, daß auch für *jede* Funktion $f(x)$ geschränkter Schwankung die Werte $\{x\}$, für die sie keine eigentliche Tangente hat, nur eine Menge vom Inhalt Null bilden können.

4) Nähere, die axiomatischen Grundlagen betreffende Erörterungen gibt Lebesgue in seiner These, S. 15; vgl. auch die Leçons sur l'intégration S. 98 ff. sowie oben Kap. III, § 5.

Er formuliert dort das Problem des Flächeninhalts analog zu seiner axiomatischen Behandlung des allgemeinen Inhaltsbegriffs (S. 87) folgendermaßen: Die Aufgabe, jeder Fläche eine Flächenzahl beizulegen, muß so gelöst werden, daß einer Fläche $\mathfrak{F}$, die Summe zweier Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist, die Summe ihrer Flächenzahlen zukommt. Er zeigt dann noch, daß dies Problem für die nicht quadrierbaren Flächen nicht lösbar ist; These S. 17 und Bull. Soc. Math. 31 (1903) S. 197, wo die in der These gegebene Behandlung richtig gestellt wird.

Die zuletztgenannten Untersuchungen beziehen sich übrigens nur auf solche Flächen, die von *einfachen* Kurven begrenzt werden. Es wird nämlich angenommen, daß, wenn $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ einen Kurvenbogen C gemein haben, man um einen Punkt c von C einen Kreis stets so legen kann, daß er nur Punkte von C enthält. Dies braucht aber für die allgemeinste geschlossene Kurve nicht zuzutreffen. Beispiele, die dies zeigen, lassen sich sogar mit quadrierbaren Flächenstücken bilden; es genügt das in Kap. IV § 10 durch Figur 10 (S. 120) dargestellte zu wählen und in C das Stück der y-Achse eingehen zu lassen. Lebesgue betrachtet dann

einstimmung mit der im Bericht I (S. 92) enthaltenen allgemeinen Definition. Wir denken uns dazu die Kurve in einem geschränkten Bereich z. B. einem Quadrat Q gelegen. Seien $\mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{Q}_\nu$ zwei Polygone, die in $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ gegen die Kurve approximieren, so bestimmt $\mathfrak{Q}_\nu$ mit $\mathfrak{P}_\nu$ ein Ringgebiet $\mathfrak{R}_\nu$, das $\mathfrak{C}$ enthält, und mit Q ein Ringgebiet R_ν, und man hat

$$(1) \qquad \mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu) + \mathfrak{J}(\mathfrak{R}_\nu) + \mathfrak{J}(R_\nu) = \mathfrak{J}(Q).$$

Von den Größen

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{P}_\nu) = \mathfrak{J}_\nu, \quad \mathfrak{J}(R_\nu) = F_\nu, \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{R}_\nu) = \Phi_\nu$$

nehmen die ersten beiden mit ν zu, während die letzte mit ν abnimmt; sind daher $\mathfrak{J}$, F, Φ ihre Grenzwerte, so hat man auch

$$(2) \qquad \mathfrak{J} + F + \Phi = \mathfrak{J}(Q),$$

und es ist $\mathfrak{J} + F$ der Grenzwert von $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q}_\nu)$. Dann stellt $\mathfrak{J}$ den inneren und $\mathfrak{J} + \Phi$ den äußeren Inhalt der Kurvenfläche $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ dar. Ist $\Phi = 0$, so stimmen äußerer und innerer Inhalt überein, und man kann im Anschluß an Jordan die Kurve $\mathfrak{C}$ *quadrierbar* nennen. Ist $\Phi > 0$, so heiße sie *nicht quadrierbar*. Man hat dann auch der Kurve $\mathfrak{C}$ selbst den Flächeninhalt Φ beizulegen. Daß man statt der Polygone $\mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{Q}_\nu$ auch andere approximierende Kurven benutzen kann, deren Flächeninhalt man beherrscht, ist klar; insbesondere kann man auch mit solchen Polygonen operieren, deren Umfänge Punkte der Kurve enthalten, vorausgesetzt, daß die Polygone ganz der Kurvenfläche an-

---

ausführlicher die Lage, die $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ zueinander haben können. Bei der Beschränkung auf einfache Kurven ist diese Lage übrigens eine invariante Eigenschaft, und daher die gleiche, wie für polygonale Flächen.

In seiner These (S. 16) hat er das Problem des Flächeninhalts auch so formuliert, daß die Eigenschaft, *Fläche der Summe gleich Summe der Flächen* auch bei der Zerlegung in *unendlich viele* Bestandteile bestehen bleiben soll. In dieser allgemeinen Form ist die Formulierung freilich nicht statthaft. Denn bei der Zerfällung in unendlich viele Bestandteile kommt der Satz V von Kap. IV in Betracht, und das in ihn eingehende Grenzgebilde $\mathfrak{T}_\omega$ kann die Gleichheit der Summe aller Flächen mit der Gesamtfläche illusorisch machen. Wird über jedem Intervall δ_ν einer Intervallmenge $\{\delta_\nu\}$, die eine perfekte mit Inhalt behaftete Menge T bestimmt, ein Rechteck R_ν konstanter Höhe h errichtet, so bilden alle Rechtecke $\{R_\nu\}$ zusammen mit ihrem Grenzgebilde ein einziges Rechteck R, ohne daß die Gleichheit der Inhalte für R und ΣR_ν vorhanden ist. Dem analogen Umstand habe ich oben S. 241 bei der Definition der Bogenlänge durch die Vorschrift Rechnung getragen, daß die von den Endpunkten der Intervalle bestimmte abgeschlossene Menge *abzählbar* sein soll. Er muß also, wenn man die Zerlegung in unendlich viele Bestandteile zulassen will, auch hier berücksichtigt werden. Übrigens dürfte auch Lebesgue die obige Formulierung nur in diesem Sinn gemeint haben; vgl. S. 323 Anm. 1.

gehören.[1]) Es leuchtet ein, daß der Quadrierbarkeitsbegriff nur die *Punktmenge* als solche betrifft.[2])

Besonderes Interesse haftet dem Problem der Quadrierbarkeit für *einfache* geschlossene Kurven an. Einen ersten präzisen Satz hierüber gab Jordan[3]). Er lautet:

XV. *Jede einfache rektifizierbare Kurve ist quadrierbar.*

Ist nämlich s die Bogenlänge der Kurve, so teile man sie in ν Teile gleicher Länge s/ν. Je zwei Punkte jedes Teilbogens haben dann ebenfalls höchstens die Entfernung s/ν, und falls man um jeden Teilpunkt ein Quadrat mit der Seite $2s/\nu$ legt, so liegen alle Bogen ganz innerhalb dieser Quadrate, während ihre Gesamtfläche kleiner als $4s^2/\nu$ ist, also mit wachsendem ν gegen Null konvergiert.

Eine nicht quadrierbare Kurve kann daher nur eine Kurve ohne endliche Bogenlänge sein.[4]) Beispiele einfacher derartiger Kurven wurden zuerst von Osgood[5]) und Lebesgue[6]) mitgeteilt. Beide schließen an die Abbildung des Quadrats auf die Strecke an und folgen dem in Bericht I (S. 121) dargestellten geometrischen Verfahren, das zur Peanoschen Abbildung führt, mit dem geringen Unterschied, daß Osgood direkt vom Quadrat ausgeht, während Lebesgue an dessen Stelle einen Teil eines Kreisringes setzt. Die sehr einfache und glückliche Idee, die zum Ziele führt, besteht darin, dies Verfahren so abzuändern, daß Doppelpunkte vermieden werden.

---

1) Falls die Polygone der Kurvenfläche nicht ganz angehören, ist diese Definition nicht mehr gestattet. Sie würde sonst zu der Folgerung führen, daß *alle* Kurven quadrierbar sind. Man erhielte nämlich, falls $\mathfrak{P}$ wieder das Polygon ist, und $\mathfrak{R}$ das durch $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ bestimmte Ringgebiet,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{P}) + \mathfrak{F}(\mathfrak{R}),$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung sofort erhellt. Diese Tatsache ist für diejenigen Definitionen zu beachten, die an die Zerlegung einer Kurvenfläche in differentielle Sektoren anknüpfen; vgl. G. Peano, Rend. Lincei (4) 6, 1 (1890) S. 54 und C. A. Laisant, Assoc. franc. pour l'avancement des sciences 1899 (Paris 1900) S. 135. Handelt es sich um *einfache rektifizierbare* Kurven, so stimmt diese Definition mit der obigen überein.

2) Daß die Quadrierbarkeit auch für Kurvenbogen in Betracht kommt, ist klar; es genügt aber, sich auf geschlossene Kurven zu beschränken.

3) Cours d'analyse 2. Aufl. (1891) Bd. I, S. 107.

4) Daß es Kurven ohne endliche Bogenlänge gibt, die quadrierbar sind, geht schon daraus hervor, daß es auch stetige Kurven $y = f(x)$ ohne endliche Bogenlänge gibt.

5) Vgl. besonders Trans. Am. math. Soc. 4 (1903) S. 107.

6) Bull. Soc. math. 31 (1903) S. 197. Auf die Möglichkeit solcher Kurven und die Methode sie zu erhalten, findet sich schon ein Hinweis in der These, S. 17. Anm.

Liege nämlich ein Quadrat $\mathfrak{Q}$ vor, das durch zwei Parallelstreifen der Breite ε in vier kongruente Teilquadrate zerlegt ist, so wollen wir die Kurve so bestimmen, daß sie sich in den vier Einzelquadraten symmetrisch verhält, und daß ihr überdies die auf den Quadratseiten liegenden Teile dieser Parallelstreifen angehören; es genügt dann, sie für eines von ihnen anzugeben; es sei Q (Fig. 24). Man gehe dazu wieder von einer Dreimaldreiteilung dieses Quadrates aus, doch in der Weise, daß man die Teilungslinien durch Streifen endlicher Breite ersetzt; um den einfachsten Fall zu erhalten, wählt man zweckmäßig die Teilungslinien und die Streifenbreite so, daß als Schnittfiguren immer wieder Quadrate entstehen. (Fig. 25.) Der erste die Kurve approximierende Linienzug L ist wieder eine Diagonale des Quadrates Q. Der zweite Linienzug L_1 wird so gebildet, daß man diese Diagonale wie bei der Peanoschen Abbildung durch die neun Diagonalen der Teilquadrate und die ihre Endpunkte verbindenden acht Strecken ersetzt, die die Streifen durchsetzen. Wir können dann schreiben

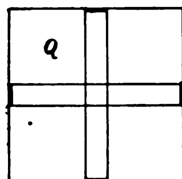
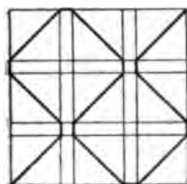


Fig. 24.


Fig. 25.

(3) $$\mathfrak{F} = P_1 + Q_1 + \mathfrak{K}_1,$$

wo $\mathfrak{F}$ die Quadratfläche ist, P_1 die Punktmenge, die von den acht Strecken gebildet wird, Q_1 die Punktmenge, die aus den Flächen der neun Teilquadrate besteht, mit Ausschluß der Endpunkte unserer acht Strecken, und endlich $\mathfrak{K}_1$ die Komplementärmenge hierzu.

Man verfährt nun in der gleichen Weise mit jedem Teilquadrat; man zerlegt es durch Parallelstreifen und ersetzt die es durchziehende Diagonale durch einen analog gebauten Streckenzug, so erhält man den dritten approximierenden Linienzug L_2, und man hat wiederum

$$\mathfrak{F} = P_2 + Q_2 + \mathfrak{K}_2,$$

wenn P_2 *sämtliche* die Parallelstreifen durchziehende Strecken, Q_2 die sämtlichen von Diagonalen durchzogenen Quadratflächen mit Ausschluß der Streckenendpunkte und $\mathfrak{K}_2$ die Komplementärmenge bedeutet. Setzt man dies unbegrenzt fort, so ergibt sich schließlich (S. 11 Anm. 2)

(4) $$\mathfrak{F} = P_\omega + Q_\omega + \mathfrak{K}_\omega = \mathfrak{M}(P_\nu) + \mathfrak{D}(Q_\nu) + \mathfrak{M}(\mathfrak{K}_\nu),$$

und es konvergieren die Linienzüge L_ν gegen die durch $P_\omega + Q_\omega$ dargestellte Punktmenge. Diese ist gemäß Satz II ein stetiger Kurvenbogen, was ebenso bewiesen wird, wie es im Bericht I für die Peanosche Kurve

geschehen ist.[1]) Diesem Kurvenbogen gehört, wie die obige Gleichung zeigt, kein innerer Punkt eines der unendlich vielen Parallelstreifen an, während außer den Strecken, die die Menge $\mathfrak{M}(P_\nu)$ ausmachen, auch jeder Punkt zu ihr gehört, der Grenzpunkt resp. gemeinsamer Punkt unendlich vieler Teilquadrate Q_ν ist. Aus diesem Kurvenbogen entsteht nun die Gesamtkurve so, daß wir ihn gegen die Mittellinien des Hauptquadrates $\mathfrak{Q}$ (Fig. 24) spiegeln und dazu die auf dem Umfang von $\mathfrak{Q}$ liegenden Stücke fügen, die die vier Kurvenbogen zu einer geschlossenen Kurve verbinden. Es ist leicht ersichtlich, daß sie eine *einfache* Kurve $\mathfrak{C}$ ist, und ebenso leicht erkennt man, daß die inneren Punkte sämtlicher Parallelstreifen und nur diese teils zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ und teils zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ gehören.

Nun sei s die Seite von Q, ferner λs^2 der Flächeninhalt der Streifen, mit denen wir den Linienzug L_1 bestimmten, so hat man

$$\mathfrak{F}(Q_1) = s^2(1-\lambda) = s_1^2.$$

Ist ferner $\lambda_1 s_1^2$ der Inhalt der analogen Fläche, die zur Konstruktion von L_2 dient, so folgt ebenso

$$\mathfrak{F}(Q_2) = s_1^2(1-\lambda_1) = s^2(1-\lambda)(1-\lambda_1),$$

und man erhält daher

$$\mathfrak{F}(Q_\omega) = s^2 \Lambda = s^2 \prod_{\nu=0}^{\infty}(1-\lambda_\nu). \tag{5}$$

Falls man nun die Größen λ_ν so wählt, daß das unendliche Produkt Λ nicht gleich Null ist, so wird der Teil $\mathfrak{R}_\omega$ der Quadratfläche, dessen Inneres von den Punkten der geschlossenen Kurve frei ist, kleiner als die Fläche des Quadrates sein. Also folgt:

XVI. *Es gibt einfache nicht quadrierbare Kurven.*

Die Osgoodsche Kurve stellt einen einfachen Fall des folgenden Satzes dar, der eine präzisere Formulierung eines von L. Zoretti stammenden Resultates ist und folgendermaßen lautet:

XVII. *Zu jeder punkthaften abgeschlossenen Menge T läßt sich eine einfache geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ zeichnen, die T als Bestandteil enthält.*[2])

1) Vgl. S. 122. Man hat jetzt die Strecke nicht in 9 gleiche Teile zu teilen, sondern insgesamt in 17, so daß die einzelnen Intervalle teils den 9 Quadraten, teils den 8 Strecken entsprechen.

2) Vgl. Journ. de Math. (6) 1 (1905) S. 12. Zoretti beweist nur, daß es ein kurvenhaftes Kontinuum dieser Art gibt, das er eine *ligne Cantorienne* nennt, und das der in Kap. IV, § 5 gegebenen Definition entspricht. Daß T als eine einfache Kurve möglich ist, bewies dann F. Riesz, C. R. 141 (1905) S. 650. Er stellt die Kurve so her, daß er mittels der Projektionen der Menge T auf den Koordinatenachsen approximierende Linienzüge besonderer Art bildet, die ganz die Form und den Bau der Osgoodschen haben, und dann, wie es bei Osgood geschieht, die stetige Zuordnung wirklich herstellt.

Sei Π die polygonale Figur, die die Menge T im Abstand ε approximiert, und $\{P\}$ die Gesamtheit der *äußeren* Randpolygone von Π, von denen also je zwei außerhalb voneinander liegen. Gemäß Kap. IV, § 1 kann man dann die Polygone $\{P\}$ so in eine zyklische Reihenfolge $\{P_i\}$ bringen, daß, wenn man zwei konsekutive Polygone P_i und P_{i+1} durch einen Streckenzug $\mathfrak{l}_i$ verbindet, diese Streckenzüge einander nicht kreuzen. Seien p_i' und p_i'' die Endpunkte dieser Streckenzüge auf P_i. Die Streckenzüge $\{\mathfrak{l}_i\}$ bilden mit Teilen der Polygone P_i ein Polygon $\mathfrak{Q}_1$ und ein Polygon $\mathfrak{P}_1$; sei $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{q}_i$ das zu $\mathfrak{Q}_1$ gehörige Stück von P_i. Das Polygon $\mathfrak{Q}_1$ soll wieder dasjenige sein, das mit dem unendlich fernen Punkte verbindbar ist. Wie in Kap. IV, § 1 hat man also

$$(6) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{A}_1 + S_1, \quad S_1 = \mathfrak{M}\{\mathfrak{l}_i, \mathfrak{F}(P_i)\},$$

so daß S_1 die abgeschlossene Menge ist, der alle $\mathfrak{l}_i$ und alle Polygonflächen $\mathfrak{F}(P_i)$ zugehören.

Sei nun T_i die Teilmenge von T, die innerhalb von P_i liegt, so approximieren wir sie durch eine innerhalb P_i gelegene Figur Π_i, und es seien $\{P_{ik}\}$ ihre sämtlichen äußeren Randpolygone. Dann kann man sie ebenfalls in der Weise anordnen, daß, wenn man zwei konsekutive Polygone untereinander, ferner das erste mit dem Punkt p_i' und das letzte mit p_i'' durch je einen Streckenzug verbindet, diese Streckenzüge $\{\mathfrak{l}_{ik}\}$ einander nicht kreuzen. Die sämtlichen Streckenzüge $\{\mathfrak{l}_i\}$ und $\{\mathfrak{l}_{ik}\}$ bestimmen dann mit den sämtlichen Polygonen P_{ik} je ein Polygon $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_2$, das ebenso definiert ist, wie $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$; sei wieder $\mathfrak{p}_{ik}$ das Stück des Polygons P_{ik}, das zu $\mathfrak{P}_2$ gehört, und $\mathfrak{q}_{ik}$ das zu $\mathfrak{Q}_2$ gehörige. Man hat dann wiederum

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{A}_2 + S_2, \quad S_2 = \mathfrak{M}\{\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_{ik}, \mathfrak{F}(P_{ik})\}.$$

So kann man fortfahren, erhält die Folgen $\{\mathfrak{P}_\nu\}$ und $\{\mathfrak{Q}_\nu\}$, die Streckenzüge $\mathfrak{l}_N$ und die Polygone P_N. Für jedes ν besteht eine Gleichung der vorstehenden Form, und beim Übergang von $\{\nu\}$ zu ω folgt

$$(7) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{J}_\omega + \mathfrak{A}_\omega + S_\omega, \quad S_\omega = \mathfrak{D}\{S_\nu\},$$

und es ist zu zeigen, daß S_ω eine einfache geschlossene Kurve ist.

Gemäß der Definition der Menge S_ω gehören ihr erstens alle Streckenzüge $\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_{ik}, \ldots \mathfrak{l}_N, \ldots$ an, und zweitens alle Punkte, die gemeinsame Punkte einer Folge einander einschließender Polygone

$$(8) \qquad P_i, P_{ik}, \ldots P_N, P_{Ni}, \ldots$$

sind. Jeder durch eine Folge (8) bestimmte Punkt ist zugleich ein Punkt von T, und daher konvergiert die Breite $\mathfrak{B}(P_N)$ dieser Polygone

für jede solche Folge gegen Null. Denn wäre es für irgend eine Folge nicht der Fall, so würde das durch diese Folge bestimmte Grenzgebilde einerseits zu T gehören und andererseits zusammenhängend sein.

Daraus folgern wir, daß S_ω eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ ist. Zunächst ist nämlich klar, daß jeder Punkt von $\{\mathfrak{l}_N\}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}_\omega$ und $\mathfrak{A}_\omega$ ist. Jeder andere Punkt von S_ω ist aber notwendig Grenzpunkt einer Folge (8) und damit zugleich Grenzpunkt gewisser Streckenzüge

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{ik}, \ldots \mathfrak{p}_N, \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_{ik}, \ldots \mathfrak{q}_N, \ldots$$

und damit auch gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß jeder Punkt c dieser Kurve erreichbar ist. Auch dies ist nur für die Punkte nachzuweisen, die keinem Streckenzug $\mathfrak{l}_N$ angehören, also Grenzpunkte einer Folge (8) sind. Sei c' ein solcher Punkt, so ergibt sich seine Erreichbarkeit für $\mathfrak{J}_\omega$ und $\mathfrak{A}_\omega$ auf Grund folgender einfacher Tatsachen. Erstens sind alle Endpunkte der Wege $\mathfrak{l}_N$ erreichbare Punkte. Zweitens ist jeder Punkt c' Grenzpunkt solcher Endpunkte und kann insbesondere als Grenzpunkt einer einfachen Folge solcher Punkte dargestellt werden. Drittens können die Wege, die je zwei konsekutive Punkte einer solchen Folge miteinander verbinden, innerhalb der Polygone P_N angenommen werden. Da nun die Breite $\mathfrak{B}(P_N)$ Null zur Grenze hat, so konvergieren auch die Wegdistanzen der bezüglichen einfachen Folge gegen Null. Damit ist der Satz bewiesen.

Nimmt man nun insbesondere die Punktmenge T so an, daß ihr ein von Null verschiedener Flächeninhalt zukommt, so hat die mit ihr konstruierte einfache Kurve die Eigenschaft, nicht quadrierbar zu sein, was eines näheren Beweises nicht bedarf.

Einen speziellen Fall des vorstehenden Satzes hat G. Chisholm Young mitgeteilt.[1]) Er ist dadurch von besonderem Interesse, daß er sich an das erste in der Literatur auftretende Beispiel einer ebenen Punktmenge anschließt, deren Flächeninhalt nicht Null ist. Das Beispiel verdankt man W. Veltmann[2]); es möge deshalb hier noch eine Stelle finden. Er legt ein Quadrat zugrunde und schneidet aus ihm ein aus zwei Parallelstreifen bestehendes Kreuz heraus, so daß vier kongruente Teilquadrate übrig bleiben.[3]) Mit jedem von diesen verfährt er ebenso und setzt dies in der Weise unbegrenzt fort, daß die Gesamtfläche aller Parallelstreifen kleiner als die Fläche des Quadrates ist, was

1) Mess. of Math. 34 (1905) p. 180.

2) Zeitschr. f. Math. Bd. 27 (1882) S. 176 und 313.

3) Vgl. Figur 24 auf S. 256.

ebenso bewirkt wird, wie im Fall der Osgoodschen Kurve. Für dieses Beispiel hat die Verfasserin die Konstruktion der bezüglichen Kurve in einfacher und durchsichtiger Weise wirklich ausgeführt. Sie beweist auch, daß die von ihr konstruierte Kurve eine einfache Kurve ist.

§ 18. *Ausdehnungen auf den Raum.* Die in den ersten Paragraphen enthaltenen Definitionen und Sätze werden sich auf dem in Kap. V § 19 genannten Wege ohne Einführung neuer methodischer Hilfsmittel sinngemäß auf den Raum übertragen lassen. Dies beruht in erster Linie auf der schon dort hervorgehobenen Eigenschaft des Stetigkeitsbegriffs, daß er sich für jeden R_n in gleicher Weise an *Folgen diskreter Punkte vom Typus* ω knüpft, sowie auf dem Umstand, daß der Begriff der allseitigen Erreichbarkeit ihm nachgebildet ist. Zweitens benutzt der Inhalt von § 1 und § 2 nur solche Tatsachen und Definitionen, die in der in Kap. V § 19 enthaltenen Art auf den Raum ausgedehnt werden können; insbesondere stellen die dort eingeführten Flächenstreifen Φ_ν und die mit ihnen definierbaren räumlichen Teilgebiete die naturgemäße räumliche Verallgemeinerung der Gebiete J_λ und J_N von Kap. V § 9 und ihrer Eigenschaften dar.

Ist die Übertragbarkeit für die Begriffe und Sätze von § 1 und § 2 dargetan, so läßt sie sich auf die meisten der nachfolgenden Entwickelungen übertragen. Ein großer Teil von ihnen operiert nur mit den Punktmengen selbst, und ist von der Dimensionenzahl unabhängig. Insbesondere folgt aus den obigen Eigenschaften der Stetigkeit und der Erreichbarkeit, daß die Theorie der räumlichen Ordnungstypen für die bloße Führung der Beweise nicht nötig ist. Doch begnüge ich mich mit diesem allgemeinen Hinweis.

Lebesgue hat seine Art, die Bogenlänge einzuführen, auch auf die Definition des *Oberflächeninhalts* übertragen.[1]) Man gehe dazu von solchen Oberflächen F aus, die analytisch durch drei Gleichungen

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$
$$0 < u < 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

definiert sind, und denke sich drei Funktionen

$$x = f_\nu(u, v), \quad y = \varphi_\nu(u, v), \quad z = \psi_\nu(u, v),$$

die einer polyedralen Fläche Π_ν entsprechen, und mit wachsendem ν gleichmäßig gegen f, φ, ψ konvergieren, dann haben die Oberflächeninhalte $\{\Omega_\nu\}$ aller Flächen $\{\Pi_\nu\}$ dieser Folge eine obere Grenze Ω.

1) These S. 68. Die Problemstellung ist wieder die S. 253 Anm. 4 genannte.

Für alle derartigen Flächenfolgen ziehe man wieder die *untere* Grenze der ihnen zugehörigen Größen $\{\Omega\}$ in Betracht. Hat sie einen endlichen Wert O, so kann man ihn als den Oberflächeninhalt von F bezeichnen.[1]) Lebesgue nennt Flächen dieser Art *quadrierbar* und zeigt noch, daß seine Definition für die einfachen Flächen mit der gewöhnlichen übereinstimmt. Wie man sieht, kommt hier die Fläche F nicht als bloße Punktmenge, sondern als *Bahnfläche* in Betracht.[2])

Er hat ferner die Zerlegung quadrierbarer Flächen mittels rektifizierbarer Kurven[3]) in Betracht gezogen und darüber folgende Sätze aufgestellt. Jede quadrierbare Fläche läßt sich durch rektifizierbare Kurven so in eine endliche Zahl von Flächenteilen zerlegen, daß der Oberflächeninhalt eines jeden unterhalb einer gegebenen Schranke σ liegt, und daß die Summe der Oberflächeninhalte aller Teile gleich dem Oberflächeninhalt der Gesamtfläche ist. Die rektifizierbare Kurve kann also zur Herstellung der üblichen Zerlegungen benutzt werden.[4])

Eine spezielle Familie von Flächen stellen diejenigen dar, die er *rektifizierbar* nennt; es sind solche, bei denen jeder rektifizierbaren Kurve der uv-Ebene eine rektifizierbare Kurve der Fläche F entspricht. Diese Eigenschaft hängt wieder ausschließlich an der *Bahnfläche*; man kann selbst für einfachste geometrische Flächen F (Punktmengen) solche Darstellungen der Form (1) finden, daß eine rektifizierbare Kurve nicht in eine rektifizierbare Kurve übergeht.[5]) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die drei Funktionen f, φ, ψ eine rektifizierbare Bahnfläche definieren, besteht darin, daß alle partiellen Ableitungen der drei Funktionen nach x und nach y eine *geschränkte* Wertmenge bilden. Hieraus folgt noch, daß jede rektifizierbare Bahnfläche auch quadrierbar ist.

---

1) Die obere Grenze aller Werte $\{\Omega\}$ ist stets unendlich. Daß nicht für jede einer Fläche F eingeschriebene Polyederflächenschar ihr Oberflächeninhalt gegen den von F konvergiert, wurde zuerst durch Peano und H. A. Schwarz bekannt. Vgl. Peano, lezioni date all' Università di Torino 1881/82 S. 143 und Hermite, cours professé à la faculté des Sciences 1882, S. 35; vgl. auch H. A. Schwarz, Ges. math. Abhandlungen 2 (1890) S. 309. Für weitere Literatur sehe man noch Peano, Rend. Lincei (4) 6, 1 (1890) S. 54.

2) Über eine besondere Inhaltsdefinition, die zum Oberflächeninhalt führt, vgl. die S. 225 Anm. 1 genannte Dissertation von Janzen.

3) Es handelt sich immer nur um *einfache* Kurven.

4) Diese Entwicklungen von Lebesgue ruhen nicht ganz auf analytischem Grunde und operieren teilweise auch mit den Punktmengen, was ich im Interesse der Deutlichkeit anführe. Allerdings hat er wohl nur an die einfacheren Fälle gedacht, in denen beides identisch ist. (Vgl. die in § 13, S. 242 enthaltenen Bemerkungen über die Definition der Bogenlänge.)

5) Dies gelingt schon so, daß man die Fläche F als ebenen Bereich wählt, was ersichtlich ist.

Die Ausdehnung des Begriffs der Bogenlänge auf *Raumkurven* bedarf keiner Erörterung. Ebenso läßt sich auf sie der Begriff der Quadrierbarkeit übertragen.[1])

Um dies zu tun, kann man von einem der Raumkurve eingeschriebenen Streckenzug ausgehen, um jede seiner Strecken eine zylindrische Fläche vom Radius ε legen und ihr dann wieder ein Prisma einschreiben; alsdann erzeugen alle diese Prismen eine gewisse polyedrale Ringfläche Π. Die Oberflächen $\{\Omega\}$ aller dieser Flächen $\{\Pi\}$ haben eine untere Grenze; ist sie *Null*, so bezeichnet Lebesgue die Raumkurve als quadrierbar. Man beweist ähnlich wie für ebene Kurven, daß jede rektifizierbare Kurve auch quadrierbar ist.

Im Gegensatz zu dem Begriff der *ebenen* Quadrierbarkeit bezieht sich der so von Lebesgue eingeführte Quadrierbarkeitsbegriff auf die *Bahnkurven*, da er ihn an einen solchen der Bahnkurve eingeschriebenen Streckenzug anknüpft, wie er ihn für die Bogenlänge benutzt.[2]) Zu einem weiteren ähnlichen Grenzbegriffe, der sich in analoger Weise an die Figur Π anschließen läßt, gelangt man folgendermaßen. Man kann auch ihr Volumen V und die untere Grenze der Wertmenge $\{V\}$ in Betracht ziehen; auch sie braucht nicht Null zu sein. Ein Beispiel liefert eine einfache Kurve, die aus der Peanoschen, den Würfel durchziehenden Kurve in analoger Weise entsteht, wie die Osgoodsche Kurve (§ 17) aus der ebenen Peanoschen Kurve.[3])

---

1) Man kann für rektifizierbare geschlossene Kurven eine *Flächenzahl* in analoger Weise wie in der Ebene einführen. Wird einer ebenen Kurve ein Polygon eingeschrieben, und das Polygon von einem innern Punkt O aus in Dreiecke zerlegt, so kommt jedem Dreieck eine Flächenzahl zu, die man auch als einen auf seiner Fläche senkrechten Vektor darstellen kann. Die gesamte Polygonfläche ist dann gleich der Summe dieser Vektoren, und deren Grenzwert liefert wieder den Inhalt der Kurvenfläche. Dies läßt sich auf Raumkurven so übertragen, daß man den Punkt O im Raum beliebig wählt; aus den Vektoreigenschaften folgt nämlich fast unmittelbar, daß die so definierte Vektorsumme eines der Kurve eingeschriebenen Polygons vom Punkt O unabhängig ist. Das gleiche gilt daher auch für ihren Grenzwert, der dann die Flächenzahl der Raumkurve darstellen kann. Vgl. Peano, Rend. Lincei (4) 6, 1 (1890) S. 54 und C. A. Laisant, Assoc. franc. pour l'avanc. des sciences 1899 (Paris 1890) S. 135. Die Definition gilt jedoch nur für *rektifizierbare* Kurven; vgl. die Anm. 1 auf S. 255.

In anderer Weise hat Zoard de Gorze diese Aufgabe behandelt. Er bedient sich der allgemeinen Methode von Lebesgue, benutzt aber nur gewisse der Raumkurve eingeschriebene Polyeder, die er geeignet wählt; C. R. 144 (1907) S. 253.

2) Es ist klar, daß man auch in der Ebene in der obigen Weise verfahren und an die Bahnkurve anknüpfen kann; doch mag dieser Hinweis genügen.

3) Vgl. dies. Jahresb. Bd. 15 (1906) S. 567. Man kann endlich auch noch für eine auf einer quadrierbaren Fläche liegende einfache Kurve einen Quadrierbarkeitsbegriff in Analogie zu § 17 definieren.

Die vorstehenden Betrachtungen kann man auch wieder an die Punktmengen anschließen, indem man direkt von den approximierenden Polyedern ausgeht. Die sich so ergebenden Begriffe bilden ein Analogon zum Begriff der Quadrierbarkeit *ebener* Kurven. In allen Fällen gilt der Satz, daß eine ebene, nicht quadrierbare Kurve auch als Raumkurve nicht quadrierbar ist, mag man sie als Bahnkurve oder als Punktmenge auffassen.

Lebesgue gibt endlich auch noch interessante Anwendungen seiner Begriffe auf die Theorie der abwickelbaren Flächen, auf die ich jedoch nur im allgemeinen hinweisen kann.

Kapitel VII.

Die Kurvenmengen und der Funktionalraum.

G. Ascoli und C. Arzelà sind die ersten gewesen, die es unternahmen, die Begriffe und Sätze der Cantorschen Punktmengentheorie auf *Mengen stetiger Kurven* zu übertragen, und zwar in fast unmittelbarem Anschluß an die Cantorschen Resultate. Ascoli beschränkte sich auf gewisse einfachere Kurven, die aus Stücken der Form $y = f(x)$ aufgebaut sind, während sich Arzelà mit Bahnkurven allgemeinerer Art beschäftigte. Ihr Hauptresultat besteht in der Ermittelung der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß auch jede unendliche Teilmenge solcher Kurven mindestens ein Grenzelement bestimmt; sie besteht in der *gleichmäßigen Stetigkeit* aller darstellenden Funktionen. (§ 2 und 3.)

Die Definition des *Grenzelements* für eine Folge von Funktionen oder Bahnkurven, die hier zugrunde liegt, ist diejenige, die sich auf den Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* stützt. Doch ist es keineswegs nötig, der Definition des Grenzelements diesen Inhalt zu geben. Es genügt, ihn so zu formulieren, daß ihm diejenige allgemeine Eigenschaft zukommt, die für den Begriff des Grenzelements charakteristisch ist. Sie besagt, daß wenn eine Folge $\{m_\nu\}$ ein Element m' als Grenzelement besitzt, dies auch für jede Teilfolge von $\{m_\nu\}$ der Fall sein muß. Jede Definition, die dieser Bedingung genügt, kann als Definition des Grenzelements dienen. (§ 1.)

Die große Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten, die somit für den Inhalt der Definition offen steht, macht es verständlich, daß auf Mengen irgendwelcher Art, für die sich Grenzelemente definieren lassen, die Begriffe und Sätze der Punktmengentheorie nur teilweise übertragbar sind. Hiermit ist eine Reihe wichtiger Fragestellungen bezeichnet. Ihre systematische Erörterung ist in neuerer Zeit von M. Fréchet mit Erfolg begonnen worden. Er hat Mengen allgemeineren und engeren Charakters eingehender daraufhin untersucht, insbesondere Mengen stetiger Bahnkurven, für die er den Begriff des Grenzelements in rein analytischer Weise einzuführen wußte. (§ 4.)

Zwei Sätze der Punktmengentheorie kommen in erster Linie in Betracht. Der eine ist das Theorem, das jeder unendlichen Menge von Punkten mindestens einen Grenzpunkt beilegt, das andere ist der Satz, daß die Ableitung eine abgeschlossene Menge ist. Beide brauchen für Mengen allgemeinster Art keineswegs erfüllt zu sein, was man durch einfache Beispiele belegen kann. Sind sie für eine Menge erfüllt, so ist damit die Übertragbarkeit der gesamten Cantorschen Theorie noch nicht gewährleistet. Es liegt daran, daß die auch im Beweis des Bolzano-Weierstraßschen Theorems benutzte Teilungseigenschaft des Raumes für allgemeinere Mengen wegfällt und ihnen nur durch speziellere Annahmen beigelegt werden kann. In diesen Resultaten und den anschließenden Untersuchungen liegt das wichtigste Ergebnis der Fréchetschen Arbeiten. Sie enthalten den Anfang einer axiomatischen Analyse der in der Punktmengentheorie steckenden Voraussetzungen. (§ 5.)

Um zu enger bestimmten Mengen zu gelangen, nimmt Fréchet an, daß man je zweien ihrer Elemente eine symmetrisch von ihnen abhängende Zahlgröße zuordnen kann, die dem Abstand zweier Punkte analog ist. (§ 6.) Sie gestattet, die Gesamtheit *aller* Elemente einer Menge $\mathfrak{M} = \{m\}$ inbezug auf irgend ein Element m' in die drei Klassen zu teilen, die durch

$$d(m, m') < \varrho, \quad d(m, m') = \varrho, \quad d(m, m') > \varrho$$

definiert sind, und so die Begriffe Kugel, Äußeres, Inneres formal zu übertragen. Allerdings übertragen sich nicht zugleich alle Eigenschaften, die diesen Begriffen zukommen. Es kann nämlich ein „innerer" Punkt Grenzpunkt „äußerer" Punkte sein und umgekehrt.

Für diese Mengen besteht sowohl das Bolzano-Weierstraßsche Theorem vom Grenzpunkt, wie auch der Satz, daß die Ableitung eine abgeschlossene Menge ist. Dagegen besitzen sie nicht ohne weiteres die oben erwähnte Teilungseigenschaft des Raumes, und daher ist das Haupttheorem der Cantorschen Theorie sowie das Borelsche Theorem auf sie noch nicht übertragbar. Um dies zu bewirken, hat man zunächst den Begriffen „Äußeres" und „Inneres" diejenigen Eigenschaften zu sichern, die ihnen im Raum zukommen. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen, ist aber für den gewünschten Zweck noch nicht ausreichend. Man bedarf daher noch weiterer neuer Annahmen, um die Übertragbarkeit zu ermöglichen. Diejenige, die Fréchet macht, läuft darauf hinaus, den Mengen, die er betrachtet, dieselbe Mächtigkeit beizulegen, die der Raum besitzt, also die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Er nimmt nämlich an, daß es in ihnen eine *abzählbare* Teilmenge M gibt, deren

Ableitung M' die Gesamtmenge liefert. Mengen dieser Art nennt er *separabel.* Für sie besteht sowohl das Haupttheorem, wie auch das Borelsche Theorem, und damit sind auf sie alle Sätze der Punktmengentheorie übertragbar. Fréchet bezeichnet diese Mengen als *Normalmengen.* (§ 7.)

Zu diesen Mengen gehört zunächst der Fréchetsche R_∞, ferner jede Menge gleichmäßig stetiger Funktionen oder Bahnkurven, falls man für das Grenzelement die gleichmäßige Konvergenz zugrunde legt; auch Mengen analytischer Funktionen kann man entsprechend definieren. Dagegen gehört der Hilbertsche Raum R_∞ zu ihnen nicht; denn für ihn versagt bereits die Geltung des Bolzano-Weierstraßschen Satzes vom Grenzpunkt. Es ist klar, daß dem Studium seiner Eigenschaften deshalb ein um so erhöhteres Interesse zukommt. (§ 9.)

Mit dem Punktmengencharakter lassen sich auch die Funktionsbegriffe und deren Eigenschaften, insbesondere Stetigkeit und Konvergenz auf alle Mengen übertragen, denen dieser Charakter zukommt. In dieser Hinsicht hat zuerst V. Volterra Mengen stetiger Kurven behandelt, für sie die Grundbegriffe der Analysis definiert und eine Reihe weittragender Resultate abgeleitet. Doch liegt die Erörterung dieser Dinge jenseits des Rahmens, den ich diesem Bericht geben wollte; ich beschränke mich auf die mengentheoretische Erörterung der allgemeineren Mengen und ihrer formalen Eigenschaften. (§ 10.) Eine Ausnahme erfahren nur einige neuere Resultate von Riesz und Fischer über summierbare Funktionen, und zwar deshalb, weil man sie zugleich als Eigenschaften des Hilbertschen R_∞ auffassen kann.[1])

§ 1. *Die mengentheoretische Definition des Grenzelements.* Überall, wo der Begriff des *Grenzelements* in Analysis und Geometrie auftritt, haftet ihm folgende, für ihn wesentliche und charakteristische Eigenschaft an.

I. *Ist m Grenzelement der unendlichen Folge $\{m_\nu\}$, so hat auch jede unendliche Teilmenge $\{m'_\nu\}$ dieser Folge das Element m als Grenzelement.*

In dieser Definition kommt die *Eindeutigkeit* des Grenzelements m zum Ausdruck. Sie muß die Grundlage für die allgemeinste mengentheoretische Einführung des Grenzelements bilden.

Es liegt nahe, das so definierte Grenzelement mit dem Begriff zu vergleichen, der in Kap. IV, § 5 als Grenzgebilde $\mathfrak{T}_\omega$ einer Folge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$

---

1) Auch auf die große Reihe der Arbeiten von S. Pincherle über den Funktionalraum kann ich hier nicht eingehen; sie haben überdies wesentlich algorithmischen Charakter.

eingeführt wurde. Dieser Begriff ist der allgemeinere. Für ihn braucht nämlich die Eigenschaft, daß eine Teilfolge $\{\mathfrak{T}'_\nu\}$ dasselbe Grenzgebilde $\mathfrak{T}_\omega$ besitzt, wie die Menge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ selbst, nicht zuzutreffen. Es wurde aber dort bereits hervorgehoben, daß es sich bei den besonderen Problemen fast immer um Mengen $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ handelt, die die ebengenannte Bedingung erfüllen. Alsdann besitzt auch das Gebilde $\mathfrak{T}_\omega$ die in der Definition I verlangte Eigenschaft und kann daher als Grenzelement einer Folge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ definiert werden. Dies soll in der Tat geschehen. Im übrigen lasse ich die Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ zunächst ganz unbestimmt und nehme nur an, daß sie, wenn sie überhaupt unendlich viele Punkte enthalten, abgeschlossen sind, und definiere also:

II. *Gibt es zu einer Folge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ abgeschlossener Mengen ein Gebilde $\mathfrak{T}_\omega$ von der Art, daß ihm erstens jeder Punkt t_ω angehört, der Grenzpunkt einer Punktfolge $\{t_\nu\}$ ist, und daß zweitens in jeder Nähe eines Punktes t_ω für eine geeignete Zahl N Punkte t_ν für jedes $\nu > N$ liegen, so heißt $\mathfrak{T}_\omega$ Grenzelement der Folge $\{\mathfrak{T}_\nu\}$.*[1]

Wir lassen damit auch den *Punkt* als eine Menge $\mathfrak{T}$ zu. Für das so definierte Grenzelement $\mathfrak{T}_\omega$ bestehen folgende Sätze. 1) Es ist, wenn es nicht etwa nur eine endliche Zahl von Punkten enthält, in allen Fällen selbst eine abgeschlossene Menge. 2) Setzen wir die Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ insbesondere als Kontinua voraus, so ist auch das Grenzelement $\mathfrak{T}_\omega$ ein Kontinuum. 3) Im Sinne der Definition II ist insbesondere jede Menge $\mathfrak{T}$ als Grenzelement der Folgen approximierender Polygonfiguren $\{\Pi_\nu\}$ zu betrachten, gleichgültig, ob sie im Sinne von Kap. VI, § 1 gleichmäßig gegen die Menge $\mathfrak{T}$ konvergieren oder nicht. Das Beispiel der Peanoschen Kurve lehrt daher, daß das Grenzelement einer Folge linienhafter Kontinua auch flächenhaft sein kann.

So naturgemäß die vorstehende mengentheoretische Definition des Grenzelements erscheinen mag, so wenig versteht es sich von selbst, daß sie sich mit denjenigen deckt, die auf analytischem Boden erwachsen sind. Dies ist in der Tat nicht der Fall. Betrachtet man z. B. eine Menge eindeutiger und stetiger Funktionen $y = f_\nu(x)$, $(0 \leqq x \leqq 1)$, die gegen die x-Achse konvergieren und im Punkt $x = 0$ einen einzigen Punkt ungleichmäßiger Konvergenz besitzen, so häufen sich bekanntlich die Maxima der Funktionen $f_\nu(x)$ mit wachsendem ν gegen den Wert $x = 0$, ohne indessen selbst gegen Null zu konvergieren.[2] Jede der

1) Die Zahl N kann von t_ω abhängen, doch gibt es ein für *alle* t_ω ausreichendes N. Dies ist eine unmittelbare Folge der in Kap. IV, § 8 genannten Eigenschaften der Figuren Π.

2) Vgl. Bericht I, S. 226.

zugehörigen Kurven hat also einen Buckel, der sich mit wachsendem ν der y-Achse nähert. Das Grenzgebilde dieser Buckel wird daher durch ein Stück der y-Achse gebildet, und dieses Stück gehört der Definition II gemäß dem Grenzelement $\mathfrak{T}_\omega$ unserer Kurvenmenge an.

Die übliche analytische Betrachtung definiert jedoch die Grenzfunktion $f_\omega(x)$ so, daß sie jeden einzelnen Wert x *besonders* in Betracht zieht und den Grenzwert ins Auge faßt, gegen den die zugehörigen Funktionswerte $f_\nu(x)$ konvergieren; ihn bezeichnet sie als den Wert der Grenzfunktion $f_\omega(x)$. Mengentheoretisch bedeutet dies also, daß nur solche Punktfolgen $\{t_\nu\}$ einen Punkt t_ω liefern, die demselben Wert x entsprechen. Auch diese Definition genügt, wie man leicht erkennt, den Bedingungen der Definition I. Das mit ihr definierte Grenzelement reduziert sich aber in dem eben betrachteten Falle auf ein Stück der x-Achse.

Noch einschneidender ist der folgende Unterschied zwischen der analytischen und der geometrischen Betrachtung. Analytisch bestimmt nicht jede Folge $\{f_\nu(x)\}$ ein Grenzelement; dies findet nur statt, wenn sie konvergiert, oder wenn in ihr wenigstens eine konvergente Teilfolge enthalten ist. Man kann dies auch so ausdrücken, daß das Grenzgebilde $f_\omega(x)$ der Folge oder der Teilfolge eine *eindeutige* Funktion sein soll.[1]) Ein einfaches Beispiel ist das folgende.[2]) Die durch die Gleichungen

$$f_\nu(x) = \sin 2^{\nu-1}x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

bestimmte Schar einfacher Kurven hat, wenn wir die mengentheoretische Definition II zugrunde legen, eine um den Anfangspunkt gelegte *Quadratfläche* als Grenzelement. Eine analytisch definierte, *eindeutige* Grenzfunktion existiert jedoch überhaupt nicht. Für alle dyadischen Werte würde sie zwar den Wert Null haben; in den übrigen rationalen Werten ergibt sich bereits eine endliche Anzahl verschiedener Werte, und in allen irrationalen Punkten würden sich für $f_\omega(x)$ alle Punkte des ganzen der Quadratfläche angehörigen Lotes ergeben. Analoges gilt für jede unendliche Teilmenge.

Da die Definition des Grenzelements nur der Bedingung I unterliegt, so bleibt für ihren Inhalt noch ein weiter Spielraum. Ihre besondere Formulierung richtet sich offenbar nach der Eigenart der Gebilde, die zur Untersuchung stehen; je spezieller die Klasse von Problemen ist, die man behandelt, um so enger wird dieser Inhalt zu wählen sein. Die engste Wahl dürfte diejenige sein, die dem analytischen Begriff

1) Dabei wird dann allgemein als Wert von $f_\omega(x)$ jeder Wert zugelassen, der Grenzwert unendlich vieler Werte $f_\nu(x)$ ist; vgl. auch S. 209.

2) Vgl. Fréchet, Rend. Palermo 22 (1906) S. 60.

der *gleichmäßigen Konvergenz* entspricht. Wie in Kap. VI, § 2 für einen speziellen Fall bereits nachgewiesen wurde, besteht für ihn volle Übereinstimmung zwischen der analytischen und der mengentheoretischen Definition. Es wird sich alsbald zeigen, daß dies allgemein gilt.

§ 2. *Gleichmäßige und ungleichmäßige Stetigkeit einer Menge von Funktionen.* Der analytische Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einer Menge von stetigen Funktionen $\{f(x)\}$ hängt enge mit dem Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit*[1]) einer Funktionsmenge zusammen, der bekanntlich folgenden Inhalt hat.[2])

III. *Eine geschränkte Menge $\{f(x)\}$ von Funktionen, die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ sämtlich stetig sind, heißt in diesem Intervall gleichmäßig stetig, falls es für jedes vorgegebene σ und für jeden Punkt x dieses Intervalls ein ihn einschließendes Teilintervall geeigneter Größe δ gibt, so daß die Funktionsschwankung in ihm für alle Funktionen $f(x)$ die Größe σ nicht überschreitet.*[3])

Sind die Funktionen $\{f(x)\}$ in einem Intervalle $a \ldots b$ *ungleichmäßig stetig*, so gibt es nicht für jedes σ ein Intervall der genannten Art; vielmehr gibt es für diejenigen Werte σ, für die die in III genannte Eigenschaft erfüllt ist, eine untere Grenze σ_0. Ist dann $\sigma < \sigma_0$, so gibt es, wie man auch eine Länge δ wählen mag, für ein so bestimmtes σ immer noch mindestens eine Funktion $f(x)$, so daß die ihr zugehörige Funktionsschwankung auf mindestens einem Intervall der Länge δ größer als σ ist.[4]) Man sieht daraus, daß der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit dem in Kap. VI, § 1 eingeführten Begriff der gleichmäßigen Konvergenz völlig parallel läuft. Wir ziehen aus ihm noch eine Folgerung.

Sei $f_\nu(x)$ eine Folge von Funktionen ungleichmäßiger Stetigkeit, und σ wieder eine der eben definierten Größen. Nimmt man alsdann eine gegen Null konvergierende Folge $\{\delta_\lambda\}$ beliebig an, so gibt es zu jedem δ_λ mindestens eine Funktion $f_\lambda(x)$, deren Schwankung auf mindestens einem Intervall δ_λ' der Länge δ_λ größer als σ bleibt. Sei ξ ein Grenzpunkt der Centra aller dieser Intervalle δ_λ'; dann wird es zu jedem

1) Die gleichmäßige Konvergenz kann übrigens auch auf unstetige Funktionen ausgedehnt werden; vgl. Bericht I, S. 225.

2) Ich halte es für unbedenklich, auch für diesen Begriff das Wort gleichmäßig stetig zu verwenden. Die gleichmäßige Stetigkeit kann sich also einerseits auf eine einzelne Punktmenge, andrerseits auf eine Funktionenmenge beziehen.

3) Für die Intervallendpunkte a und b erstreckt sich dies Teilintervall δ naturgmäß nur nach einer Seite.

4) Es gibt sogar unendlich viele, doch bedarf man für die folgenden Schlüsse nur der obigen Tatsache.

den Punkt ξ einschließenden Intervall ε immer noch unendlich viele Funktionen $\{f_\lambda(x)\}$ geben, deren Schwankung auf ε ebenfalls größer ist als σ; und zwar kann man zu jedem ε ein N so bestimmen, daß dies für jedes $\nu > N$ der Fall ist.

Hieraus kann man schließen, daß die gleichmäßige Stetigkeit aller Funktionen einer Folge $\{f_\nu(x)\}$ eine *notwendige* Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz ist. Falls nämlich die Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f_\omega(x)$ konvergieren, so gilt dies auch von den Funktionen

$$\varphi_\nu(x) = f_\omega(x) - f_\nu(x),$$

und zwar ist $\varphi_\omega(x) = 0$ für *jedes* x. Wären nun die Funktionen $f_\nu(x)$ nicht gleichmäßig stetig, so wäre dies auch für die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ nicht der Fall, und für diese Funktionen $\varphi_\nu(x)$ erweist sich der für sie notwendig existierende, soeben bestimmte Punkt ξ als ein Punkt ungleichmäßiger Konvergenz.

Dieser Satz wurde zuerst von C. Arzelà ausgesprochen.[1] Sein Beweis lautet folgendermaßen. Aus der Stetigkeit der Funktionen $f_\omega(x)$ und der gleichmäßigen Konvergenz folgt zunächst, daß bei gegebenem σ für jedes $\nu > N$ und für jedes x des Intervalls $a \ldots b$ die Relation

$$|f_\nu(x) - f_\omega(x)| < \sigma$$

gilt, und daß für zwei Werte x' und x'' eines jeden Intervalls von einer geeigneten Länge δ

$$|f_\omega(x') - f_\omega(x'')| < \sigma,$$

ist, und daraus folgt schließlich

$$|f_\nu(x') - f_\nu(x'')| < 3\sigma$$

für je zwei Werte x' und x'' eines jeden Intervalls der Länge δ und für jedes $\nu > N$. Endlich gibt es für alle $\nu \leq N$ eine einzige Intervalllänge δ', die dieselbe Relation bewirkt; für die kleinere dieser beiden Intervalllängen findet sie daher für *jedes* ν statt.

Daß eine Folge $\{f_\nu(x)\}$ gleichmäßig stetiger Funktionen, die überdies gleichmäßig konvergiert, eine *stetige* Funktion $f_\omega(x)$ als Grenzfunktion liefert, bedarf hier keiner weiteren Begründung. Wir können aber darüber hinaus noch eine wichtige Eigenschaft von $f_\omega(x)$ ableiten.

Ein jedes zu gegebenem σ wie oben bestimmte Intervall δ wollen wir als ein zu σ gehöriges *Stetigkeitsintervall* bezeichnen und von einer

---

1) Vgl. besonders Mem. Ist. Bologna (5) 5 (1895) S. 225 und (5) 8 (1899) S. 43. Arzelà drückt sich auch so aus, daß die Funktionen *gleichmäßig oszillieren*.

Funktion $\varphi(x)$, bei der für jeden Wert von σ ein jedes Intervall δ als Stetigkeitsintervall ausreicht, das den sämtlichen Funktionen $\{f(x)\}$ entspricht, sagen, sie habe denselben Stetigkeitsgrad, wie die Menge $\{f(x)\}$.[1]) Dann läßt sich folgender Satz beweisen, der sich teilweise auch schon bei Ascoli findet.[2])

Ist $f_\omega(x)$ Grenzelement der Folge $\{f_\nu(x)\}$, so hat $f_\omega(x)$ denselben Stetigkeitsgrad wie die Funktionen $f_\nu(x)$.[3])

Dazu betrachten wir zunächst *irgend*ein Intervall δ und bezeichnen durch $\Delta f_\nu(x)$ die Schwankung von $f_\nu(x)$ auf δ. Ist nun für *jedes* ν diese Schwankung höchstens gleich σ, so ist zu zeigen, daß sie auch für $f_\omega(x)$ auf dem Intervall δ höchstens den Wert σ haben kann. Wäre nämlich

$$\Delta f_\omega(x) = \sigma + \varepsilon > \sigma,$$

so seien ξ' und ξ'' zwei Werte von x auf δ, so daß

$$|f_\omega(\xi'') - f_\omega(\xi')| = \sigma + \varepsilon$$

ist. Dann kann man wegen der gleichmäßigen Konvergenz eine Zahl N so finden, daß für jedes $\nu > N$

$$f_\omega(\xi') - f_\nu(\xi')| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{und} \quad |f_\omega(\xi'') - f_\nu(\xi'') < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ist. Daraus aber würde man

$$|f_\omega(\xi'') - f_\omega(\xi')| < |f_\nu(\xi'') - f_\nu(\xi')| + \varepsilon$$

erhalten, was einen Widerspruch darstellt. Hieraus läßt sich die Richtigkeit unseres Satzes unmittelbar entnehmen.

Wir können also schließlich folgenden Satz aussprechen:[4])

IV. *Die notwendige Bedingung dafür, daß eine Folge $\{f_\nu(x)\}$ im Intervalle $a \ldots b$ stetiger Funktionen gegen ihre stetige Grenzfunktion $f_\omega(x)$ gleichmäßig konvergiert, besteht darin, daß die Funktionen $f_\nu(x)$ gleichmäßig stetig sind, und zwar hat die Grenzfunktion denselben Stetigkeitsgrad wie die Funktionen $f_\nu(x)$.*

Eine *hinreichende* Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit einer

1) Man kann noch zu einem Maximalintervall Δ übergehen; doch ist dies hier entbehrlich.

2) Ascoli beweist allerdings nur, daß alle Grenzelemente ebenfalls eine gleichmäßig stetige Menge bilden; a. a. O. S. 549 u. S. 259.

3) Satz und Beweis lassen sich auch auf unstetige Funktionen ausdehnen.

4) Den Satz spricht Ascoli Ist. Lomb. Rend. (2) 21 (1885) S. 263 aus; doch wird dort nur bewiesen, daß die Bedingung hinreicht (vgl. § 3). Daß sie notwendig ist, zeigte Arzelà a. a. O. Der Stetigkeitsgrad wird von ihm noch nicht berücksichtigt.

Funktionsmenge $\{f(x)\}$ besteht nach Arzelà darin, daß alle Differential quotienten

$$q(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

für alle Funktionen $f(x)$ und alle Wertepaare x_1, x_2 eine *geschränkte* Menge bilden. Der Beweis kann aus dem Borelschen Intervallsatz leicht entnommen werden.[1])

§ 3. *Das Grenzelement für einfache Kurven.* In der Theorie der Kurvenmengen wird für die Definition des Grenzelements allgemein die *gleichmäßige* Konvergenz zugrunde gelegt.[2]) Wir nehmen von vornherein an, daß die zu betrachtenden Funktionen sämtlich für dasselbe Intervall $a \ldots b$ definiert sind, und definieren:

V. *Die Funktion $f(x)$ heißt dann und nur dann Grenzelement der Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ im Intervall $a \leq x < b$, wenn die Funktionen $f_\nu(x)$ in diesem Intervall gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren.*

Jede Folge $\{f_\nu(x)\}$, die in einem Intervall gleichmäßig konvergiert, hat daher ein Grenzelement In bekannter Weise folgt ferner als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Folge $\{f_\nu(x)\}$ ein so definiertes Grenzelement besitzt, der Umstand, daß für *gegebenes* ε, *geeignetes* N, *jedes* $\nu > N$ und *jedes* x

$$|f_{\nu+\varrho}(x) - f_\nu(x)| < \varepsilon$$

ausfällt. Diese Definition bezieht sich übrigens auch auf unstetige Funktionen. Wir benutzen sie aber nur für *stetige* Funktionen $f_\nu(x)$. Daß sie *geschränkt* sind, ist bereits eine Folge der gleichmäßigen Konvergenz.

Ascoli hat den Begriff des Grenzelements in dieser Weise definiert. Er ist zugleich derjenige, der zu diesem Zweck den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit einer Menge von Funktionen einführte und den Nachweis der Existenz des Grenzelements auf sie stützte. Es besteht nämlich der folgende Satz:

---

1) Mem. Ist. Bologna (5) 5 (1895) S. 232. Dort finden sich auch spezielle Beispiele solcher Funktionsmengen. Später hat Arzelà die obigen Begriffe und Sätze auf Funktionen von zwei Variablen übertragen; Mem. Ist. Bologna (6) 3 (1906) S. 119.

2) Für Kurvenmengen, bei denen die Grenzelemente auch auf Grund ungleichmäßiger Konvergenz definiert werden, fehlen vorläufig allgemeinere mengentheoretische Resultate. Auf die von Arzelà gegebene notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Folge von stetigen Kurven oder Funktionen gegen eine gleichfalls stetige Grenzfunktion konvergiert, komme ich in Kap. VIII, § 6 zurück.

VI. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine unendliche Menge im Intervalle $a \ldots b$ stetiger Funktionen $\{f(x)\}$ mindestens ein Grenzelement bestimmt, besteht darin, daß die Funktionen gleichmäßig stetig sind, oder daß in ihnen wenigstens eine derartige Teilmenge existiert.*[1])

Daß dieser Satz für eine Folge $\{f_\nu(x)\}$ zutrifft, von der man *weiß*, daß sie gegen ein einziges Grenzelement gleichmäßig konvergiert, haben wir schon in § 2 gesehen. Hier handelt es sich um den Beweis des weiterreichenden Satzes, daß *jede* unendliche Menge $\{f(x)\}$ solcher Funktionen *mindestens ein* Grenzelement besitzt, daß man also aus ihr stets mindestens eine Folge $\{f_\nu(x)\}$ gleichmäßig konvergenter Funktionen auswählen kann. Dies soll hier im Anschluß an Ascoli bewiesen werden. Der Anlage des Berichts entsprechend bediene ich mich einer möglichst geometrischen Einkleidung.

Sei $\mathfrak{M} = \{f(x)\}$ die im Intervalle $a \leq x \leq b$ definierte Kurvenmenge, so bestimme man zunächst zur Größe σ ein zureichendes Stetigkeitsintervall δ, teile das Intervall $a \ldots b$ so in m gleiche Teile, daß die Teile höchstens die Länge δ haben, und errichte in den Teilpunkten die Lote $l_0, l_1, \ldots l_m$. Auf dem Lot l_0 besitzen die Schnittpunkte mit den Kurven $\{f(x)\}$ mindestens einen Grenzpunkt. Sei η_0 ein solcher, so gibt es eine Teilmenge

$$\mathfrak{M}_0 = \{f_\lambda(x)\}$$

von $\mathfrak{M}$, so daß jede Kurve $f_\lambda(x)$ das Lot l_0 in einem Punkte schneidet, dessen Abstand von η_0 kleiner als σ ist. Die Schnittpunkte der Kurven von $\mathfrak{M}_0$ mit l_1 besitzen wieder auf dem Lot l_1 mindestens einen Grenzpunkt η_1; mit ihm definieren wir eine Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}_0$, nämlich

$$\mathfrak{M}_1 = \{f_{\lambda\mu}(x)\},$$

so daß der Schnittpunkt jeder Kurve $f_{\lambda\mu}(x)$ mit dem Lot l_1 um weniger als σ von η_1 entfernt ist. So kann man fortfahren und erhält schließlich eine Kurvenmenge

$$M = \{\varphi(x)\},$$

die *jedes* Lot l_ν so schneidet, daß der Schnittpunkt vom Punkte η_ν einen Abstand besitzt, der unterhalb σ bleibt. Trägt man nun auf jedem

1) Vgl. Ist. Lomb. Rend. (2) 21 (1888) S. 263. Die Untersuchung von Ascoli ist übrigens allgemeiner als die obige, aber dadurch auch umständlicher. Er geht nämlich von Funktionen aus, die nicht für dasselbe Intervall definiert sind, und stellt noch Sätze über die Länge des Intervalls auf, in dem die Grenzfunktion definiert werden kann. Es kann sich auch auf einen Punkt zusammenziehen. Vgl. auch den ausführlichen Beweis von Arzelà, der im Grundgedanken mit dem von Ascoli übereinstimmt; Mem. Ist. Bologna (5) 5 (1895) S. 225.

Lot l_ν von η_ν aus nach oben und unten die Länge 2σ ab und verbindet je zwei benachbarte obere resp. untere der so entstehenden Punkte, so bilden alle diese Strecken ein einfaches Polygon P, von dem leicht zu sehen ist, daß sämtliche Kurven $\varphi(x)$ der Polygonfläche $\mathfrak{F}(P)$ angehören.

Wählt man nun $\sigma_1 < \sigma$ und verfährt mit der Menge M, wie eben mit $\mathfrak{M}$, so erhält man ein Polygon P_1, das Bestandteil der Polygonfläche $\mathfrak{F}(P)$ ist, und wenn man σ die gegen Null konvergierende Folge $\{\sigma_\nu\}$ durchlaufen läßt, so liefern die Polygone P_ν ein Grenzgebilde, das eine einfache stetige Kurve und zugleich Grenzgebilde von Kurven der Menge $\mathfrak{M}$ ist.[1])

Bei Ascoli wird der Beweis, daß sich auf diesem Wege eine stetige Kurve als Grenzelement ergibt, sachlich darauf gestützt, daß diese Grenzfunktion vermöge ihrer Konstruktion in bezug auf eine im Intervall $a \ldots b$ überalldichte abzählbare Menge gleichmäßig stetig konstruiert wird, und daß daraus ihre Stetigkeit für das gesamte Intervall geschlossen werden kann (Kap. VI, Satz II).

C. Arzelà hat die Untersuchungen von Ascoli auf *einfache Kurven* $\{C\}$ ausgedehnt, die durch Gleichungen der Form

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

gegeben sind, und hat auch für Folgen $\{C_\nu\}$ dieser Kurven das Grenzelement C_ω auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz definiert.[2]) Seine Definition lautet nämlich, daß in jeder beliebigen Umgebung von C_ω, d. h. in jedem Gebiet, das C_ω einschließt, und dessen Randpunkte von C_ω um weniger als eine beliebige Größe σ entfernt sind, für hinreichend großes ν unendlich viele Kurven C_ν enthalten sind, die *ganz* dieser Umgebung angehören. Er beweist dann noch, daß auch in diesem Fall die gleichmäßige Stetigkeit aller Funktionenpaare eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß jede unendliche Menge solcher Kurven mindestens ein Grenzelement besitzt. Dies kann durch die gleichen Überlegungen geschlossen werden, wie im Ascolischen Fall. Das Auftreten zweier darstellender Funktionen statt einer einzigen bedingt keine Veränderung.

Wenn auch die Definitionen von Ascoli und Arzelà auf analytischem Boden erwachsen sind, so operieren doch beide mit den *Punktmengen* als solchen; diese Definitionen haben daher allgemeinen

1) Einen andern ausführlichen Beweis gibt Arzelà a. a. O.

2) Rend. Linc. (4) 5, 1 (1889) S. 342. Er nimmt die Kurven ohne Doppelpunkte an. Doch entspricht sein Kurvenbegriff nicht ganz den einfachen Kurven. Er setzt nämlich seine Kurven als geschlossen voraus, und um auch Kurvenbogen einzubegreifen, läßt er zu, daß ein solcher Kurvenbogen zweimal durchlaufen werde. Im Grenzfall werden auch Punkte als geschlossene Kurven angesehen (a. a. O. S. 343).

mengentheoretischen Charakter und entsprechen vollständig der Definition II. Dies ist leicht ersichtlich. Was zunächst die gleichmäßig stetigen Funktionen *einer* Variablen betrifft, so ist bei ihnen ein Unterschied zwischen analytischer und mengentheoretischer Definition überhaupt nicht vorhanden; was auch aus der Form hervorgeht, in der ich die Resultate von Ascoli dargestellt habe. Das gleiche gilt aber auch für die von Arzelà betrachteten allgemeineren Bahnkurven; denn die Definition von Arzelà erscheint ausschließlich in dem obigen geometrischen Gewand. Nur eines ist noch besonders zu betonen. Geht man mit Arzelà von einer Folge $\{C_\nu\}$ einfacher *doppelpunktloser* Bahnkurven aus, so braucht sich diese Eigenschaft auf die Grenzelemente C_ω von Folgen $\{C_\nu\}$ nicht zu übertragen; als Grenzelement kann sich gemäß Kap. VI *jede* stetige Bahnkurve einstellen, die durch eine Folge einfacher Kurven gleichmäßig approximiert werden kann, beispielsweise auch die Peanosche.[1])

§ 4. *Fréchets analytische Definition des Grenzelements für Bahnkurven.* Auf wesentlich anderer Grundlage ruht die Einführung des Grenzelements bei Fréchet. Sie ist ausschließlich *analytisch* und bezieht sich damit von selbst auf die *Bahnkurven.* Methodisch knüpft er sie an den Abstandsbegriff an, und zwar folgendermaßen.[2])

Wie in Kap. VI, § 12 erwähnt ist, betrachtet er zwei durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= f(t), & y &= \varphi(t); & 0 \leq t \leq 1 \\ x' &= F(u), & y' &= \Phi(u); & 0 \leq u \leq 1 \end{aligned}$$

dargestellte Bahnkurven C und C' dann und nur dann als identisch, wenn die darstellenden Funktionenpaare durch eine *umkehrbar eindeutige* und stetige Transformation zwischen t und u ineinander übergeführt werden können.[3]) Im Anschluß hieran gibt er folgende Definition des Abstands. Seien die durch die Gleichungen (1) dargestellten Bahnkurven C und C' voneinander verschieden, und seien x, y und x', y' zwei Punkte beider Kurven, die *gleichen* Werten der Parameter t und u entsprechen, so wird die von t abhängige Größe

$$(2)\qquad \delta(t) = \delta(u) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

1) Als Arzelà seine Arbeit veröffentlichte, waren diese Möglichkeiten noch unbekannt.

2) Ich folge zunächst der Fréchetschen Darstellung und gebe erst dann ihren geometrischen Inhalt.

3) Eine stetige Kurve im Sinne von Fréchet ist also eine Punktmenge in Verbindung mit einer bestimmten Anordnung ihrer Punkte. Dieselbe Definition gibt schon Lebesgue in seiner These S. 71 für Oberflächen.

für alle Werte von t ein *Maximum* Δ haben. Diese Werte Δ haben für alle zulässigen analytischen Darstellungen von C und C' wiederum eine *untere Grenze* d, und sie definiert Fréchet als den *Abstand* von C und C'; ich bezeichne ihn durch

$$d(C, C') = d.$$

Die so definierte Größe d erfüllt die allgemeinen Eigenschaften des Abstandsbegriffs; sie ist dann und nur dann Null, wenn C und C' identisch sind; sie ändert sich nicht, wenn man C und C' vertauscht, und sie genügt ersichtlicherweise der Relation

(3) $$d(C, C') + d(C' C'') \geq d(C, C'').$$

Sie kann daher in gleicher Weise zur Definition des Grenzelements benutzt werden, wie der Abstandsbegriff im R_n. Demgemäß definieren wir:

VII. *Die Bahnkurve C_ω heißt dann und nur dann Grenzelement der Bahnkurven $\{C_\nu\}$, wenn der Abstand $d(C_\omega, C_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert; das darstellende Funktionenpaar von C_ω ist also*

(4) $$f_\omega(t) = \lim f_\nu(t), \qquad \varphi_\omega(t) = \lim \varphi_\nu(t).$$

Über die mengentheoretische Bedeutung dieser Definition und ihr Verhältnis zu der Definition von Arzelà geben die folgenden Bemerkungen Aufschluß.

1) Die Abstandsdefinition für die Bahnkurven C und C' hat folgenden geometrischen Inhalt. Zunächst folgert man aus ihr unmittelbar die Existenz einer solchen eineindeutigen Zuordnung beider Bahnkurven, daß die Entfernung zweier entsprechender Punkte niemals größer als d ist. Sind ferner c und c' zwei entsprechende Punkte, so hat man

(5) $$\varrho(c, c') \geq \varrho(c, C') \quad \text{und} \quad \varrho(c, c') \geq \varrho(c', C).$$

Diese Relation gilt für jedes Paar entsprechender Punkte und erlaubt daher, von den Bahnkurven zu den Punktmengen überzugehen. Werden diese durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ bezeichnet, so besteht gemäß (5) für *jeden* Punkt s von $\mathfrak{S}$ und für *jeden* Punkt s' von $\mathfrak{S}'$ die Relation

$$\varrho(s, \mathfrak{S}') < d \quad \text{und} \quad \varrho(s', \mathfrak{S}) \leq d.$$

Hierin drückt sich die Fréchetsche Abstandsdefinition geometrisch aus.

2) Die Fréchetsche Definition des Grenzelements überträgt sich daher folgendermaßen auf die Punktmengen. Sind wieder $\{\mathfrak{S}_\nu\}$ und $\mathfrak{S}_\omega$ die zu den Bahnkurven $\{C_\nu\}$ und C_ω zugehörigen Punktmengen, und ist s_ν ein Punkt von $\mathfrak{S}_\nu$, und s_ω ein Punkt von $\mathfrak{S}_\omega$, so müssen notwendig die Relationen

$$\varrho(s_\omega, \mathfrak{S}_\nu) \leq d_\nu \quad \text{und} \quad \varrho(s_\nu, \mathfrak{S}_\omega) \leq d_\nu$$

bestehen, wenn $d_\nu = d(C_\nu, C_\omega)$ den Fréchetschen Abstand von C_ν und C_ω darstellt. Dies ist aber die Bedingung, die Arzelà für seine Definition benutzt. Infolgedessen besteht auch bei Fréchet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz mindestens eines Grenzelements für jede Folge $\{C_\nu\}$ in der gleichmäßigen Stetigkeit aller Funktionenpaare (vgl. jedoch unter 4).[1])

3) Andererseits bedarf es kaum des besonderen Hinweises, daß die Fréchetsche Definition des Grenzelements, insofern sie die Bahnkurven betrifft, wesentlich enger ist, als die von Arzelà. Das Grenzelement der Bahnkurven $\{C_\nu\}$ ist wieder eine Bahnkurve, oder analytisch gesprochen, eine *spezielle* stetige Darstellung der Punktmenge $\mathfrak{S}_\omega$ mittels eines *speziellen* Funktionenpaares, nämlich mittels desjenigen, das durch die speziellen Darstellungen der Punktmengen $\{\mathfrak{S}_\nu\}$ gemäß Gl. (4) bestimmt wird.

4) Dies bedarf jedoch einer gewissen Erläuterung. Wie wir oben erwähnten, sind zwei Bahnkurven *identisch*, wenn sich ihre Gleichungen durch eine umkehrbar eindeutige und stetige Transformation ineinander überführen lassen. Hieraus ergibt sich eine bemerkenswerte Folgerung. Es ist nämlich möglich, stetige Darstellungen einer Kurvenmenge anzusetzen, die analytisch nicht gegen ein stetiges Funktionenpaar konvergieren, während die zugehörigen Punktmengen und im Sinn von Fréchet auch die Bahnkurven ein Grenzelement besitzen. Gemäß (2) hat man zu diesem Behuf solche stetigen Darstellungen dieser Punktmengen zu benutzen, die *nicht gleichmäßig* stetig sind. Ein einfachstes Beispiel erhält man, wenn man stetige Darstellungen *derselben* Punktmenge ins Auge faßt. Man wähle z. B. als Punktmenge eine Einheitsstrecke $l = p_0 p$ und auf ihr eine gegen den Endpunkt p konvergierende Punktfolge $\{p_\nu\}$ und bestimme das Funktionenpaar

$$x = f_\nu(t), \qquad y = \varphi_\nu(t)$$

so, daß dem Wert $t = 1/\nu$ der Punkt p_ν der Strecke s entspricht, und daß den Intervallen $0 \leq t \leq 1/\nu$ und $1/\nu \leq t < 1$ die beiden Intervalle $p_0 p_\nu$ und $p_\nu p$ der Strecke l linear entsprechen, so ist das zu den Funktionen $f_\nu(t)$, $\varphi_\nu(t)$ im analytischen Sinne zugehörige Paar von Grenzfunktionen $f_\omega(t)$ und $\varphi_\omega(t)$ von der Art, daß es sich geometrisch auf die beiden Endpunkte der Strecke reduziert; dem Wert $t = 0$

1) Fréchet bezeichnet das Bahnkurvenstück, das allen Werten $t_0 \leq t < t_1$ entspricht, als einen *Bogen* der Bahnkurve. Dann kann mit ihm die gleichmäßige Stetigkeit der Funktionenpaare $f_\nu(t)$ und $\varphi_\nu(t)$ auch als gleichmäßige Teilbarkeit der Bahnkurven C_ν bezeichnet werden. Beide Begriffe sind ersichtlicherweise äquivalent.

entspricht der Anfangspunkt p_0 und jedem Wert $t > 0$ der Endpunkt p[1]).

Wird jetzt dies Beispiel so abgeändert, daß man eine Menge paralleler Strecken $\{l_\nu\}$ gleicher Länge benutzt, die sich gegen *eine* ihnen gleiche Strecke verdichten, und die Strecke l_ν als die Punktmenge betrachtet, auf der die Bahnkurve C_ν enthalten ist, so gilt für die zugehörigen Grenzfunktionen $f_\omega(t)$ und $\varphi_\omega(t)$ noch das gleiche. Trotzdem muß man aber den so definierten Bahnkurven auch im Sinne von Fréchet ein Grenzelement beilegen. Man kann nämlich in jeder der darstellenden Funktionen $f_\nu(t)$ und $\varphi_\nu(t)$ die Variable t durch eine neue Variable u so ersetzen, daß alle Strecken l_ν mit *gleichmäßiger* Stetigkeit von dem beweglichen Punkt durchlaufen werden, z. B. so, daß einem jeden Wert von u auf allen Strecken l_ν *derselbe* Punkt entspricht. Dann definieren die so entstehenden gleichmäßig stetigen Darstellungen noch die *nämlichen* Bahnkurven, wie die obigen Gleichungen, und diese haben daher in der Tat ein Grenzelement.

Um also behaupten zu können, daß Bahnkurven ein Grenzelement *nicht* besitzen, genügt es nicht, nur *eine einzige* analytische Darstellung in Betracht zu ziehen. Die ungleichmäßige Stetigkeit der darstellenden Funktionenpaare könnte eine zufällige sein.[2])

Fréchet gibt das folgende Beispiel. Sei eine stetige Bahnkurve C durch die Gleichungen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

dargestellt, und sei $\{C_\nu\}$ eine Kurvenmenge, deren Gleichungen

$$x = \frac{1}{\nu} + f_\nu(t), \quad y = \frac{1}{\nu} + \varphi_\nu(t)$$

sind, so ist C ihr Grenzelement. Man kann nun bei der Kurve C_ν den Parameter t gemäß der Gleichung

$$t = e^{-\nu\frac{1-u^2}{u^2}}, \quad 0 < u \leq 1$$

durch u ersetzen, so werden die so entstehenden Gleichungen der Kurven C_ν nicht mehr gleichmäßig stetig sein.

§ 5. *Die Grundlagen der Punktmengentheorie.* Den Hauptgegenstand aller mengentheoretischen Betrachtungen über Mengen von Funktionen bildet die Frage, ob und wie weit man die Sätze der Punkt-

1) Vgl. Fréchet, a. a. O. S. 57.

2) Hierin liegt also eine gewisse Unbestimmtheit.

mengentheorie auf sie übertragen kann. Ihrer Beantwortung muß eine Analyse der in diese Sätze eingehenden Voraussetzungen vorangehen.

Die Theorie der Punktmengen ruht einerseits auf den allgemeinen Sätzen der abstrakten Mengenlehre, andererseits auf geometrischen Tatsachen, die ausdrücken, daß die Punktmengen Bestandteile des stetig ausgedehnten Raumes sind und daher an allen Eigenschaften dieses Raumes teilhaben. Im wesentlichen sind diese Eigenschaften in Kap. IV, § 2 enthalten; sie gruppieren sich um die Begriffe des *Abstandes*, der *Fläche* und der *Flächenzahl*, sowie der *Gebietsteilung*. Grundlegend ist hier der Satz, daß jeder Würfel in eine endliche Zahl von gleichen Teilen zerlegt werden kann, die mit wachsender Zahl unendlich klein werden. *Er bildet die wesentliche Quelle der weiteren Schlüsse.*[1])

Ein analoger Satz ist für Mengen allgemeiner Art schon deshalb nicht vorhanden, weil er ohne eine Maßbestimmung seinen Sinn verliert. Wir müssen daher die Grundlagen der Punktmengentheorie in der Weise weiter zergliedern, daß wir die aus ihm ableitbaren Folgerungen einzeln ins Auge fassen. Solcher sind zunächst zwei zu nennen. Erstens das Bolzano-Weierstraßsche Theorem, das jeder unendlichen Punktmenge mindestens einen Grenzpunkt zulegt, und zweitens der Satz, daß die Ableitung eine abgeschlossene Menge ist. Keine dieser beiden Eigenschaften braucht für Mengen allgemeiner Art erfüllt zu sein. Eine volle Prüfung der in ihnen enthaltenen grundlegenden Annahmen und ihrer gegenseitigen Beziehung zueinander ist noch nicht vorhanden. Wir besitzen nur einige von Fréchet stammende Beiträge. Er hat insbesondere Mengen aufgestellt, für die die beiden genannten Eigenschaften nicht erfüllt sind; diese erörtere ich zunächst.

Sei $\mathfrak{M} = \{m\}$ eine irgendwie definierte Menge. Es mag offen bleiben, ob wir sie als das Operationsgebiet betrachten, innerhalb dessen wir Teilmengen und deren Eigenschaften ins Auge fassen, oder ob sie selbst als Teilmenge einer umfassenderen Menge $\mathfrak{N}$ gedacht wird. Wie dem auch sei, wir nehmen jedenfalls an, daß es möglich ist, für Folgen $\{m_\nu\}$ der Menge $\mathfrak{M}$ Grenzelemente m_ω gemäß der Definition I zu definieren, mögen sie zu $\mathfrak{M}$ oder zu $\mathfrak{N}$ gehören. Mengen, für die dies nicht zutrifft, scheiden aus der Untersuchung aus; für sie verlieren die vorliegenden Probleme ihren Sinn.

Ich erwähne zunächst Mengen, die dem Bolzano-Weierstraßschen Theorem *nicht* genügen, die also Folgen $\{m_\nu\}$ enthalten, denen ein

1) Vgl. auch Cantor, Math. Ann. 23 (1884) S. 455.

Grenzelement nicht zukommt.[1]) Ein Beispiel einfachster Art kann man der Theorie der linearen Ordnungstypen entnehmen (Kap. II, § 9) Es genügt, einen Typus höherer Mächtigkeit herauszugreifen, der $\omega\omega^*$-Lücken enthält; es ist übrigens einleuchtend, daß die in Kap. II enthaltene Definition der ω und ω^*-Elemente eine Definition I darstellt. Ein anderes Beispiel bildet der Hilbertsche R_∞ (Kap. III, § 5), wenn man das Grenzelement p einer Folge $\{p_\nu\}$ in üblicher Weise so definiert, daß der Abstand $\varrho(p, p_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Um eine unendliche Menge von Punkten dieses Raumes zu erhalten, der ein Grenzelement mangelt, betrachte man diejenige Punktmenge $\{p_\nu\}$, deren einzelne Punkte p_ν durch die Koordinaten

$$x_\nu = 1, \quad x_i = 0, \quad i \gtrless \nu$$

definiert sind, und die augenscheinlich einen Grenzpunkt nicht besitzt. Denn der allein in Frage kommende Punkt, dessen sämtliche Koordinaten gleich Null sind, erfüllt diese Bedingung nicht. Ein letztes Beispiel stellt die Menge $\mathfrak{M} = \{f(x)\}$ aller stetigen Funktionen

---

1) Fréchet sieht bei seinen Untersuchungen davon ab, der Zahlenebene ihren unendlich fernen Punkt zu adjungieren, deshalb bilden bei ihm schon die ganzen Zahlen 1, 2, . . ν, . . . eine Menge, zu der es ein Grenzelement nicht gibt.

Im Gegensatz hierzu findet sich sonst vielfach das Bestreben, die Gesamtheiten, mit denen oder innerhalb deren man operiert, wenn nötig, durch Einführung uneigentlicher Elemente in abgeschlossene Mengen umzuwandeln. Dem dient die Einführung der unendlich fernen Geraden der projektiven Ebene ebenso, wie die des unendlich fernen Punktes der komplexen Ebene. Welche Elemente hierzu notwendig und hinreichend sind, bedarf freilich in jedem Fall der Untersuchung. Ich bemerke hierzu, daß diese Frage für den Strahlenraum von E. Study ausführlich erledigt worden ist; er hat die Art, wie man die Gesamtheit der eigentlichen Strahlen durch Schaffung uneigentlicher Elemente in Kontinua verwandeln kann, eingehend behandelt. Dies ist auf verschiedene Weise möglich, je nach den gruppentheoretischen Tatsachen, die man zugrunde legt, und zwar mittels ∞^2 resp. ∞^3 uneigentlicher Strahlen. Vgl. Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 247 ff.

Geht man zu andern Mengen, wie z. B. zu Mengen von Bewegungen oder Projektivitäten über, so wird man auch sie dadurch in abgeschlossene Gesamtheiten verwandeln können, daß man zu ihnen die ausgearteten Bewegungen oder Projektivitäten als uneigentliche Elemente hinzufügt. Doch braucht eine solche Ergänzung keineswegs für jede Menge ausführbar zu sein.

Die Frage der uneigentlichen Elemente spielt übrigens auch für Fréchets Begriff der *Kompaktheit* eine gewisse Rolle. Er betrachtet, wie oben erwähnt, das gesamte Kontinuum nicht als kompakt. Seine Definition der Kompaktheit verlangt jedoch nur, daß man auf *irgendeine Art* ein Grenzelement zu der vorhandenen Menge hinzufügen kann; daher gestattet auch sie die Adjunktion des unendlich fernen Punktes. Bei diesem Sachverhalt könnte also das gesamte Linearkontinuum auch von ihm als eine kompakte Menge bezeichnet werden. Man sieht, daß dem Begriff der Kompaktheit eine gewisse Unbestimmtheit anhaftet. (Vgl. S. 283.)

dar, falls man das Grenzelement durch den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einführt. Denn nicht in jeder Teilmenge $M = \{f_\nu(x)\}$ solcher Funktionen gibt es eine Folge, die gleichmäßig gegen eine eindeutige Funktion konvergiert und damit ein Grenzelement besitzt. Um eine solche Teilmenge zu erhalten, hat man sie gemäß § 6 so auszuwählen, daß ihr keine unendliche Teilmenge gleichmäßig stetiger Funktionen angehört. In Anlehnung an die für Ordnungstypen eingeführten Bezeichnungen kann man Mengen dieser Art als *lückenhaft* bezeichnen, und Mengen, die dem Bolzano-Weierstraßschen Theorem genügen, als *lückenlos*.[1]) Übrigens kann eine und dieselbe Menge bei der einen Definition des Grenzelementes lückenlos sein, bei der anderen lückenhaft.[2])

Für jede Menge $\mathfrak{M} = \{m\}$, für die sich Grenzelemente definieren lassen, kann man auch die Ableitung $\mathfrak{M}'$ bilden; darunter soll die Gesamtheit derjenigen Elemente verstanden werden, die zu irgendwelchen unendlichen Folgen $\{m_\nu\}$ als Grenzelemente gehören. Daß $\mathfrak{M}$ lückenlos ist, daß es also für jede Folge $\{m_\nu\}$ ein Grenzelement gibt, wird nicht vorausgesetzt.

Die so definierte Ableitung braucht aber nicht abgeschlossen zu sein; und zwar soll eine Menge *hier* als *abgeschlossen* bezeichnet werden, wenn sie *alle* Grenzelemente enthält, die ihren Teilfolgen $\{m_\nu\}$ überhaupt zukommen. Man betrachte z. B. alle in einem Intervall $a \cdots b$ stetigen Funktionen $\{f(x)\}$, die zugleich geschränkt sein sollen, als Menge $\mathfrak{M}$ und lege für die Definition des Grenzelementes jetzt die einfache Konvergenz zugrunde. Dann besteht die Ableitung $\mathfrak{M}'$ aus allen Funktionen, die Grenzfunktionen $f_\omega(x)$ einer Folge konvergenter Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ sein können; nach einem bekannten Theorem ist jede derartige Funktion $f_\omega(x)$ stetig oder aber punktweise unstetig; genauer gesprochen ist sie in der Bezeichnung von R. Baire eine Funktion einer der Klassen 0 oder 1.[3]) Umgekehrt ist auch jede Funktion der Klassen 0 oder 1 als Grenzelement einer Folge stetiger Funktionen darstellbar, und daher enthält die Menge $\mathfrak{M}'$ die Gesamtheit aller in derselben Weise geschränkten Funktionen der Klassen 0 und 1. *Diese*

1) Fréchet bezeichnet sie als *kompakt*. Man vergesse nicht, daß das Grenzelement der Menge $\mathfrak{M}$ nicht anzugehören braucht; deshalb ist eine die Sache treffende Bezeichnung schwer zu finden. Es liegt nahe, das Wort *abschließbar* zu wählen. Dies wird später in einem etwas engeren Sinn benutzt; vgl. den Schluß von § 6.

2) Fréchets geschränkter R_∞ genügt dem Bolzano-Weierstraßschen Theorem (Kap. III, § 5), während es der Hilbertsche, wie oben erwähnt, nicht tut. Hierin hat man wohl den Grund für die von Fréchet gewählte Definition des Abstands zu sehen.

3) vgl. Bericht I, S. 234 ff.

Menge $\mathfrak{M}'$ ist aber nicht abgeschlossen. Denn eine aus ihr entnommene Folge kann bereits eine total unstetige Funktion als Grenzelement besitzen.[1]) Geht man im Sinne von Baire zu Funktionen noch höherer Klassen über, was man ins Transfinite fortsetzen kann, so würde erst die Gesamtheit aller Funktionen, deren Klassenordnung $0, 1, 2, \ldots \nu, \ldots \omega, \ldots \alpha, \ldots$ ist, also alle Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse umfaßt, eine abgeschlossene Menge darstellen.

Eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß die Ableitung einer Menge $\mathfrak{M} = \{m\}$ abgeschlossen ist, läßt sich leicht angeben. Sie besteht darin, daß die in der Menge $\mathfrak{M}$ möglichen doppelten Grenzübergänge in gewisser Weise *vertauschbar* sind.

Sei nämlich $\mathfrak{M}' = \{m'\}$ die abgeleitete Menge und $\{m'_\nu\}$ eine Folge von Elementen von $\mathfrak{M}'$, die ein Grenzelement m'' bestimmt. Jedes m'_ν ist als Element von $\mathfrak{M}'$ Grenzelement einer Folge von Elementen von $\mathfrak{M}$; sie sei

$$\{m_{\nu\lambda}\} = \{m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, \cdots m_{\nu\lambda}, \cdots\}.$$

Ist nun die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge in dem Sinne erlaubt, daß jede Folge $\{m_{\nu\lambda}\}$, bei der die Indices ν und λ unabhängig voneinander ins Unendliche wachsen, ebenfalls m'' als Grenzelement besitzt, so gehört auch m'' zu $\mathfrak{M}'$, und $\mathfrak{M}'$ ist also abgeschlossen.[2])

Für die Punktmengen und den in ihnen benutzten Begriff des Grenzpunkts ist diese Eigenschaft unmittelbar erfüllt; umgekehrt ist sie für die ebenerwähnte Erzeugung der Funktionen zweiter Klasse aus den Funktionen erster Klasse nicht erfüllt.

Die Frage, ob die Geltung des Bolzanoschen Theorems die Abgeschlossenheit der Ableitung nach sich zieht, ist von Fréchet nicht untersucht worden. Man kann aber durch ein einfaches Beispiel beweisen, daß dies nicht der Fall ist. Dazu wähle man die Menge $\mathfrak{M}$ als Menge der reellen Zahlen und definiere als Grenzelement einer Folge wachsender oder abnehmender Zahlen $\{m_\nu\}$ ein Element m' von $\mathfrak{M}$ durch die Gleichung

$$m' = \lim m_\nu + 1,$$

wo $\lim m_\nu$ die gewöhnliche Bedeutung hat. Diese Definition genügt der Bedingung I sowie dem Bolzano-Weierstraßschen Theorem. Man sieht aber leicht, daß die Ableitung einer Teilmenge von $\mathfrak{M}$ nicht abgeschlossen ist. Falls nämlich M aus allen Zahlen des Intervalles $0 \,.\,.\, 1$

---

1) vgl. Bericht I, S. 239 ff.

2) Diese Bedingung braucht, wie Fréchet hervorhebt, nur für *irgend* welche ν und λ erfüllt zu sein, die ins Unendliche wachsen; a. a. O. S. 17.

besteht, so besteht M' aus allen Zahlen des Intervalles 1 . . 2, und die Zahl 2 ist das einzige Grenzelement der Ableitung M', das ihr angehört.[1])

§ 6. *Raumhafte Mengen.* Fréchets weitere Untersuchungen haben im wesentlichen das Ziel, für die zu erörternden Mengen der Reihe nach solche Voraussetzungen anzunehmen, daß die Sätze der Punktmengentheorie in steigendem Maße für sie erfüllt sind. Zum besseren Verständnis schicke ich folgende Bemerkung voraus.

In der Theorie der Punktmengen erscheint jede einzelne Menge, die in Betracht gezogen wird, als Teilmenge des Raumes; alle ihre Sätze drücken daher Eigenschaften einer und derselben sie alle umfassenden Gesamtmenge aus, nämlich des R_n. Ebenso ist es für die Ausdehnung der Sätze auf den R_∞. Im Gegensatz hierzu faßt Fréchet jede einzelne Menge, die er betrachtet, zunächst als besonderes Individuum auf, dessen Eigenschaften für sich in Frage kommen. Die Gesamtheit der rationalen Zahlen bildet in dieser Hinsicht ebensowohl eine solche Menge, wie die Gesamtheit aller Funktionen oder die Gesamtheit aller rektifizierbaren Bahnkurven und wie eine einzelne Folge, der ein Grenzelement fehlt oder zugehört. Allerdings führen gewisse Betrachtungen wieder über die einzelne Menge hinaus und lassen sie als Teilmenge einer andern erscheinen.

Augenscheinlich wird hierdurch eine gewisse Unbestimmtheit in die Begriffsbestimmung eingeführt. Der tatsächliche Ausgleich besteht darin, daß in den einzelnen Fällen Gesamtmengen *einheitlichen Charakters* auftreten, die in derselben Weise den Rahmen der Untersuchung abgeben, wie der Gesamtraum für die in ihm enthaltenen Punktmengen.[2])

Fréchet bezeichnet die oben als *lückenlos* eingeführten Mengen $\mathfrak{M}$ als *kompakt*, und zwar ist es, wie er erwähnt, gleichgültig, ob ein der Folge $\{m_\nu\}$ entsprechendes Grenzelement der Menge $\mathfrak{M}$ angehört oder nicht; auch die geschränkten rationalen Zahlen bilden in diesem Sinn eine kompakte Menge.[3]) Diese Mengen spezialisiert er weiter in der Weise,

1) Man kann allgemeiner folgende Vorschrift treffen. Man denke sich zwei Kontinua $\mathfrak{M} = \{m\}$ und $\mathfrak{N} = \{n\}$ umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abgebildet und ordne der Folge $\{m_\nu\}$ dasjenige Element zu, das dem Element limes m_ν in der Menge $\mathfrak{N}$ entspricht. Dann wird die Ableitung im allgemeinen nicht abgeschlossen sein.

Man sieht auch leicht, daß für die obige Definition des Grenzelements die Grenzübergänge im Sinne des Textes nicht vertauschbar sind.

2) Fréchet unterscheidet in dieser Hinsicht *Mengen* und *Klassen*. Eine scharfe begriffliche Trennung dieser zwei Worte ist naturgemäß nicht vorhanden.

3) Dies gilt sogar auch schon für die Zahlen $\{1/\nu\}$.

daß er einen Begriff einführt, der den Zweck hat, ein Analogon des Abstandes zu schaffen; ihn benutzt er als Grundlage der Definition des Grenzelements und erreicht so, daß die auf dem Abstand ruhenden Eigenschaften der Punktmengen den so bestimmten Mengen $\mathfrak{M}$ erhalten bleiben. Er nimmt nämlich an, daß man zwei verschiedenen Elementen m und m' eine von Null verschiedene Zahl

$$(1) \qquad d(m, m') = d(m', m) = d$$

zuordnen könne, so daß, wenn

$$d(m, m') < \varepsilon \quad \text{und} \quad d(m, m'') < \varepsilon$$

ist, $d(m', m'')$ mit ε gemäß irgendeinem durch eine Funktion $f(\varepsilon)$ dargestellten Gesetz unendlich klein wird.[1]) Ich werde d als *Distanzwert* bezeichnen.[2]) Dieser Distanzwert kann insbesondere auch die Eigenschaft haben, daß, wenn m, m', m'' irgend drei Elemente sind, die Relation

$$(2) \qquad d(m, m') + d(m', m'') \geq d(m, m'')$$

besteht; doch ist dies an sich nicht nötig. Genügt er dieser Relation, so kann er direkt als *Abstand* zweier Elemente bezeichnet werden.[3])

Der so definierte Distanzwert gestattet unmittelbar die Übertragung der folgenden dem R_n zukommenden Eigenschaft. Man kann alle Punkte m in bezug auf einen und denselben Punkt m' in drei Klassen teilen, je nachdem

$$d(m, m') > \sigma, \quad d(m, m') = \sigma, \quad d(m, m') < \sigma$$

ist. Dies rechtfertigt die formale Übertragung der Worte *Kugel, Inneres* und *Äußeres*. Doch brauchen sich die diesen Begriffen eigentümlichen Eigenschaften keineswegs immer auf die Mengen $\mathfrak{M}$ zu übertragen. Ich werde übrigens statt Kugel *Distanzkugel* sagen.

Mittels des Distanzwertes kann man nun das Grenzelement ganz analog einführen, wie bei den Punktmengen. Fréchet definiert ein Element m dann und nur dann als Grenzelement einer Folge $\{m_\nu\}$, wenn der Distanzwert $d(m, m_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Diese Definition ist zunächst wieder unabhängig davon, ob die Menge $\mathfrak{M}$ lückenhaft ist oder nicht.

Eine unmittelbare Folge dieser Definition ist die, daß innerhalb der Menge $\mathfrak{M}$ die doppelten Grenzübergänge im Sinne von § 5 ver-

1) In der Willkür von $f(\varepsilon)$ liegen die Unterschiede gegen den Raum begründet, von denen in § 7 die Rede ist.

2) Fréchet bezeichnet sie als *voisinage*, a. a. O. S. 18.

3) Ein Beispiel bildet der in § 4 eingeführte Abstandsbegriff für Bahnkurven. Es ist ersichtlich, daß die dort enthaltenen Begriffsbestimmungen mit Rücksicht auf das obige geformt sind.

tauschbar sind; die Ableitung ist daher *abgeschlossen.* Auch dies gilt für jede derartige Menge.

Die weiteren Untersuchungen knüpfen sich im wesentlichen an solche Mengen dieser Gattung, die *nicht lückenhaft* sind; jede ihrer Folgen $\{m_\nu\}$ bestimmt also mindestens ein Grenzelement, analog wie jede Punktmenge des R_n; auch ist ihre Ableitung eine abgeschlossene Menge. Die Analogie zum R_n geht aber noch weiter. Für eine solche Menge $\mathfrak{M} = \{m\}$ besteht nämlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Folge $\{m_\nu\}$ ein einziges Grenzelement besitzt, in bekannter Weise darin, daß für *gegebenes* ε, *geeignetes* N und *jedes* $\nu > N$ der Distanzwert $d(m_\nu, m_{\nu+\varrho}) < \varepsilon$ bleibt. Zunächst ist klar, daß die Bedingung notwendig ist. Ist sie andererseits erfüllt, und ist m' ein Grenzelement der Folge $\{m_\nu\}$, so gibt es in ihr eine Teilmenge $\{m_{\nu_\lambda}\}$, so daß bei vorgegebenem η für ein bestimmtes N und jedes $\nu_\lambda > N$ der Distanzwert $d(m', m_{\nu_\lambda}) < \eta$ ausfällt. Ferner gibt es auch ein M, so daß für jedes $\mu > M$ der Wert $d(m_\mu, m_{\mu+\varrho}) < \eta$ ist. Wählt man nun η in der Weise, daß $f(\eta) = \varepsilon$ ist, so folgt, daß auch für jedes ν, das größer als N und M ist, $d(m', m_\nu) < \varepsilon$ ist; d. h. m' ist das einzige Grenzelement.

Ich schließe mit folgender Bemerkung, die die Bezeichnungen betrifft. Eine nicht abgeschlossene Menge $M = \{m\}$ dieser Art kann stets als Teilmenge einer umfassenderen abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ betrachtet werden. Will man zu umfassendsten oder doch möglichst umfassenden Mengen dieser Art übergehen, so wird man sie überdies als *perfekt* zu wählen suchen; und zwar scheint es zweckmäßig, den Begriff *perfekt* auf solche Mengen zu beschränken, die *in sich dicht*, *abgeschlossen* und *nicht lückenhaft* sind, genau wie die perfekten Mengen des R_n. In diesem Sinn bildet also der Fréchetsche geschränkte R_∞ (Kap. III, § 4) eine perfekte Menge. Betrachtet man wieder Teilmengen solcher perfekten Mengen, und will man noch besonders darauf hinweisen, daß man es mit nicht lückenhaften Gesamtmengen zu tun hat, so könnte man die *Teilmengen* M einer solchen Menge $\mathfrak{M}$ als *abschließbar* bezeichnen und die Bezeichnung *kompakt* nötigenfalls auf die Menge $\mathfrak{M}$ selbst beschränken. Meines Erachtens ist aber eine eigene Bezeichnung hier entbehrlich, wenn man sich entschließt, dem Begriff *perfekt* den obigen Sinn zu geben.[1])

---

1) Fréchet bezeichnet sogar auch die Gesamtheit der rationalen Zahlen in dem Fall als *perfekt*, daß man von der Existenz oder Einführung der irrationalen Zahlen (gemäß Kronecker) absieht (a. a. O. S. 24), da alsdann jedes Element ein Grenzelement ist und jedes vorhandene Grenzelement zur Menge gehört. Eine Menge, die kompakt und abgeschlossen ist, bezeichnet er als *extrémal* (a. a. O. S. 7).

Gemäß § 5 stellt der Hilbertsche R_∞ keine perfekte Menge dar. Er zeigt also die Notwendigkeit, auch solche *Gesamtmengen* in Betracht zu ziehen, die *lückenhaft* sind. Ihre Teilmengen könnte man, falls sie die S. 281 genannte Eigenschaft haben, *relativ abgeschlossen* nennen, und in demselben Sinn das Wort *relativ perfekt* benutzen. Auf Teilmengen von ihnen, die *nicht* lückenhaft sind, könnte man das Wort *abschließbar* ausdehnen oder es ganz auf sie beschränken. Doch mag es genügen, auf die Begriffsinhalte kurz hinzuweisen. Jedenfalls empfiehlt es sich wohl, dem Begriff *perfekt* die obige Bedeutung zu lassen.

§ 7. *Die Übertragbarkeit der Punktmengensätze.* Im Mittelpunkt der Punktmengentheorie stehen folgende zwei Sätze; erstens das *Haupttheorem* und zweitens das *Borelsche* Theorem. Sie stehen in der Beziehung zueinander, daß das Borelsche Theorem den Beweisgrund des Haupttheorems abzugeben vermag, doch ist das Haupttheorem auch unabhängig davon beweisbar. Als gemeinsame Quelle benutzen sie den im Beginn des § 5 genannten Satz über die Gebietsteilung. Dieser hat sich auf die vorstehenden Mengen *nicht* übertragen lassen; infolgedessen gelten auch die Punktmengensätze nur in beschränktem Umfange.

Von den in Geltung bleibenden Sätzen führe ich zunächst diejenigen an, die für den im Bericht I enthaltenen Beweis des Haupttheorems benutzt werden. Es sind die folgenden.

1) Wird eine abgeschlossene Menge Q in die Form

$$Q = P + Q'$$

gesetzt, so daß Q' die Ableitung darstellt, so ist P eine höchstens abzählbare Menge. Fréchet beweist ihn folgendermaßen. Sei p ein Element von P, q' ein Element von Q' und $d(p, q')$ der zugehörige Distanzwert, so folgt zunächst, daß die untere Grenze der zu demselben Element p gehörigen Werte $d(p, q')$ für alle Elemente von Q' nicht Null sein kann; denn sonst wäre p Grenzelement von Elementen von Q' und daher selbst Element von Q'. Sei d_p dieser untere Grenzwert. Man hat jetzt nur zu zeigen, daß es nur eine endliche Zahl von Elementen p geben kann, für die $d_p > \sigma$ ausfällt, bei beliebigem endlichem σ. Dies kann leicht geschehen. Gäbe es nämlich unendlich viele, so hätten sie mindestens ein Grenzelement; dies gehörte aber zu Q', und es gäbe daher in der Menge P unter den hier betrachteten Elementen p auch solche, für die d_p unter jede Größe ε sinkt, was jedoch der vorstehenden Annahme widerspricht.

Auf Grund dieses Satzes kann man den im Bericht enthaltenen Abspaltungsprozeß unverändert übertragen. Er stützt sich nur auf den

Übergang von $\{\nu\}$ zu ω; nämlich auf den Satz, daß es für jede Folge abgeschlossener Mengen $\{Q_\nu\}$, bei denen $Q_{\nu+1}$ Teilmenge von Q_ν ist, mindestens ein allen Q_ν gemeinsames Element gibt. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der in der Definition I enthaltenen Eigenschaften des Grenzelements und führt daher keine neue Tatsache in die Beweisführung ein. Man erhält also, wie im Bericht I,

$$Q = \sum Q_i^{(\beta)} + Q^\Omega,$$

wo jedes $Q_i^{(\beta)}$ eine abzählbare Menge ist.

2) Ist Q eine abgeschlossene Menge und r ein nicht zu Q gehöriges Element, so gibt es für die Distanzwerte $d(r, q)$ für alle Elemente von Q eine untere Grenze $d_r(Q)$, die nicht Null ist. Denn sonst könnte man aus Q eine Folge $\{q_\nu\}$ auswählen, so daß $d(r, q_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergierte, und da Q abgeschlossen ist, so müßte r ein Element von Q sein. Ist daher $R = \{r\}$ eine beliebige Menge, von der kein Element zu Q gehört, wird sodann eine gegen Null konvergierende Folge $\{\delta_\nu\}$ beliebig angenommen und durch R_ν die Teilmenge von R bezeichnet, für die

$$\delta_\nu > d_r(Q) \geqq \delta_{\nu+1}$$

ist, so muß jedes Element von R einer und nur einer der Mengen R_ν angehören.

3) Kein Element der Ableitung R_ν' einer dieser Mengen R_ν kann zu Q gehören, denn sonst würde es in R_ν eine Folge $\{r_\nu\}$ geben, deren Distanzwerte in bezug auf ein Element von Q gegen Null konvergieren.

Außer den vorstehenden Sätzen benutzt der im Bericht I enthaltene Beweis noch den Satz, daß, wenn $P^\Omega = 0$ ist, die Menge Q abzählbar ist. *Dieser Satz läßt aber eine unmittelbare Übertragung nicht zu.* Sein Beweis beruht nämlich wesentlich auf dem im Beginn von § 5 genannten Zerlegungssatz.[1])

Ebensowenig läßt sich der Lindelöfsche Beweis des Haupttheorems übertragen. Er beruht nämlich auf dem Borelschen Theorem, das ebenfalls eine Übertragung nicht gestattet. Um dies zu zeigen, knüpfe ich an denjenigen Beweis des Borelschen Theorems an, der in diesem Bericht (Kap. III, § 2) enthalten ist; er zerfällt in zwei Teile. Der zweite, der die Konstruktion der Bereiche enthält, beruht wiederum auf dem im § 5 genannten Zerlegungssatz, ist also nicht übertragbar. Dagegen beruht der erste auf einem Punktmengensatz, der auf unsere Mengen übertragbar ist und für sie folgende Form annimmt:

1) vgl. Näheres in Kap. VIII, § 1.

4) Es gibt keine unendliche Menge von Distanzkugeln, die außerhalb voneinander liegen, und deren Radien eine gegebene Größe $\sigma > 0$ übersteigen.

Gäbe es nämlich unendlich viele Elemente m_ν, so daß alle um sie mit dem Radius $\varrho > \sigma$ gelegten Distanzkugeln K_ν außerhalb voneinander lägen, so hätten sie mindestens ein Grenzelement m', und in jeder Umgebung von ihm gäbe es Elemente m_λ und m_ν, so daß der Distanzwert $d(m_\lambda, m_\nu) < \varepsilon$ ausfiele.[1] Dann würde aber m_λ zum Inneren von K_ν und m_ν zum Innern von K_λ gehören, im Widerspruch gegen die Annahme.

5) Aus diesem Satz folgt übrigens sofort der Cantorsche Gebietssatz, der aussagt, daß es in jedem R_n nur eine abzählbare Menge von Gebieten ohne gemeinsame Punkte geben kann. Dieser Satz ist also ebenfalls übertragbar.

Das Borelsche Theorem beruht nun im ersten Teil seines Beweises auf dem Satz 4); aus ihm wird a. a. O. gefolgert, daß die untere Grenze der in Betracht kommenden Kugelradien nicht Null sein kann. Dies könnte also auch hier geschehen. Es tritt aber hier noch ein Umstand auf, der die merkwürdige Folge hat, daß das Borelsche Theorem ohne Annahme neuer Voraussetzungen überhaupt seinen Sinn verliert. Das Borelsche Theorem setzt nämlich fest (S. 77), daß man von solchen Bereichen absehen soll, die ganz innerhalb anderer Bereiche liegen; es beruht also darauf, daß, wenn ein Punkt p *innerhalb* eines solchen Bereiches liegt, auch noch eine gewisse *Umgebung* dieses Punktes existiert, deren *sämtliche* Punkte ebenfalls innerhalb des Bereiches enthalten sind. Hierin steckt eine Annahme, die sich für unsere Mengen keineswegs von selbst versteht, und in der Tat braucht sie nicht erfüllt zu sein. Damit verliert aber der Inhalt des Borelschen Theorems zunächst seinen Sinn.

Dies läßt sich durch ein Beispiel belegen, dessen gelegentliche Kenntnis ich Fréchet verdanke. Man wähle als Menge $\mathfrak{M} = \{m\}$ die Zahlen des Linearkontinuums und definiere den Distanzwert zweier Elemente m' und m'' folgendermaßen. Ist mindestens eine der beiden Zahlen m' und m'' ein unendlicher Dezimalbruch, so soll der absolute Betrag der Differenz $m' - m''$ den Distanzwert darstellen; sind aber beide Dezimalbrüche endlich, so wird als Distanzwert die um eine Einheit der letzten Stelle verminderte Differenz gewählt[2]). Diese Definition erfüllt die in § 6 aufgestellten Bedingungen. Für sie trifft aber die obengenannte Eigenschaft, wie man leicht zeigt, nicht zu. Um ein

1) Dies folgt unmittelbar aus den obigen Festsetzungen über den Distanzwert.

2) Für 0,347 und 0,244 ist also 0,102 der Distanzwert.

Beispiel zu geben, so betrachte man die um den Punkt $m' = 0{,}3$ mit dem Radius $r = 0{,}0465$ gelegte Distanzkugel und wähle eine Folge unendlicher Dezimalbrüche $\{m_\nu\}$ so, daß $m_\nu = 0{,}3465\,(\nu)\cdots$ ist, und zwar bedeutet (ν), daß auf 0,3465 zunächst ν Nullen folgen. Dann ist $m = 0{,}3465$ das Grenzelement von $\{m_\nu\}$, und man hat

$$d(m, m') = 0{,}0464, \quad d(m', m_\nu) = 0{,}0465(\nu)\cdots, \quad \lim d(m', m_\nu) = 0{,}0465.$$

Während also alle Elemente m_ν *außerhalb* der um m' mit dem Radius 0,0465 gelegten Distanzkugel K liegen, ist das Grenzelement m *innerhalb* von ihr enthalten; es können daher auch nicht alle Punkte irgendwelcher Umgebung von m ganz innerhalb von K liegen.

Will man also das im Borelschen Theorem enthaltene Problem übertragbar machen, so muß man eine neue Voraussetzung einführen; hinreichend ist insbesondere die, daß aus

$$m = \lim m_\nu$$

auf das Bestehen der Relation

$$d(m, n) = \lim d(m_\nu, n) \tag{3}$$

geschlossen werden kann. Dies ist offenbar eine Folge der Relation (2) von § 6, doch braucht das Umgekehrte nicht notwendig der Fall zu sein.[1]) Ich werde Mengen, deren Distanzwert der vorstehenden Relation (3) genügt, als *raumhaft* bezeichnen.

Die Fréchetsche These geht in etwas anderer Weise vor, um eine in ihr enthaltene besondere Form des Borelschen Satzes zu beweisen. Dieser betrifft die beschränkende Annahme, daß die Menge der vorhandenen Bereiche *abzählbar* ist, und lautet folgendermaßen:

Gibt es für eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{M} = \{m\}$ eine abzählbare Menge von Bereichen $\{K_\nu\}$ von der Art, daß jedes Element der Menge $\mathfrak{M}$ inneres Element mindestens eines dieser Bereiche ist, so kann man aus $\{K_\nu\}$ eine endliche Menge der gleichen Beschaffenheit auswählen.

Dieser Satz ist, wie das obige Beispiel zeigt, ohne Hinzunahme einer neuen Voraussetzung über den Distanzwert oder einer ihr sachlich gleichwertigen Festsetzung nicht beweisbar. Er wird es, falls wir annehmen, daß der Distanzwert der Bedingung 3) genügt; wenn wir also zu raumhaften Mengen übergehen. Für sie gibt es zu jedem innern Element eines Bereiches auch immer eine gewisse *Umgebung*, die ebenfalls innerhalb des Bereiches liegt.

1) Dies kann man erreichen, wenn man $d(m_\nu, n)$ so in den Grenzwert übergehen läßt, daß es sich ihm, wie im obigen Beispiel, nicht monoton nähert.

Fréchet geht, um dies zu erreichen, in der Weise vor, daß er den Begriff der *inneren* Elemente von vornherein so einführt, daß die obenerwähnte Möglichkeit ausgeschlossen wird. Ist nämlich P eine beliebige Menge und $\mathfrak{K}(P)$ wieder ihre Komplementärmenge, so definiert er als *innere* Punkte solche, die nicht Grenzpunkte von Punkten der Komplementärmenge sind. Auf die nähere Erörterung ihrer Tragweite und der aus ihr für den Distanzwert fließenden Folgerungen, wie ich sie oben gegeben habe, geht er allerdings nicht ein.[1]) Doch mußte darauf hingewiesen werden, daß diese Definition mit den in § 4 an die Distanzkugel angeschlossenen Worten Äußeres und Inneres, die seine These sachlich ebenfalls enthält, nicht identisch ist.

Den Beweis führt er folgendermaßen. Träfe der Satz nicht zu, so gäbe es für *jede* endliche Menge von Bereichen K_ν mindestens ein Element von $\mathfrak{M}$, das nicht in ihrem Innern liegt. Sei m_1 ein solches Element für K_1, und sei K_λ der erste Bereich der Menge $\{K_\nu\}$, der m_1 einschließt. Dann gibt es mindestens ein Element m_2, das nicht im Innern eines der Bereiche $K_1, K_2, \cdots K_\lambda$ liegt; sei wieder $K_\mu\ (\mu > \lambda)$ der erste Bereich, der m_2 einschließt. Mit ihm definiere man analog ein Element m_3, das in keinem der Bereiche $K_1, K_2, \ldots K_\lambda, \ldots K_\mu$ enthalten ist, und kann so unbegrenzt fortfahren. Man erhält so die Elemente

$$m_1, m_2, m_3, \ldots m_\lambda \ldots,$$

und diese haben mindestens ein Grenzelement m'. Für dieses Element m' existiert wieder ein Bereich K', der es einschließt; in der geordneten Menge $\{K_\nu\}$ sei es der Bereich $K' = K_\varrho$. Sei ferner m' Grenzelement der Folge $\{m_{\nu_\lambda}\}$, so gibt es eine Zahl N, so daß für jedes $\nu_\lambda > N$ das Element m' nicht innerhalb von K_ϱ liegt. Dies könnte daher auch für das Grenzelement m' auf Grund der obigen Begriffsbestimmungen nicht der Fall sein.[2])

Angesichts der Unmöglichkeit, das Haupttheorem und das Borelsche Theorem auf die allgemeinen raumhaften Mengen auszudehnen, bewegen sich Fréchets weitere Untersuchungen nach folgenden Richtungen.

---

1) Fréchet bezeichnet die so definierten Elemente als *intérieur au sens étroit.* Man vgl. die S. 112 Anm. 1 enthaltene Bemerkung über die Verschiedenheit des deutschen und des französischen Gebietsbegriffs. Unser Begriff „innerer" Punkt ist im R_n mit intérieur au sens étroit identisch. Die obige Definition Fréchets stimmt mit der von Jordan überein; diese erweist sich also mengentheoretisch als sehr zweckmäßig.

2) a. a. O. S. 28. Man sieht zugleich, daß die obige Festsetzung für diesen Schluß nötig ist.

Er leitet erstens die Sätze ab, die für seine Mengen an die Stelle des Haupttheorems treten; ich begnüge mich, den folgenden anzuführen, der die Stelle des Haupttheorems vertritt:

Jede abgeschlossene raumhafte[1]) *Menge, die Grenzelemente nicht abzählbarer Ordnung besitzt, läßt sich in zwei Bestandteile R und S zerlegen, so daß R abzählbar ist und aus Punkten von höchstens abzählbarer Ordnung besteht, während S perfekt ist*[2]).

Die Abweichung vom Haupttheorem besteht also darin, daß man Grenzelemente nicht abzählbarer Ordnung als vorhanden voraussetzt. Dies entspricht dem oben unter 3) erwähnten Umstand, daß hier aus der Gleichung $Q^{\Omega} = 0$ auf die Abzählbarkeit von Q nicht geschlossen werden kann.

Zweitens macht er eine neue Annahme, die auch den Beweis des *allgemeinen* Borelschen Theorems gestattet. Sie besagt, daß es in jeder perfekten Menge $\mathfrak{M}$ eine *abzählbare* Teilmenge M geben soll, deren Ableitung die Menge $\mathfrak{M}$ ist. Dieser Satz ist in der Punktmengentheorie bekanntlich erfüllt. In ihm kommt die Tatsache zum Ausdruck, daß die perfekten Punktmengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen. Wird er für irgendeine perfekte Menge vorausgesetzt, so wird ihr dadurch von vornherein ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ auferlegt. Seine Annahme bedeutet also die Beschränkung auf perfekte Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Mengen dieser Art nennt er *separabel*. Der Grund ist wohl der, daß diese Annahme in allen den Fällen realisiert ist, die er später untersucht.

Diese Annahme gestattet zunächst folgenden Satz zu beweisen:

Gibt es für eine abgeschlossene separable raumhafte Menge eine *nicht abzählbare* Menge von Bereichen $\{K\}$, so daß jedes Element m von $\mathfrak{M}$ inneres Element mindestens eines Bereiches K ist, so gibt es auch eine *abzählbare* Teilmenge dieser Bereiche von gleicher Beschaffenheit.

Durch diesen Satz ist nunmehr die Grundlage vorhanden, um das Borelsche Theorem in seinem allgemeinsten Umfange behaupten zu können; denn aus dem obenstehenden Spezialfall des Borelschen Theorems folgt nun schließlich, daß für die so definierten Mengen in allen Fällen auch eine endliche Bereichmenge zu dem gleichen Zwecke hinreicht. Die Notwendigkeit, die besondere Definition der *inneren* Punkte oder aber die Relation (3) als geltend anzunehmen, bleibt übrigens auch hier bestehen.

1) Die Fréchetschen Sätze beziehen sich übrigens allgemeiner auch auf solche Mengen, für die die Relation (3) nicht besteht.

2) Die Definition der Elemente abzählbarer und nicht abzählbarer Ordnung geschieht wie in Kap. III, § 1. Sie ruht nur auf dem Satz 2) und den Mächtigkeitsbegriffen.

Den Beweis kann man folgendermaßen führen.[1] Sei $M = \{m_\nu\}$ die Teilmenge, so daß $\mathfrak{M} = M'$ ist, so gibt es für jedes Element m von $\mathfrak{M}$ mindestens ein Element m_ν, so daß $d(m, m_\nu) < \varepsilon$ ist, bei beliebig kleinem ε. Sei nun K der Bereich, der das Element m einschließt, so gibt es den obigen Annahmen gemäß auch eine gewisse Umgebung K' von m, die ganz dem Bereich K angehört. Hieraus läßt sich nun folgern, daß man ein Element m_ν so finden kann, daß erstens ein um m_ν gelegter Bereich K_ν ganz innerhalb K liegt, und daß ihm zweitens das Element m als inneres Element angehört.[2] Jedes Element m von $\mathfrak{M}$ liegt also bereits innerhalb eines Bereiches, dessen Zentrum ein Element m_ν von M ist. Sei η der Radius dieses Bereichs $K_\nu(\eta)$, so gibt es für alle zu dem gleichen Zentrum m_ν gehörigen Werte von η eine obere Grenze ϱ, und diese definiert ihrerseits einen Bereich $K_\nu(\varrho)$, der jeden Bereich $K_\nu(\eta)$ und damit auch jedes zugehörige Element m einschließt. Da nun jeder Bereich $K_\nu(\eta)$ Teil eines Bereiches K ist, so folgt dies auch für den Bereich $K_\nu(\varrho)$. Daher bestimmen diese sämtlichen Bereiche $K_\nu(\varrho)$ auch eine abzählbare Teilmenge $\{K_\nu\}$ der gegebenen Bereiche von der Eigenschaft, daß jedes Element m von $\mathfrak{M}$ mindestens einem von ihnen als *inneres* Element angehört. Damit ist der Satz auf den spezielleren zurückgeführt. Die so bestimmten Mengen bezeichnet Fréchet als *Normalmengen*. Für sie besteht nunmehr sowohl das Borelsche Theorem, wie auch das Haupttheorem. Ich drücke dies so aus, daß ich sage:

VIII. *Die perfekten raumhaften separablen Mengen (Normalmengen) besitzen Punktmengencharakter.*

§ 8. *Spezielle Mengen mit Punktmengencharakter.* Das einfachste Beispiel bilden, wie bereits in Kap. III, § 4 erwähnt wurde, die Punkte eines geschränkten Bereichs des *Fréchetschen* R_∞. Um dies nachzuweisen, ist entweder zu zeigen, daß für sie das Borelsche Theorem besteht, oder aber, daß der die Ableitung P^Ω betreffende Schluß gezogen werden kann. Beides läßt sich ausführen. Der die Ableitung P^Ω betreffende Schluß beruht auf dem Zerlegungssatz, und dieser bleibt in der Tat gültig. Die in Kap. III, § 4 enthaltenen Fréchetschen Formulierungen laufen nämlich darauf hinaus, die Begriffe des Abstandes und des Grenzelements für *jede Koordinate einzeln* zu bestimmen; man

1) Einen anderen Beweis gibt Fréchet auf Grund seiner Annahmen.

2) Ist ε' der Radius des Bereichs K', so genügt es, ein Element m_ν und eine Größe η so zu bestimmen, daß aus $d(m_\nu, m) < \eta$ und $d(m_\nu, m') < \eta$ auf $d(m, m') < \varepsilon'$ geschlossen werden kann. Dann gehört nämlich jedes Element m' der so definierten Umgebung K_ν von m_ν dem Bereich K' an, und es gehört auch m zu K_ν.

kann daher auch jede gegebene Koordinatendifferenz unbegrenzt halbieren und so das Bolzano-Weierstraßsche Verfahren anwenden.

Um das Borelsche Theorem abzuleiten, hat man zu zeigen, daß ein geschränkter Bereich $\mathfrak{R}$ des R_∞ eine separable Menge ist. Dies tut Fréchet folgendermaßen. Ist $R = \{r\}$ die Menge der rationalen Zahlen, und bezeichnet man durch $P_\nu = \{p_\nu\}$ diejenigen Punkte des R_∞, für die

$$x_1 = r_1, \quad x_2 = r_2, \ldots x_\nu = r_\nu, \quad x_{\nu+\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

ist, wo $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ irgendwelche Zahlen von R sind, so ist jede Menge P_ν abzählbar, und andererseits kann jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ als Grenzpunkt von Punkten der Mengen

$$P_1, P_2, \ldots P_\nu, \ldots$$

angesehen werden; die Menge $\mathfrak{R}$ ist also separabel, und damit das Borelsche Theorem beweisbar. *Damit ist der in Kap. III, § 4 ausgesprochene Satz bewiesen.*

Ein anderes einfaches Beispiel bilden die sämtlichen abgeschlossenen Mengen $\{\mathfrak{T}\}$ eines geschränkten Bereiches, falls man das Grenzelement rein mengentheoretisch auf Grund der Definition II einführt. Diese Definition stützt sich nämlich ausschließlich auf den Begriff des Grenzpunktes, und es gehören dem Grenzelement *alle* Punkte zu, die Grenzpunkte einer Folge $\{t_\nu\}$ sind. Daraus ergibt sich bereits, daß wir es mit einer *raumhaften* Menge $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{T}\}$ zu tun haben. Die Menge ist aber auch separabel. Dies folgt daraus, daß man jede Menge $\mathfrak{T}$ durch Polygone approximieren kann, und zwar folgendermaßen: Man kann sich zunächst auf solche approximierenden Polygone beschränken, deren Seiten in bezug auf irgendein Koordinatensystem durch rationale Koordinatenwerte gegeben sind. Dies bedeutet, daß man eine *abzählbare* Menge quadratischer Teilungen benutzt. Ferner ist für jede quadratische Teilung die Menge der möglichen approximierenden Figuren Π, die in einem geschränkten Bereich enthalten sind, endlich; daher ist die Menge aller Figuren, die zur Approximation sämtlicher Mengen $\mathfrak{T}$ hinreichen, abzählbar.

Beschränken wir uns auf den einfacheren Fall, daß die Mengen $\mathfrak{T}$ Kontinua sind, und beachten, daß dann auch die Grenzelemente Kontinua sind, so folgt noch:

Die Gesamtheit aller in einem geschränkten Bereich enthaltenen Kontinua $\{\mathfrak{T}\}$ besitzt, falls als Definition des Grenzelements die Definition II zugrunde gelegt wird, Punktmengencharakter[1]).

---

1) Die Punkte sind wiederum den Mengen $\mathfrak{T}$ zu adjungieren. Sonstigen Beschränkungen unterliegen die Kontinua nicht; sie können linienhaft oder flächenhaft sein.

Sätze engerer Art erhalten wir, wenn wir die Mengen $\mathfrak{T}$ spezialisieren, insbesonders wenn wir zu *stetigen Bahnkurven* übergehen. Dieser Fall ist der einzige, der bisher eine eingehendere Erörterung gefunden hat, und zwar in der Weise, daß man für die Definition des Grenzelements die *gleichmäßige* Konvergenz zugrunde legt.

Zunächst folgt, daß die in den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz eingehende Zahlgröße, die den Abstand zweier Bahnkurven darstellt, nicht allein alle Eigenschaften des Distanzwertes hat, sondern darüber hinaus auch der Relation (2) von § 6 und der Relation (3) von § 7 genügt; sie ist daher ein eigentlicher Abstandswert. Wir haben daher nur noch die Bedingung zu suchen, daß eine Menge stetiger Bahnkurven *abschließbar* ist. Dazu müssen wir sie gemäß § 2 als *gleichmäßig stetig* annehmen. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Die Menge ist nämlich auch separabel.

Da es sich hier nicht um die Punktmengen, sondern um die Bahnkurven handelt, so läßt sich der eben für die Kontinua $\{\mathfrak{T}\}$ gegebene Beweis, der sich auf die approximierenden Polygone stützt, nicht anwenden. Man kann ihn gemäß Fréchet folgendermaßen durchführen; es genügt übrigens, den Beweis für Funktionen einer Variablen darzustellen.

Man teile das Intervall $a \dots b$, dem x angehört, durch rationale Punkte in ν Teilintervalle und betrachte zunächst die Menge M aller derjenigen Funktionen $\{\varphi(x)\}$, die in diesen Teilpunkten nur rationale Werte annehmen und sich zwischen zwei Teilpunkten linear verhalten. Ebenso konstruiere man eine analoge Menge $M_1 = \{\varphi_1(x)\}$, nachdem man jedes vorhandene Teilintervall von $a \dots b$ durch rationale Punkte in ν_1 neue Teile geteilt hat, und fahre so fort, bis jeder rationale Punkt von $a \dots b$ ein Teilpunkt geworden ist. Alsdann wird die Gesamtheit aller Funktionen, die den so bestimmten Mengen

$$M, M_1, M_2, \dots M_\nu, \dots$$

angehören, jede Funktion $f(x)$ als Grenzelement erzeugen. Dies ergibt sich unmittelbar daraus, daß jede stetige Funktion $f(x)$ durch ihre Werte an den rationalen Stellen des Intervalls bestimmt ist, und daß man Funktionen $\varphi(x), \varphi_1(x), \dots \varphi_\nu(x), \dots$ aus $M, M_1, \dots M_\nu, \dots$ der Reihe nach so auswählen kann, daß für alle rationalen Werte x_r

$$|f(x_r) - \varphi_\nu(x_r)| < \varepsilon_\nu$$

bleibt, für eine gegen Null konvergierende Folge $\{\varepsilon_\nu\}$. Der Grundgedanke dieses Beweises steht, wie man sieht, in enger Beziehung zu dem in § 2 enthaltenen Beweisverfahren von Ascoli. Dies überträgt sich unmittelbar auf die Funktionenpaare. Es besteht also der Satz:

IX. *Die Gesamtheit aller in einem geschränkten Bereich enthaltenen gleichmäßig stetigen Bahnkurven läßt sich aus einer festen abzählbaren Teilmenge mittels gleichmäßig konvergenter Folgen darstellen und hat Punktmengencharakter.*

Das gleiche gilt für jede dieser Gesamtheit angehörige perfekte Teilmenge.

Fréchet hat seine Untersuchungen auch auf eindeutige analytische Funktionen $f(z)$ eines komplexen Argumentes ausgedehnt, die innerhalb eines gewissen Gebietes $\mathfrak{G}$ regulär sind. Die Definition des Grenzelements geschieht wieder auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz mittels eines Abstandbegriffs[1]); ihre Möglichkeit beruht darauf, daß eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $\{f_\nu(z)\}$, die innerhalb eines Gebietes $\mathfrak{G}$ regulär und überdies geschränkt sind, gegen eine ebenfalls in $\mathfrak{G}$ reguläre und geschränkte Funktion konvergiert.

Falls Funktionen dieser Art in jedem ganz innerhalb $\mathfrak{G}$ liegenden Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ geschränkt sind, so bilden sie wiederum eine abschließbare separable Menge, und es ist diese Bedingung notwendig und hinreichend. Die so definierten Funktionen haben daher ebenfalls Punktmengencharakter.

§ 9. *Mengen spezieller Kurven und Funktionen.* Mengen spezieller Kurven können zunächst in der Weise untersucht werden, daß man fragt, wann eine Kurveneigenschaft von $\{v\}$ auf ω übertragbar ist, und zwar wiederum unter der Voraussetzung, daß das Grenzelement auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz definiert ist. Für die durch $y = f(x)$ definierten Kurven sind diese Fragen ziemlich leicht zu entscheiden, für die allgemeineren Bahnkurven ist dies jedoch nicht mehr der Fall.[2]) Übrigens hat man bisher nur Differenzierbarkeit und Rektifizierbarkeit näher in Betracht gezogen.

Auch Ascoli ist zu seinen allgemeinen Erörterungen im Anschluß an ein Problem dieser Art gelangt. Die von ihm untersuchten Kurven

1) Der Abstand zweier Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ wird in folgender Weise eingeführt. Man approximiere die Grenze von $\mathfrak{G}$ durch Polygone $\mathfrak{P}_\nu$. Sei dann M_ν das Maximum von $|f - \varphi|$ in der Polygonfläche $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}_\nu)$, so setzt Fréchet, analog wie im R_∞,

$$\varrho(f, \varphi) = \frac{M_1}{1 + M_1} + \frac{1}{2!}\frac{M_2}{1 + M_2} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\frac{M_\nu}{1 + M_\nu} + \cdots$$

und benutzt wieder $\lim \varrho_\nu = 0$ als Definition des Grenzelements f_ω einer Folge $\{f_\nu\}$. Dies ist mit der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen f_ν gegen f und der Existenz einer Grenzfunktion für jede Folge äquivalent (a. a. O. S. 45).

2) Man vgl. die Bemerkungen auf S. 129, wo meist Eigenschaften erwähnt werden, die sich nicht auf das Grenzelement ausdehnen lassen.

bestehen je aus einer endlichen Zahl von *Kurvenzweigen*, die durch Gleichungen der Form $y = f(x)$ dargestellt sind und je eine endliche Zahl von Punkten miteinander gemein haben können.[1]) Jeder dieser Kurvenzweige besteht selbst wieder aus einer endlichen Zahl von Elementarzweigen, denen bestimmte einheitliche Eigenschaften der einmaligen oder mehrmaligen Differentiierbarkeit auferlegt werden, insbesondere solche, die ihr Wachstum betreffen, und es wird dann die Frage untersucht, wie sich diese Eigenschaften auf die Grenzfunktion ausdehnen lassen. Insbesondere wird auch für sie das Wachsen und Abnehmen im einzelnen genauer erörtert. Das Hauptresultat lautet, daß wenn alle Kurven einer Folge in dem S. 243 genannten Sinn *monoton* sind, dies auch für die Grenzkurve der Fall ist.[2]) Jede der in die Kurvenmenge eingehenden Kurven kann übrigens für ein beliebiges Intervall definiert sein; dazu kommt, daß eine Kurve auch mehrfach gezählt werden darf.[3])

Daß sich die *Rektifizierbarkeit* nicht immer auf die Grenzelemente überträgt, folgt sofort daraus, daß man jede stetige Kurve durch Polygone approximieren kann. Eine hinreichende Bedingung, unter der sie übertragbar ist, läßt sich auf Grund der Sätze über Mengen gleichmäßig stetiger Funktionen leicht angeben; bei einer geschränkten Menge rektifizierbarer Kurven sind nämlich die Grenzelemente immer dann rektifizierbar, wenn auch die Bogenlängen selbst geschränkt sind. Doch ist diese Bedingung nicht notwendig, wofür Fréchet Beispiele gibt. Man kann sogar geschränkte abschließbare Kurvenmengen bilden, deren sämtliche Individuen nicht rektifizierbar sind. Ein Beispiel liefern, falls $y = f(x)$ eine nicht rektifizierbare Kurve ist, alle Kurven der Menge

$$y = f_\nu(x) = f(x) + \delta_\nu; \quad \lim \delta_\nu = 0,$$

die die Kurve $y = f(x)$ als Grenzkurve besitzen.[4])

Borel[5]) ist bei Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften der irrationalen Zahlen auf Mengen von *Geraden* geführt worden. Das Grenzelement g einer Folge $\{g_\nu\}$ definiert er, in sachlicher Übereinstimmung mit der Definition III dahin, daß, wenn a und b zwei

---

1) Zu ihnen gehört also z. B. auch ein Kreis, sowie ein mit einer endlichen Zahl beliebiger Sehnen erfüllter Kreis.

2) Memorie Lincei (3) 18 (1883) S. 558 und Rend. Ist. Lomb. (2) (1888) S. 264.

3) Für die Einzelheiten muß ich auf die Ascolischen Arbeiten selbst verweisen.

4) Andere Beispiele gibt Fréchet a. a. O. Die Fragestellung ist, wie man sieht, etwas äußerlicher Natur.

5) Journ. de math. (5) 9 (1903) S. 371 und Bull. Soc. math. 31 (1903) S. 272.

Punkte von g sind, die Abstände $\varrho(a, g)$ und $\varrho(b, g_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergieren.[1]) Dies gilt für die Ebene wie für den Raum.[2])

Er definiert insbesondere eine Geradenmenge $\{g\}$ als *geschränkt*, wenn es einen Punkt p_0 gibt, so daß für *jede* Gerade g dieser Menge $\varrho(p_0, g) < N$ ausfällt[3]), und behandelt dann wesentlich die Frage, wann eine beliebig gegebene Menge $G = \{g\}$ in eine geschränkte projektiv transformierbar ist. In der Ebene ist es der Fall, wenn die Ableitung G' von G die unendlich ferne Gerade g_∞ nicht enthält; im Raum, falls es eine Ebene gibt, die kein Grenzelement der Geraden von G enthält. Er beweist dann noch ein Theorem, das eine Verallgemeinerung seines Punktmengensatzes ist. Falls es nämlich unendlich viele Gebiete gibt, so daß *jede* Gerade einer *abgeschlossenen* Menge $\{g\}$ einen inneren Punkt mindestens eines Gebietes enthält, so gibt es auch eine endliche Zahl solcher Gebiete.

Eine wesentlich höhere Tragweite und Wichtigkeit besitzen diejenigen neueren Untersuchungen über Funktionsmengen, die sich an Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen angeschlossen haben. Ihre mengentheoretische Bedeutung, auf die ich hier allein eingehe, besteht darin, daß sie zugleich Eigenschaften des Hilbertschen R_∞ definieren, und uns deshalb erhöhte Einblicke in seine Struktur und seine Gesetze in Aussicht stellen. Sie stützen sich teilweise auch auf den Lebesgueschen Integralbegriff (Kap. VIII, 5).

Sei zunächst

$$\Psi = \{\psi_\nu\} = \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_\nu, \cdots$$

irgendein abzählbares System von Funktionen, die integrierbar sind und den bekannten Bedingungen eines normierten Orthogonalsystems genügen, d. h. den Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \psi_\mu(x) \cdot \psi_\nu(x)\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \psi_\nu^2(x)\, dx = 1.$$

Sei ferner $\varphi(x)$ irgendeine willkürliche integrierbare Funktion, die nicht geschränkt zu sein braucht, so kann man in der aus der Theorie der Fourierschen Reihe bekannten Art gewisse Größen $\{a_\nu\}$ mittels der Gleichungen

(1) $$a_\nu = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, \psi_\nu(x)\, dx$$

1) Ist dies für zwei Punkte der Fall, gilt es auch für jeden; darin liegt die Übereinstimmung der Definition Borels mit der Definition III.

2) Borel überträgt die Definition auch auf Ebenen; alsdann treten drei Punkte a, b, c statt a und b auf.

3) Man sieht leicht, daß die Definition von p_0 unabhängig ist.

bestimmen und die Größen $\{a_\nu\}$ als Koordinaten eines Punktes A des R_∞ betrachten. Dieser Punkt braucht jedoch im allgemeinen kein Punkt eines *geschränkten* Hilbertschen Raumes R_∞ zu sein.[1]) Um dies zu bewirken, genügt es aber, die Funktion $\varphi(x)$ so anzunehmen, daß *sie nebst ihrem Quadrat im Sinne von Lebesgue summierbar* ist. Den so durch die Gleichungen 1) bestimmten Punkt A kann man als Bild der Funktion $\varphi(x)$ betrachten, so daß die Funktionen $\{\psi_\nu\}$ die Rolle des abbildenden Hilfsmittels besitzen.

Man kann nun umgekehrt die Frage stellen, ob und in welcher Weise jedem Punkt eines geschränkten Hilbertschen Raumes auf Grund der Gleichungen 1), also nach Wahl eines *festen Systems abbildender Funktionen* $\Psi = \{\psi_\nu\}$, auch eine Funktion $\varphi(x)$ zugeordnet werden kann. Zunächst ist klar, daß eine solche Funktion höchstens bis auf eine Zusatzfunktion bestimmbar ist, deren Integral Null ist. Hiervon ist also stets abzusehen. Wie Rieß und E. Fischer bewiesen haben[2]), existiert sie aber auch wirklich, falls sie wieder die Eigenschaft besitzt, im Sinne von Lebesgue *nebst ihrem Quadrat summierbar* zu sein.[3]) Ist

---

1) In formaler Erweiterung bezeichne ich einen durch die Relation $\Sigma x_\nu^2 \leqq M$ definierten Raum als *geschränkten* Hilbertschen Raum.

2) Vgl. C. R. 144 (1907) S. 615 u. 734. Rieß hat seine Resultate auch auf Funktionen mehrerer Variablen übertragen.

Rieß benutzt bei seinen Beweisen solche Begriffe und Definitionen, die sich an die Fréchetschen Formulierungen anschließen; er definiert den *Abstand d* zweier Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, die nebst ihrem Quadrat summierbar sind, durch ein Lebesguesches Integral und zwar in folgender Weise. Er setzt

$$d = d(f, \varphi) = \sqrt{\int_0^{2\pi} (f-\varphi)^2 \, dx}$$

und schließt daran in gewohnter Weise den Begriff des Grenzelements an. Er bezeichnet f als Grenzelement einer Folge $\{f_\nu\}$, wenn der Abstand $d(f, f_\nu)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Diese Definition genügt der Relation (2) von § 6. Fischer benutzt dagegen einen Begriff der *mittleren Konvergenz*, der übrigens sachlich mit dem Rießschen Begriff des Grenzelements übereinstimmt.

3) Der einfachste Fall ist der, daß man die Funktion $\varphi(x)$ direkt durch die Fouriersche Reihe darstellt, die hier zunächst nur formal eingeführt wird, ohne Rücksicht auf Konvergenz. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß man der Fourierschen Reihe eine Funktion $\varphi(x)$ zuordnen kann, die nebst ihrem Quadrat summierbar ist, ergibt sich in diesem Fall die Bedingung

$$\tfrac{1}{2} a_0^2 + \sum (a_\nu^2 + b_\nu^2) < M,$$

wenn a_ν und b_ν die Koeffizienten der Fourierschen Reihe sind. Fréchet hat die Bedingung angegeben, unter der eine Teilmenge der so definierten Gesamtmenge abschließbar (oder in seiner Bezeichnung kompakt) ist. Sie lautet, daß es

das System $\Psi = \{\psi_\nu\}$ insbesondere *vollständig*[1]), so ist die Funktion $\varphi(x)$ bis auf die Zusatzfunktion sogar *eindeutig* bestimmt, das System ψ vermittelt daher in diesem Sinn eine eindeutige Beziehung zwischen dem Hilbertschen R_∞ und den Lösungen der Gleichungen (1).

§ 10. *Die Funktionen von Kurven und die Kurvenmengen.* Auf Kurvenmengen $M = \{C\}$, die Punktmengencharakter besitzen, läßt sich der Begriff der Funktion des Orts, sowie der der Stetigkeit unmittelbar übertragen; die Funktion $F(C)$ ist dabei zunächst mengentheoretisch definiert. Sie kann aber auch analytisch mittels der die Kurve C darstellenden Funktionen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

in der Weise definiert werden, daß $F(C) = \Phi(x, y)$ für alle durch diese Gleichungen definierten Wertepaare x, y konstant sein soll. Da der Stetigkeitsbegriff nur an der Existenz und der Natur des Grenzpunkts und an dem abgeschlossenen Charakter der Punktmengen haftet, so bedarf seine Übertragbarkeit auf die mit Punktmengencharakter versehenen Mengen $M = \{C\}$ keiner besonderen Begründung. Sie läuft der Ausdehnung des Stetigkeitsbegriffs auf beliebige abgeschlossene oder perfekte Punktmengen parallel. Nur ist zu beachten, daß dem Stetigkeitsbegriff alle für ihn charakteristischen Eigenschaften sinngemäß auch hier auferlegt werden müssen. Ist also $\{C_\nu\}$ eine gegen die Kurve C konvergierende Folge, so wird die für die Menge $\{C\}$ definierte Funktion $F(C)$ in C *stetig* heißen, falls für *jede* derartige Folge bei gegebenem ε ein geeignetes N existiert, so daß für jedes $\nu > N$ die Relation

$$|F_\nu(C) - F(C)| < \varepsilon$$

besteht. Diese Zahl N kann zwar von der gewählten Folge abhängen; es muß aber auch eine Zahl $N' \geq N$ existieren, die diese Relation für

bei gegebenem ε eine Zahl N geben muß, so daß für jede Funktion dieser Menge, falls $\nu > N$ ist,

$$a_\nu^2 + b_\nu^2 + \cdots < \varepsilon$$

ausfällt, so daß also alle zugehörigen Reihen gleichmäßig konvergieren; vgl. C. R. 144 (1907) S. 1414.

1) Der hier benutzte Begriff der Vollständigkeit ist derjenige von G. E. Schmidt, dem wir auf S. 19 schon begegnet sind; nach ihm heißt ein Orthogonalsystem $\psi = \{\psi_\nu\}$ vollständig, wenn es keine weitere Funktion ψ' gibt, die mit den sämtlichen Funktionen $\{\psi_\nu\}$ die Orthogonalrelationen der Gleichungen 1) befriedigt. Ich bemerke, daß der ursprünglich von Hilbert aufgestellte Begriff der Vollständigkeit sich mit dem vorstehenden nicht deckt; die Übereinstimmung tritt aber ein, wenn der in seine Definition eingehende Integralbegriff nicht im Riemannschen, sondern im Lebesgueschen Sinn definiert wird. Wird er jedoch im Riemannschen Sinn verstanden, so gibt es Systeme, die zwar im Hilbertschen Sinn vollständig sind, aber nicht in dem von Schmidt.

jede Folge $\{C_\nu\}$ herbeiführt. Ebenso klar ist, daß sich auch die Begriffe der oberen und unteren Grenze, des Maximums und Minimums und die sie betreffenden Sätze auf Kurvenmengen mit Punktmengencharakter ausdehnen lassen.

Dies hat zuerst V. Volterra für eine spezielle Kurvengattung ausführlich durchgeführt; die von ihm betrachteten Kurven sind Raumkurven von der Art, daß um jede von ihnen ein röhrenförmiger Raumteil gelegt werden kann, in dem die Kurven der Umgebung verlaufen.[1]) Volterra ist auch derjenige, an den die sämtlichen späteren Untersuchungen über Kurvenmengen angeschlossen haben.[2])

Arzelà hat die Durchführung der Stetigkeitssätze auf mengentheoretischer Grundlage zuerst vollzogen; dies war auch die Veranlassung, die ihn zu den oben (§ 3) mitgeteilten Definitionen führte. Er setzt hierzu insbesondere solche perfekten Kurvenmengen voraus, daß, wenn C_1 und C_2 zwei Kurven der Menge sind, es einen von C_1 zu C_2 führenden Weg gibt, dessen sämtliche Punkte mindestens je einer Kurve der Menge $\{C\}$ angehören.[3])

Außer der Stetigkeit sind auch die Begriffe der Konvergenz, der gleichmäßigen Konvergenz und der gleichmäßigen Stetigkeit unmittelbar übertragbar. Auch hier ist zu beachten, daß die Definitionen so zu formulieren sind, wie sie für beliebige perfekte Punktmengen lauten würden. So ist z. B. für die *gleichmäßige Stetigkeit* einer Funktionsmenge $F(C)$, die für die Kurvenmenge $\{C\}$ definiert ist, folgendes zu verlangen. Bei gegebenem ε muß ein geeignetes N existieren, so daß, wenn $\{C_\nu\}$ *irgend*eine gegen C konvergierende Folge ist, für *jedes* $\nu > N$, *jede* Kurve C und *jede* Funktion $F(C)$ die Relation (2) besteht. Die Definition der *gleichmäßigen Konvergenz* überträgt sich augenscheinlich unmittelbar, und ebenso klar ist, daß sich nunmehr alle in § 2 und § 3 abgeleiteten Sätze auf Funktionen übertragen, die für Kurvenmengen mit Punktmengencharakter definiert sind. Eine ausführliche Ableitung dieser Sätze gibt Fréchet in seiner These, und zwar in der Weise, daß perfekte abschließbare Mengen $M = \{m\}$ vom allgemeinsten Typus den Funktionalraum abgeben, in dem Funktionen oder Operationen betrachtet

1) Vgl. besonders Rend. Acc. Linc. (4) 3_2 (1887) p. 225 u. 274 und Acta math. 12 (1889) S. 223. Übrigens erfährt der obige Stetigkeitsbegriff für die weiteren Zwecke, insbesondere für die Einführung der übrigen infinitesimalen Begriffe, noch eine Modifikation.

2) Daß ich mich hier auf die formalen Hinweise beschränke und deshalb auf Volterras materielle Resultate nicht eingehen kann, habe ich bereits S. 266 erwähnt.

3) Rend. Linc. (4) 5, 1 (1889) S. 347.

werden, die sich auf die einzelnen Elemente beziehen. Man braucht diese Mengen nicht einmal als abgeschlossen zu betrachten; es genügt, daß sie abschließbare Teilmengen perfekter Gesamtmengen sind. Es treten dann die Sätze in Kraft, die im Bericht I, S. 120 für Funktionen reeller Variablen abgeleitet worden sind.[1])

Der Hilbertsche R_∞ gehört gemäß § 5 *nicht* zu den Mengen mit Punktmengencharakter. Daß dadurch die ihn betreffenden Probleme ein erhöhtes Interesse gewinnen, bedarf keiner besonderen Begründung.

---

1) Für einige speziellere Resultate von Fréchet, die engere Voraussetzungen betreffen, als die gleichmäßige Stetigkeit und die gleichmäßige Konvergenz, verweise ich auf die These (S. 28).

Sätze über Mengen von Funktionen enthält auch eine soeben erschienene Arbeit von Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet, Rend. Palermo 24 (1907).

Kapitel VIII.

Berichtigungen zum Bericht I und Zusätze.

Die Anwendungen der Mengenlehre auf Funktionen von reellen Variablen haben in der letzten Zeit erhebliche Fortschritte gemacht. Hierüber ausführlicher zu berichten, erübrigt sich schon deshalb, weil wir bereits von anderer Seite zusammenhängende Darstellungen besitzen; ich erwähne besonders die von Baire[1]), Borel[2]) und Lebesgue[3]) kürzlich erschienenen Monographien.

In erster Linie sollen in diesem Anhang einige Irrtümer des Berichts richtig gestellt werden; außerdem führe ich solche Einzelheiten an, die mir besonderes Interesse zu verdienen scheinen, und die sich unmittelbar an die Resultate des Berichts I anschließen. Abgesehen davon beschränke ich mich auf einige materielle und bibliographische Hinweise, und auch dies nur, soweit mir die Ergebnisse bekannt geworden sind. Eine Ausnahme erfährt nur diejenige Bereicherung unseres Wissens, die wir Lebesgue verdanken, und die in seinem Integralbegriff besteht. In ihr sehe ich einen der glänzendsten Fortschritte, den die Mathematik der Mengenlehre verdankt, und will ihm deshalb auch in diesem Bericht einen Platz anweisen.

Daß ein Bericht mehrfach Irrtümer enthält, sollte gewiß nicht vorkommen; doch ist es nicht nur hier, sondern auch anderswo vielfach der Fall. Auf einzelne bin ich persönlich hingewiesen worden, andere sind bereits an anderer Stelle aufgedeckt worden. Ich lasse für sie alle die Berichtigung kurz folgen. Freilich sind manche Ausstellungen auch unbegründet; dies trifft zumal für einige zu, die H. W. Young gemacht hat. Auch sie werde ich unter Entkräftung des erhobenen Einwands kurz zur Sprache bringen.

Ich schließe mit einigen nachträglichen Zusätzen zum Bericht II.

---

1) Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905.
2) Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905.
3) Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904.

§ 1. *Allgemeine Mengensätze* (Bericht I, S. 1—56). S 30. Hier sind die Mengen Q_1 und Q_2, sowie die Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zu vertauschen.

S. 54. Über den du Boisschen Satz VII vgl. S. 65 dieses Berichts II und das dort von Hausdorff gegebene Beispiel, das seine Unrichtigkeit beweist.

§ 2. *Punktmengensätze* (Bericht I, S. 57—111). S. 61. Der Beweis, daß P^{Ω} nicht Null ist, wenn alle Ableitungen $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden sind, bedarf einer andern Begründung. Man kann ihn *nicht* auf folgende Art führen.

Sei p_ν ein Punkt von $P^{(\nu)}$, allgemein p_α ein Punkt von $P^{(\alpha)}$. Sind dann alle $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden, so bilde man die Reihe

$$p_1, p_2, \ldots p_\nu, \ldots p_\omega, \ldots p_\alpha \ldots$$

und betrachte irgendeine wohlgeordnete Teilreihe vom Typus ω, so hat diese mindestens ein Grenzelement, und dies muß erstens jeder Menge $P^{(\beta)}$ angehören, die Punkte p_β zu dieser Teilreihe liefert, sowie auch derjenigen Ableitung, die auf alle $P^{(\beta)}$ zuerst folgt. Dieser Schluß ist richtig; man kann aber gemäß den Eigenschaften der zweiten Zahlklasse hieraus *nicht* folgern, daß es auch einen Punkt gibt, der *allen* $P^{(\alpha)}$ gemeinsam ist. Vielmehr ist dieser Beweis im Anschluß an Cantor zu führen, und zwar folgendermaßen.[1])

Man teile den Bereich W des R_n, in dem die Punktmenge enthalten ist, gemäß dem Bolzano-Weierstraßschen Verfahren sukzessive in Teilbereiche, so muß es für jede Teilung mindestens *einen* Teilbereich von der Art geben, daß für die in ihm enthaltene Teilmenge von P ebenfalls *alle* Ableitungen von Null verschieden sind. Ist nun s ein sich bei dieser Teilung einstellender Grenzpunkt, so kann von ihm gezeigt werden, daß er allen $P^{(\alpha)}$ angehört. Wird nämlich um s eine Kugel K gelegt, so hat auch die in K enthaltene Teilmenge Q die Eigenschaft, daß alle $Q^{(\alpha)}$ von Null verschieden sind, und zwar für jedes α. Sei nun α irgendeine Zahl der zweiten Klasse, so gehören zu $Q^{(\alpha)}$ unendlich viele Punkte. Sei q ein solcher, so lege man um s eine Kugel K_1, die q ausschließt, so besteht auch für die eingeschlossene Teilmenge Q_1 die Eigenschaft, daß alle $Q_1^{(\alpha)}$ von Null verschieden sind; es gehören daher auch zu $Q_1^{(\alpha)}$ unendlich viele Punkte; wir wählen einen q_1 beliebig aus und können so fortfahren. So erhalten wir die Punktfolge $\{q_\nu\}$, die zu $P^{(\alpha)}$ gehört und s als Grenzpunkt besitzt; also gehört s sowohl zu $P^{(\alpha)}$ wie auch zu $P^{(\alpha+1)}$. Dies gilt für jedes α. Damit ist der Beweis zunächst für

1) Math. Ann. 23 (1884) S. 465.

den Übergang von ν auf $\nu+1$ geführt. Der Schluß von $\{\nu\}$ auf ω kann nunmehr in der oben angedeuteten, dem Bericht I entnommenen Weise gleichfalls gezogen werden.

Ist nämlich

$$P^{(\alpha_1)},\ P^{(\alpha_2)},\ \ldots\ P^{(\alpha_\nu)},\ \ldots$$

irgendeine Folge dieser Art, so gibt es in jedem $P^{(\alpha_\nu)}$ einen Punkt p_ν in der Nähe von s, und es genügt nun, diese Punkte $\{p_\nu\}$ so zu wählen, daß sie selbst s als Grenzpunkt besitzen. Der Punkt s ist also ein Punkt, der *allen* $P^{(\alpha)}$ gemeinsam ist, und gehört daher gemäß der *Definition* von P^Ω auch zu P^Ω.

S. 78. Hier stelle ich folgenden Satz auf: Eine überalldichte Intervallmenge $D=\{\delta\}$ bestimmt durch ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte eine perfekte oder eine abzählbare Menge, je nachdem jedes oder kein Intervall von allen andern getrennt ist.

Dieser Satz ist richtig, könnte aber zu einer irrigen Auffassung führen. Man darf aus ihm nicht schließen, daß Intervalle, die von allen andern getrennt sind, bei abzählbaren Mengen nicht auftreten können. Wenn eine Punktmenge von links und rechts gegen die Endpunkte eines Intervalles $a\ldots b$ als ihre einzigen Grenzpunkte konvergiert, so ist bereits $a\ldots b$ ein solches Intervall.

S. 80 und 91. Auf S. 80 definiere ich eine Teilmenge U einer nirgendsdichten abgeschlossenen Menge Q als *überalldicht* in Q, falls $U'=Q$ ist. Dies ist aber offenbar ein Druckfehler; es muß $U'=Q'$ heißen. Die isolierten Punkte von Q brauchen nämlich für diese Definition nicht in Frage zu kommen, wie dies meines Erachtens auch dem ganzen Begriff naturgemäß entspricht.

H. W. Young gibt dem Begriff des „überalldicht in Q“ eine abweichende Bedeutung, die auch die isolierten Punkte von Q in Betracht zieht, und meint deswegen, bei mir läge ein sachliches Versehen vor; er sagt sogar, mein Begriff sei „untenable“. Da es sich bei ihm und bei mir um zwei verschiedene Begriffe handelt, fällt diese Behauptung in sich zusammen.

Im Anschluß hieran heißt es auf S. 91, daß eine Teilmenge Q_ν von Q mit wachsendem ν überalldicht in Q werden kann. H. W. Young schreibt hierzu: It is not quite clear in what sense the expression: „Q_ν is dense in Q“ is used. Darauf habe ich zu erwidern, daß ich nur davon spreche, die Menge Q_ν *werde* mit wachsendem ν überalldicht in Q; ebenso wie eine je aus einer endlichen Zahl von Punkten bestehende Teilmenge der Einheitsstrecke in ihr überalldicht werden kann. Dieser Einwand ist also gegenstandlos.

S. 82. Die hier gegebene Konstruktion der punktfreien Bereiche

und die auf ihr ruhende Darstellung läßt sich durch geeignete Wahl der Punkte m vereinfachen. Diese Vereinfachung hat Zoretti angegeben.[1]) Man wähle nämlich als ersten dieser Punkte einen solchen Punkt m_1 der Komplementärmenge M, für den sein Abstand von der Menge T ein Maximum ist, und konstruiere den zu ihm zugehörigen rechteckigen Bereich δ_1. Sei T_1 diejenige Menge, der jeder Punkt von T und von δ_1 angehört, so gibt es in dem Restgebiet M_1 wieder einen Punkt, dessen Abstand von T_1 ein Maximum ist; ihn wählen wir als Punkt m_2, konstruieren zu ihm den Bereich δ_2, bilden die Menge T_2, der jeder Punkt von T_1 und δ_2 angehört, und fahren so fort. Dann geht das Verfahren nach einer abzählbaren Menge von Schritten vom Typus ω zu Ende. Man braucht es also nicht über ω hinaus fortzusetzen, wie es im Bericht I wegen anderer Wahl der Punkte m eventuell notwendig war.[2])

S. 86. Der hier angeführte Satz von Baire bezieht sich auf Unstetigkeitspunkte einer reellen Funktion $f(x, y)$ und lautet etwas anders. Da er sich nicht in Kürze angeben läßt, verweise ich auf die Bairesche Arbeit.[3])

Dagegen trifft der auf S. 86 angeführte Satz nicht zu, worauf mich Baire alsbald hinwies unter Mitteilung des folgenden Beispiels.[4]) (Fig. 26.) Man gehe von einem Quadrat q aus, teile es in vier gleiche Teilquadrate und setze fest, daß zwei, die von einer Diagonale durchzogen werden, von Punkten der zu konstruierenden Menge Q frei bleiben sollen. Die beiden andern Quadrate seien q_1 und q_2. Jedes von ihnen behandele man ähnlich, doch so, daß die Diagonale, die die von Q freibleibenden Quadrate durchzieht, zur ersten Diagonale senkrecht ist. Jedes nicht von diesen Diagonalen durchzogene Teilquadrat q_{ik} behandelt man analog und fährt so unbe-

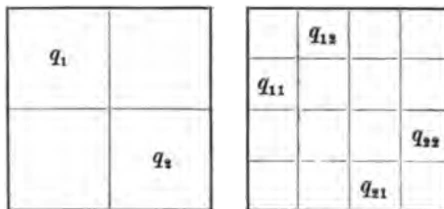


Fig. 26.

1) Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 5; er operiert mit Kreisen statt mit rechteckigen Bereichen; auch habe ich sein Verfahren etwas abgeändert. Vgl. auch die Anm. 1 auf S. 106.

2) Zu dem auf S. 84 ausgesprochenen Satz VIII ist zu bemerken, daß für die Beziehung der Menge T zu den sämtlichen Bereichen $\{\delta_\nu\}$ auch das Grenzgebilde aller Bereiche (vgl. Kap. IV, § 5) in Betracht kommt.

3) Vgl. das Nähere in Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 94.

4) Math. Ann. 61 (1905) S. 287. Ein anderes Beispiel hat H. W. Young angegeben; ebenda S. 281.

grenzt fort, indem man die konsekutiven Diagonalenrichtungen immer senkrecht zueinander wählt. Die so bestimmten Quadrate

$$q, q_i, q_{ik}, \dots q_N, \dots$$

konvergieren gegen gewisse je unendlich vielen gemeinsame innere Punkte, die nebst ihren Grenzpunkten die Menge Q bestimmen.

S. 91. Hier befindet sich folgender Satz: Ist Q eine abgeschlossene Menge, Q_ν Teilmenge von Q, und wird Q_ν mit wachsendem ν überalldicht in Q, so ist $\lim J(Q_\nu) = J(Q)$.

In dieser Form ist der Satz irrig. Er ist eine ungenaue Wiedergabe des folgenden von Osgood abgeleiteten Theorems:

Ist Q eine perfekte Menge und Q_ν eine solche *abgeschlossene* Menge, *daß* $\lim Q_\nu = Q$ *ist*, so ist auch $\lim J(Q_\nu) = J(Q)$. Übrigens bleibt der Satz auch für eine abgeschlossene Menge Q bestehen.

Er kann übrigens auf Grund des Borelschen Theorems in folgender einfachen Weise bewiesen werden. Sei $\mathfrak{J}$ der Inhalt von Q und $\mathfrak{J}_\nu$ derjenige von Q_ν. Es gibt dann eine endliche Menge von Bereichen $\{\delta\}$, die die Menge Q so einschließen, daß $\Sigma\delta < \mathfrak{J} + \varepsilon$ ist, und das Analoge ist für die Mengen Q_ν der Fall, bei beliebig vorgegebenem ε. Sind überdies

$$D_\nu = \{\delta_\nu\} \text{ und } D_{\nu+1} = \{\delta_{\nu+1}\}$$

die Bereiche, die die Mengen Q_ν und $Q_{\nu+1}$ einschließen, so kann man sie so wählen, daß erstens jeder Bereich δ_ν unter den Bereichen $\delta_{\nu+1}$ enthalten ist, also D_ν Teilmenge von $D_{\nu+1}$ ist, und daß zweitens, wenn $\{\varepsilon_\nu\}$ eine gegen Null konvergierende Folge ist,

$$\sum\delta_\nu < \mathfrak{J}_\nu + \varepsilon_\nu \text{ und } \sum\varepsilon_\nu < \varepsilon$$

ist, bei beliebigem ε. Da nun $\lim Q_\nu = Q$ ist, so haben die unendlich vielen Bereiche $\mathfrak{M}\{\delta_\nu\}$ die Eigenschaft, daß *jeder* Punkt der Menge Q innerer Punkt von mindestens einem dieser Bereiche ist.[1]) Es gibt daher auch eine *endliche* Menge der gleichen Beschaffenheit[2]); mithin gibt es auch eine solche Zahl N, daß bereits die der Menge D_N angehörigen Bereiche die ganze Menge Q einschließen. Daraus ist der Satz unmittelbar zu folgern.

Man sieht leicht, daß die Menge Q_ν des Osgoodschen Satzes mit wachsendem ν überalldicht in Q wird. Dagegen genügt diese Eigenschaft nicht, im Gegensatz zu der bei mir vorhandenen Behauptung; es tritt noch die Bedingung hinzu, daß $\lim Q_\nu = Q$ ist.

---

1) Man sieht hieraus, daß der Beweis versagt, wenn $\lim Q_\nu$ nicht gleich Q ist.

2) Dies bildet auch bei Osgood den Hauptgrund des Beweises. Übrigens wird der Satz von ihm nur für das lineare Gebiet bewiesen und für nirgendsdichte Mengen.

Auf dieses Versehen hat H. W. Young hingewiesen.[1]) Die Tatsache selbst wird auch bei Osgood ausdrücklich erwähnt, an der Hand des folgenden einfachen Beispiels. Wählt man Q als Strecke und läßt jedes Q_ν aus einer endlichen Zahl rationaler Punkte bestehen, so ist jedes $Q_\nu = 0$, also auch $\lim Q_\nu = 0$. Ebenso leicht ist es, Beispiele zu bilden, in denen jedes Q_ν aus unendlich vielen Punkten besteht, deren Inhalt Null ist; man braucht die Mengen Q_ν nur so zu bilden, daß jede abzählbar ist, während ihre Gesamtheit wieder alle rationalen Punkte liefert.[2])

Ein Beispiel, das sich auf eine *nirgendsdichte* Menge Q bezieht, hat H. W. Young in der Weise gegeben, daß der Inhalt jeder Menge Q_ν wiederum Null ist, während Q einen Inhalt hat, der größer als Null ist.[3]) Es ist einerseits sehr speziell und andererseits ziemlich kompliziert; man kann sich aber einfache Beispiele allgemeiner Art in folgender Weise bilden. Sei Q auf der Einheitsstrecke $a \ldots b$ enthalten, und sei

$$D = \{\delta_\nu\} = \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\nu, \ldots$$

die zu Q gehörige der Größe nach geordnete Intervallmenge. Man kann dann, analog zu den obigen Beispielen, Q_1 aus den Endpunkten von δ_1 bestehen lassen und allgemein Q_ν aus den Endpunkten sämtlicher Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\nu$, so hat man bereits ein Beispiel. Soll jede Menge Q_ν eine unendliche Menge sein, so würde z. B. auch das folgende Verfahren zum Ziele führen. Man wähle eine abzählbare Menge Q_1 so, daß ihr die Endpunkte von δ_1 angehören, überdies auch die Endpunkte unendlich vieler anderer Intervalle, doch so, daß die Ableitung von Q_1 nur aus den Punkten a und b besteht, was leicht ausführbar ist. Die Restmenge aller Intervalle, der Größe nach geordnet, sei

$$D' = \{\delta'_\nu\} = \delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_\nu, \ldots$$

Links und rechts vom Intervall δ'_1 gibt es je einen nächsten Punkt a_1 und b_1 der Punktmenge Q_1. Man bilde nun $Q_2 = Q_1 + P_2$ so, daß man in P_2 erstens die Endpunkte von δ'_1 eingehen läßt und zweitens die Endpunkte unendlich vieler solcher Intervalle von D', daß die Ableitung von P_2 nur aus den Punkten a_1 und b_1 besteht. Ist $D'' = \{\delta''_\nu\}$ die Restmenge, so bildet man in analoger Weise $Q_3 = Q_2 + P_3$ und fährt so fort. Dann ist leicht zu sehen, daß die Menge Q_ν allmählich überalldicht in Q wird, und daß sie überdies stets abzählbar bleibt,

1) Vgl. Proc. Lond. Math. Soc. 35 (1903) S. 384.

2) Man vgl. auch den von Hartogs erwähnten auf S. 103, Anm. 3 mitgeteilten Satz und seine Beispiele.

3) Proc. Lond. Math. Soc. 35 (1903). S. 269.

also den Inhalt Null hat. Wenn nun Q als perfekte Menge mit Inhalt vorausgesetzt wird, so ist der Zweck erreicht.

S. 101. Hier gebe ich den Hinweis, daß bei H. St. Smith zum erstenmal in der Literatur ein Beispiel einer nirgendsdichten perfekten Menge auftritt. Er konstruiert nämlich durch ein sukzessives Verfahren eine Intervallmenge $D = \{\delta\}$, die durch ihre Endpunkte in bekannter Weise eine perfekte Menge erzeugt. H. W. Young hat dem gegenüber behauptet, die Smithsche Menge sei nicht perfekt; sie habe isolierte Punkte, und erst ihre Ableitung sei perfekt. Auch das ist richtig. Mir lag aber nur daran, darauf hinzuweisen, daß bei Smith bereits perfekte nirgendsdichte Mengen erscheinen, ehe man die Cantorsche Definition einer solchen Menge besaß[1]), was aus dem Text des Berichts ersichtlich ist, und was ebenso gewiß ist. Unter den obengenannten Intervallen $\{\delta_\nu\}$, die *diese perfekte* Menge bestimmen, sind daher die konstruktiv allmählich entstehenden *Gesamt*intervalle zu verstehen, während H. W. Young jedes bei der Konstruktion neuauftretende Intervall für sich betrachtet. Ich hätte nicht geglaubt, daß man annehmen könne, ich würde eine Menge perfekt nennen, wenn sie es nicht ist.

§ 3. *Stetige und unstetige Funktionen* (Bericht I, S. 115—177).[2])
S. 128. Hier wird in einer Anmerkung darauf hingewiesen, daß der Bereich H, in dem eine Funktion reeller Veränderlicher definiert ist, immer in eine höchstens abzählbare Menge von Teilbereichen $\{H_\nu\}$ zerfällt, so daß die Funktion in jedem Bereich H_ν entweder stetig, oder punktweise unstetig oder total unstetig ist.

H. W. Young hat hieran Bemerkungen geknüpft, die die Meinung zulassen *können*, als sei dies Resultat nicht richtig oder nicht vollständig. Dies trifft aber nicht zu.

Er betrachtet nämlich eine Funktion $f(x)$ und weist darauf hin, daß es Funktionen gibt, die nur in einer endlichen abzählbaren nirgendsdichten Menge von Punkten *stetig* sind, während sie auf allen durch diese Punkte bestimmten Intervallen *total unstetig* sind. Bezeichnet man solche Funktionen als *punktweise stetig*, so gilt der folgende, von H. W. Young bewiesene Satz:[3])

Die Stetigkeitspunkte einer punktweise stetigen Funktion $f(x)$ sind entweder endlich oder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

1) Dies besagt auch der Zusatz: „Im historischen Interesse".

2) Mannigfache Beispiele solcher Funktionen und ihrer Eigenschaften nebst Ableitung der sie betreffenden Sätze finden sich bei A. de Stefano, Giorn. di Mat. 38 (1900) S. 178.

3) Wiener Ber. Bd. 112 (1903) u. Leipzig. Ber. (1903) p. 287.

Er gelangte dazu auf Grund folgender Fragestellung. Für jede in $a \ldots b$ definierte reelle Funktion zerfällt $a \ldots b$ in eine höchstens abzählbare Menge von Teilintervallen δ_ν, so daß *innerhalb* jedes einzelnen die Funktion stetig, punktweise unstetig oder total unstetig ist.[1]) Der Charakter der Funktion in den Intervallendpunkten und deren Grenzpunkten bleibt aber noch offen, und man kann insbesondere bewirken, daß jeder dieser Punkte ein *Stetigkeits*punkt ist. Man wird nun weiter fragen, welcherlei Gesetzmäßigkeit für die Punkte der von ihnen gebildeten abgeschlossenen Menge Q vorliegt.[2]) Hierauf kann eine positive Antwort nicht gegeben werden. Man kann nämlich erreichen, daß die Funktion in den Punkten von Q beliebig vorgeschriebenen Stetigkeitscharakter besitzt, welcher Charakter (d. h. stetig, punktweise unstetig oder total unstetig) auch für das Innere eines jeden Intervalls δ_ν vorgeschrieben ist. Man kann daher insbesondere auch erreichen, daß eine Funktion in *allen* Punkten von Q stetig ist, wenn sie im Innern eines jeden Intervalls δ_ν total unstetig sein soll. Natürlich ist der Satz so zu verstehen, daß es bei gegebenen Intervallen δ_ν möglich ist, Funktionen so zu bilden, daß sie auf jedem Intervall δ_ν und in jedem Punkt von Q vorgeschriebenen Stetigkeitscharakter besitzen.[3])

Die vorstehenden Tatsachen stehen in sehr enger Beziehung zu den in Kap. III, § 3 enthaltenen Punktmengensätzen. Ist nämlich eine reelle Funktion $f(x, y)$ in einem Bereich H *irgendwie* definiert[4]), und bestimmt man die Punkte vom Unstetigkeitsgrad $\omega \geqq k$, so bilden sie eine abgeschlossene Menge K.[5]) Ist die Funktion in H insbesondere punktweise unstetig, so ist die Menge K punkthaft oder linienhaft. Falls die Funktion aber in einzelnen Teilen von H total unstetig ist, so können zu K auch flächenhafte Bestandteile gehören. Läßt man nun k eine gegen Null konvergierende Folge $\{k_\nu\}$ durchlaufen, so wird jede Menge K_ν Teilmenge von $K_{\nu+1}$ sein, und die Gesamtheit $\mathfrak{M}\{K_\nu\}$ bildet wieder eine Borelsche Menge im Sinne von Kap. III, § 3. Für diese Menge können daher auch alle dortgenannten Möglichkeiten auftreten.

Setzt man nun
$$H = S + \mathfrak{M}\{K_\nu\},$$
so stellt die Menge S die Stetigkeitspunkte der Funktion dar, und

1) Im Sinne dieses Berichts ist daher das oben benutzte Wort „Bereich" präziser durch „Gebiet" zu ersetzen, da ich *jetzt* Bereich stets für abgeschlossene Gebiete benutze.

2) vgl. meinen Aufsatz in den Wien. Ber. 113 (1904) S. 1277.

3) Beispiele dieser Art gab Young a. a. O.

4) Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf zwei Variable.

5) Ich benutze die im Bericht I eingeführten Bezeichnungen.

diese Menge kann in Übereinstimmung mit den a. a. O. abgeleiteten Resultaten den verschiedensten gestaltlichen Charakter besitzen. Wie oben erwähnt, spaltet sich der Bereich H auf alle Fälle in drei Arten von Gebieten, so daß *innerhalb* jedes Gebiets ein einheitlicher Stetigkeitscharakter (überall stetig, punktweise unstetig, total unstetig) herrscht, während für die Grenzpunkte der Gebiete und das zugehörige, eventuelle Grenzgebilde (Kap. IV, § 11) der Stetigkeitscharakter offenbleibt.[1]) Gemäß den Ausführungen von Kap. III, § 3 kann die Menge S punkthaft oder linienhaft oder flächenhaft sein, sie kann sich auf Null, auf eine endliche oder auch abzählbare Menge reduzieren, wird aber, falls sie nicht abzählbar ist, dem in Kap. III, § 3 genannten Satz V zufolge die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen. Dies letzte ist, wie dort bereits erwähnt, das neue Resultat, das H. W. Young den sonst bekannten Sätzen über Borelsche Mengen und unstetige Funktionen hinzugefügt hat.[2])

S. 133. Hier befindet sich ein ziemlich offen zutage tretendes Versehen, auf das Hahn hingewiesen hat.[3]) Ich spalte die Unstetigkeit einer Funktion $F(q)$, die für eine abgeschlossene Menge $Q = \{q\}$ definiert ist, für einen Unstetigkeitspunkt q in zwei Teile, einen *wesentlichen* und einen unwesentlichen oder *äußerlichen*. Man gelangt dazu, indem man von der Gesamtheit der Stetigkeitspunkte $U = \{u\}$ ausgeht und diese dem *Erweiterungsprozeß* unterwirft.[4]) Jeder Punkt q ist nämlich ein Grenzpunkt von U; ist er insbesondere Grenzpunkt der Folge $\{u_\nu\}$, so werden die Funktionswerte

$$F(u_1), F(u_2), \ldots F(u_\nu), \ldots$$

einen oder mehrere Grenzwerte bestimmen, und wir setzen fest, daß der Funktion $\Phi(q)$ im Punkt q *alle* Grenzwerte zugeordnet werden, die zu irgendwelchen gegen q konvergierenden Folgen $\{u_\nu\}$ gehören, insbesondere ist also $\Phi(u) = F(u)$. Ist dann k_φ der Unstetigkeitsgrad von $\Phi(q)$ im Punkt q, und k derjenige von $F(q)$, so wird k_φ als die wesentliche und $k - k_\varphi$ als die äußerliche Unstetigkeit bezeichnet.

---

1) H. W. Young hatte a. a. O. eine neue Einteilung aller Funktionen in Klassen gegeben und nahm an, daß diese von der für die Grundpunkte vorhandenen Unbestimmtheit frei bleibt. Dies trifft aber auch für seine Einteilung nicht zu, worauf ich in den Wien. Ber. a. a. O. hinwies. In einer späteren Arbeit hat er dem auch Ausdruck gegeben; vgl. Proc. Lond. M. S. (2) (3) (1905) S. 371.

2) Zahlreiche Beispiele zu dem S. 132 abgeleiteten Satz VI enthält die Dissertation von E. W. Townsend, Über den Begriff und die Anwendung des Doppellimes, Göttingen 1900.

3) Monatsh. f. Math. 16 (1905) S. 312.

4) Vgl. Bericht I S. 131.

Ich führe nun die Funktion der äußerlichen Unstetigkeiten

(1) $$\Psi(q) = \pm(k - k_\varphi)$$

ein. Diese Funktion ist überall stetig, wo $F(q)$ stetig ist, und hat dort den Wert Null. Ich behaupte dann weiter, daß an einer Unstetigkeitsstelle q für den Unstetigkeitsgrad k_ψ von $\Psi(q)$ die Relation

(2) $$k_\psi = k - k_\varphi$$

besteht. Dies ist aber irrig, und zwar dürfte der Fehlschluß darauf zurückzuführen sein, daß für die Bestimmung des Unstetigkeitsgrades von $\Psi(q)$ an der Stelle q nur der Wert von Ψ an dieser einen einzigen Stelle mit den Werten an den Stetigkeitspunkten verglichen worden ist.[1])

Dies hat zur Folge, daß auch zwei weitere Resultate des Berichts, die auf der Relation (2) beruhen, der Berichtigung bedürfen.

Aus dem obigen Tatbestand folgt nämlich unmittelbar, daß man die Gleichung

$$F(q) = \Phi(q) + F_1(q)$$

ansetzen kann. Wäre nun Gleichung (2) richtig, so wäre $F_1(q) = \Psi(q)$, was im Bericht auch gefolgert worden ist. Da aber Gleichung (2) nicht zutrifft, so hat man das Resultat dahin richtigzustellen, daß der Unstetigkeitsgrad von $F_1(q)$ den von $\Psi(q)$ nirgends übersteigt.

Auf eine weitere, sich ebenfalls hieraus ergebende Folgerung komme ich in § 3 zurück.

S. 135. Hier befindet sich eine beiläufige Bemerkung zu einem Theorem von Bettazzi, die gemäß einer Bemerkung von Hahn ebenfalls irrig ist.

Das Theorem von Bettazzi bezieht sich auf eine punktweise unstetige Funktion $F(q)$ und betrifft die Wertmenge $Y = \{y\}$, die der aus $F(q)$ entstehenden möglichst stetigen Funktion $\Phi(q)$ an einer Unstetig-

1) Man betrachte folgende Beispiele. Für $f(x) = \sin 1/x$ mit $f(0) = 0$ hat man im Nullpunkt

$$k = 2,\quad k_\varphi = 2,\quad k - k_\varphi = 0,\quad \Psi = 0,$$

und es ist der Nullpunkt wirklich ein Stetigkeitspunkt für Ψ, also $k_\psi = 0$. Wird dagegen $f(x)$ so bestimmt, daß (vgl. Hahn a. a. O. S. 313) $f(x) = 0$ ist für $x = 0$ und für alle Werte $x = 1/\nu\pi$, sonst aber $f(x) = \cos 1/x$, so ist im Nullpunkt

$$k = 2,\quad k_\varphi = 2,\quad k - k_\varphi = 0,\quad \Psi = 0,$$

und doch ist der Nullpunkt ein Unstetigkeitspunkt von $\Psi(x)$. In allen Punkten $x = 1/\nu\pi$ hat man nämlich

$$k = 1,\quad k_\varphi = 0,\quad \text{also}\quad \Psi = 1,$$

so daß in der Tat $k_\psi = 1$ ist für $x = 0$.

keitsstelle zukommen kann. Diese Wertmenge ist stets abgeschlossen. Ich hatte mich dahin ausgesprochen, daß sie für Funktionen einer Variabeln entweder nur einen Wert hat oder aber ein Intervall erfüllt. Es kann aber, wie Hahn zeigt, *jede* abgeschlossene Menge als Wertmenge Y auftreten; man kann zu einer beliebig gegebenen Menge $Y = \{y\}$ zugehörige Funktionen $F(q)$ konstruieren. Dies macht er folgendermaßen.

Ist zunächst Y abzählbar, so sei $Y = \{y_\nu\}$. Ist dagegen Y nicht abzählbar, so hat man $Y = R + S$. Alsdann nehme man eine abzählbare Teilmenge V von S an, die in S überalldicht ist, und ordne die Punkte von V und R ebenfalls in der Weise, daß sie zusammen eine Menge $\{y_\nu\}$ bilden. Man denke sich nun auf der Einheitsstrecke eine gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge $\{p_\nu\}$, bezeichne das Intervall $p_\nu p_{\nu+1}$ durch δ_ν und definiere $F(x)$ folgendermaßen:

(1) $$F(x) = y_1 \text{ auf } \delta_1, \delta_3, \delta_5, \ldots$$

(2) $$F(x) = y_2 \text{ auf } \delta_2, \delta_6, \delta_{10}, \ldots$$

(3) $$F(x) = y_3 \text{ auf } \delta_4, \delta_{12}, \delta_{20}, \ldots$$

und so fort, so sieht man leicht, daß $F(x)$ im Punkte 0 sowohl alle Werte y_ν, wie auch deren Grenzwerte, und damit alle Werte der Menge Y und weiter keinen andern annehmen wird.

S. 142. Für den von Baire stammenden Satz XI hat E. B. van Vleck einen neuen Beweis gegeben, der die von Baire eingeführten Begriffe oberhalb und unterhalb stetig nicht benutzt.[1]) Er erweitert zugleich den Satz folgendermaßen. Ist die Funktion $f(x, y)$ in einem Bereich $\mathfrak{T}$ überall stetig nach x und auf einer überalldichten Schar einfacher stetiger Kurven der Form $x = \varphi(y)$ stetig nach y, so ist sie in allen Schnittpunkten dieser Kurven mit einer zur x-Achse parallelen überalldichten Geradenschar auch nach x und y stetig.

Hieraus können die Baireschen Sätze gefolgert werden. Darüber hinaus ergibt sich noch, daß, wenn die Funktion überall stetig nach x und nach y einzeln ist, eine überalldichte Schar von Parallelen zur x- resp. y-Achse existiert, auf der sie gleichmäßig stetig nach x und y ist.

S. 148. Den hier erwähnten Satz II, der von Baire bewiesen wurde, hat van Vleck auf Funktionen $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen in folgender Weise übertragen: Besitzt die Funktion $f(x, y)$ in jedem Punkt eines Bereiches $\mathfrak{T}$ eine partielle Ableitung $f'(x)$, und gibt es in $\mathfrak{T}$ eine überalldichte Menge von Parallelen zur x-Achse, auf der $f(x, y)$

---

1) Diese Begriffe enthalten meines Erachtens allerdings eine Bereicherung unserer methodischen Hilfsmittel.

stetig nach y ist, so ist $f'(x)$ als Funktion von x und y höchstens punktweise unstetig in $\mathfrak{T}$.

S. 148. Zu dem hier bewiesenen Satz IV hat D. Pompéju ein interessantes Beispiel gegeben.[1] Er wählt nämlich die stetige Funktion $y = f(x)$ so, daß sie *monoton* ist und überall eine eigentliche Ableitung besitzt, und geht dann von ihr zur *inversen* Funktion $\varphi(y)$ über; auf diese Weise ergibt sich eine überall differentiierbare Funktion $\varphi(y)$, deren Ableitung an einer überalldichten Menge zweiter Kategorie den Wert Null hat.[1])

Das Beispiel, an das er anknüpft, stammt, was ich hier anführen möchte, tatsächlich von Weierstraß; es wurde von Cantor mitgeteilt[2]) und ist alsbald von Scheeffer bei seinen Untersuchungen über die Bogenlänge benutzt worden[3]). Es ist die Funktion

$$y = f(x) = \sum_1^\infty A_\nu (x - a_\nu)^{1/3},$$

in der die Punkte $\{a_\nu\}$ irgendeine im Intervall $a \dots b$ überalldichte abzählbare Menge bilden, und in der man die Konstanten A_ν so zu wählen hat, daß die Reihe im ganzen Intervall gleichmäßig konvergiert.[4]) Da jedes ihrer Glieder im Intervall $a \dots b$ wächst, so stellt sie eine stetige monoton zunehmende Funktion dar; ihre Ableitung ist an allen Punkten a_ν positiv unendlich groß.

Nimmt man die A_ν insbesondere so an, wie es Borel tut,[5]) daß also $\sum \sqrt{A_\nu}$ konvergiert, so konvergiert die durch gliedweise Differentiation enstehende Reihe

$$F(x) = \sum \frac{1}{3} \frac{A_\nu}{(x - a_\nu)^{2/3}}$$

gemäß den Borelschen Resultaten für alle Punkte des Intervalls $a \cdots b$ mit Ausnahme einer Borelschen Menge $T = \{\xi\}$ vom Inhalt Null, der die $\{a_\nu\}$ zugehören, und es stellt diese Reihe an allen Konvergenzstellen die Ableitung von $f(x)$ dar. Die Frage, ob diese Ableitung existiert, ist also nur noch für diejenigen Punkte der Menge T offen, die von den Punkten $\{a_\nu\}$ verschieden sind; von ihnen beweist Pompéju, daß

---

1) Math. Ann. 63 (1907) S. 326.

2) Math. Ann. 19 (1882) S. 591.

3) Diese Funktionen sind schon in Kap. VI, § 15 für ähnliche Zwecke benutzt worden. Auf diese doppelte Bedeutung solcher Funktionen wies ich schon im Bericht I S. 136 hin.

4) Acta Math. 5 (1884) S. 67.

5) Vgl. S. 142, sowie Bericht I S. 243

für sie das gleiche gilt; auch in jedem von ihnen existiert eine eigentliche Ableitung, deren Wert unendlich ist.

Geht man nun von der Funktion $f(x)$ zu ihrer inversen Funktion $\varphi(y)$ über, so hat diese Funktion in jedem Punkt eine Ableitung, die für eine im Definitionsintervall *überalldichte* Borelsche Menge den Wert *Null* hat.[1])

Da, wie man leicht sieht, die Funktion $F(x)$ ein von Null verschiedenes Minimum besitzt, so ist die Ableitung der Funktion $\varphi(y)$ geschränkt. Gemäß einem Baireschen Theorem[2]) ist sie überdies eine punktweise unstetige Funktion, und zwar liegen ihre Stetigkeitsstellen nur an solchen Punkten, an denen sie Null ist.

§ 4. *Das bestimmte Integral und der Fundamentalsatz der Integralrechnung* (Bericht I, S. 117—217). S. 203. Die Theorie der uneigentlichen Doppelintegrale hat durch Ph. Freud einen wesentlichen Fortschritt erfahren.[3]) Den Ausgangspunkt bildet der folgende auf H. Wirtinger zurückgehende Gedanke. Ist (ξ, η) ein Unendlichkeitspunkt von $f(x, y)$, so soll man die sich auf den Punkt ξ, η zusammenziehenden Teilgebiete, die für die Konvergenz der ihnen entsprechenden eigentlichen Integrale in Frage kommen, in solcher Weise wählen, daß die zugehörigen bedingt konvergenten uneigentlichen Integrale den allgemeinen Integralgesetzen gehorchen. Dieser Gedanke erweist sich für gewisse Klassen von Funktionen als realisierbar.[4])

1) Pompéju bezeichnet deshalb die Funktion als eine Koepckesche Funktion. Doch ist darauf hinzuweisen, daß das von Koepcke zuerst behandelte Problem dahin ging, eine überall differentiierbare Funktion so zu konstruieren, daß sie in jedem Intervall unendlich viele Maxima und Minima hat (vgl. Bericht I S. 163), während die von Pompéju konstruierte Funktion monoton ist.

2) Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 108; vgl. auch Bericht I S. 148 und 224.

3) Mon. f. Math. 18 (1907) S. 29.

4) Die uneigentlichen Doppelintegrale behandelt auch J. Pierpont, Trans. Am. Math. Soc. 6 (1905) S. 416 und (1906) S. 155. Über einfache uneigentliche Integrale vgl. E. H. Moore, Trans. Am. Math. Soc. 2 (1901) S. 296 und 459, sowie C. Severini (Concetto d'integrale definito assolutamente convergente, Palermo 1904), der eine neue Definition aufstellt, die den Begriff des absolut konvergenten Integrals umfaßt. Er geht dazu von der gewöhnlichen Teilung des Intervalls in ν Teile $x_i \cdots x_{i+1}$ aus, und betrachtet die beiden Summen

$$S_+ = \sum f_+ (x_{i+1} - x_i) \text{ und } S_- = \sum f_- (x_{i+1} - x_i),$$

in denen f_+ die *untere* Grenze aller nicht negativen Werte von $f(x)$ im Intervalle $x_i \cdots x_{i+1}$ ist, und f_- die *obere* Grenze aller nicht positiven Werte. Falls die Grenzwerte dieser Summen sich von der Art der Teilung unabhängig erweisen, werden sie als unteres positives und als oberes negatives Integral bezeichnet; ihre Summe nennt er das absolut konvergente bestimmte Integral. Es umfaßt das

S. 208. Die in § 3 erwähnte irrtümliche Spaltung der Funktion $F(x)$ in $\Phi(x) + \Psi(x)$ hat hier zu dem Satz Veranlassung gegeben, daß die vier Ableitungen des Integrals der Funktion $F(x)$ an einer Unstetigkeitsstelle x_0 mit den vier Unbestimmtheitsgrenzen von $\Phi(x)$ an den Stellen x_0 identisch werden. Da aber statt der Funktion $\Psi(x)$ richtiger $F_1(x)$ zu setzen ist, wo $F_1(x) \leqq |\Psi(x)|$ ist, so trifft diese Folgerung nicht zu; man kann nur schließen, daß die rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen des Integrals dem durch die rechten und linken Unbestimmtheitsgrenzen gebildeten Intervall angehören müssen.[1]) Man kann daher fragen, ob sich die Funktion $F(x)$ so bestimmen läßt, daß die vier Ableitungen *irgendwelche* diesem Intervall angehörige Werte (die Grenzen eingeschlossen) annehmen. Diese Frage ist zu bejahen; man kann sogar bewirken, daß das Integral eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung und insbesondere auch eine einzige bestimmte Ableitung besitzt, die einem gegebenen Intervallwert entspricht.

S. 211. Man verdankt Hahn auch einen wichtigen Beitrag zu dem Problem, das den Fundamentalsatz der Integralrechnung betrifft[2]). Scheeffer hat bekanntlich untersucht, welche Klassen von Ausnahmepunkten die Geltung des Fundamentalsatzes nicht beeinträchtigen, und zwar hat ein Ausnahmepunkt die Bedeutung, daß in ihm die Gleichheit oder Endlichkeit der Ableitungen für beide Funktionen *nicht bekannt* ist. Über die Frage, ob es Funktionen gibt, die *überall* gleiche Ableitungswerte *besitzen* und doch gegen den Fundamentalsatz verstoßen, ist aber damit nichts entschieden. Sind alle Ableitungswerte *endlich*, so besteht der Fundamentalsatz. Eine Ausnahme kann also nur eintreten, wenn auch unendlich große Werte der Ableitungen auftreten; und dies ist, gemäß Hahn, in der Tat möglich. Derartige Funktionen erhält man auf Grund folgender Überlegung.

Man gehe von einer monotonen stetigen *streckenweise linearen* Funktion aus; sie sei linear für jedes Intervall einer Intervallmenge $\{\delta_\nu\}$, die eine perfekte Menge $T = \{\xi\}$ bestimmt, die überdies den Inhalt Null haben möge. Ist ξ_l der linke und ξ_r der rechte Endpunkt des

absolut konvergente uneigentliche Integral. Severini beschäftigt sich dann noch näher mit den Eigenschaften dieser Integrale.

Hobson hat kürzlich Einwände gegen die im Bericht I S. 200 enthaltene Darstellung erhoben; Proc. Lond. M S. (2) 4 (1907) S. 156. Sie beruhen auf einer irrigen Auffassung des Berichts, der, wie ich a. a. O. angebe, sowohl für das Doppelintegral als auch für das zweimalige Integral die Definition von de la Vallée-Poussin zugrunde legt, und in diesem Sinn richtig ist. Ich komme in den Proc. Lond. M. S. demnächst darauf zurück.

1) Vgl. Hahn, Mon. f. Math. 16 (1905) S. 317.

2) Monatschr. f. Math. 16 (1905) S. 161.

Intervalls δ, so ist in ξ_l die hintere und in ξ_r die vordere Ableitung unendlich groß. Der Kunstgriff von Hahn besteht nun darin, diese Funktion auf jedem Intervall δ durch einen Kurvenzug zu ersetzen, der in ξ_r und ξ_l *senkrecht* gegen die x-Achse verläuft und in jedem Punkte eine Tangente besitzt; am einfachsten so, daß die Tangentenrichtung sich *stetig* und *monoton* ändert.[1])

Dies wird im einzelnen folgendermaßen ausgeführt. Sei das Intervall von T insbesondere die Einheitsstrecke, so daß $\sum \delta_\nu = 1$ ist, so bestimme man zunächst eine solche positive Zahl $k < 1$, daß auch $\sum \delta_\nu^k$ noch konvergiert, was vielfach möglich ist[2]), und definiere nun die Funktion $f(x)$ zunächst für die Punkte $\{\xi\}$ von T in der Weise, daß

$$f(\xi) = 2^{1-k} \sum \delta_{\nu'}^k,$$

ist, wo die Summe über alle Intervalle $\{\delta_{\nu'}\}$ zu erstrecken ist, die links von ξ liegen; man hat also für jedes Intervall δ

$$f(\xi_r) - f(\xi_l) = \delta.$$

Sei noch ξ_m die Mitte des Intervalls δ.

Um diese Funktionen in der obengenannten Weise zu einer für die ganze Einheitsstrecke definierten monotonen stetigen Funktion $f(x)$ zu erweitern, setzt Hahn für jeden Wert x innerhalb δ, je nachdem $x \leqq \xi_m$ oder $x \geqq \xi_m$ ist,

$$f(x) = f(\xi_l) + (x - \xi_l)^k \quad \text{resp.} \quad f(x) = f(x_r) - (\xi_r - x)^k.$$

Die so bestimmte Funktion hat zunächst für jeden inneren Intervallpunkt eine eindeutig bestimmte endliche Ableitung, sie hat aber jetzt auch in *jedem* Punkt von T die bestimmte Ableitung $+\infty$. Dies ist zunächst klar für alle Punkte ξ_r und ξ_l. Für die übrigen ergibt es sich einfach wie folgt. Sei wieder ξ irgendein Punkt von T und ξ' einer, der rechts von ihm liegt, so hat man

$$f(\xi') - f(\xi) = 2^{1-k} \sum \delta_{\nu'}^k > 2^{1-k} \left(\sum \delta_{\nu'}\right)^k,$$

wo $\sum \delta_{\nu'} = \xi' - \xi$ ist. Hieraus folgert man zunächst, daß die Kurve $y = f(x)$ rechts von ξ ganz oberhalb der Kurve

$$y = f(\xi) + (x - \xi)^k$$

verläuft, und daraus ergibt sich die Behauptung leicht für die rechte Ableitung von ξ, und ebenso folgt sie für die linke.

---

1) Ein einfachster Kurvenzug dieser Art ergibt sich, wenn man von einem Halbkreis ausgeht und den einen seiner beiden Quadranten gegen die zum Durchmesser parallele Tangente umklappt.

2) Nimmt man z. B. $\delta_1 = 1/3$, $\delta_2 = \delta_3 = 1/9 \ldots$ usw., so kann $k = 2/3$ gesetzt werden.

Man braucht jetzt zu der so bestimmten Funktion $f(x)$ nur eine streckenweise konstante monotone Funktion $\varphi(x)$ zu addieren, so werden $f(x)$ und $f(x) + \varphi(x)$ an allen Stellen die gleichen Ableitungen besitzen.

S. 214. Der Wortlaut des hier erwähnten Satzes von Scheeffer entspricht nicht genau dem, was bewiesen wird. Die Scheeffersche Formulierung bedurfte nämlich der Verbesserung: diese habe ich zwar im Bericht I ausgeführt, doch ist noch eine Ungenauigkeit stehen geblieben.

Scheeffer spricht seinen Satz folgendermaßen aus:[1]) Wenn man von zwei im Intervalle $x_0 \cdots X$ überall stetigen Funktioen $F(x)$ und $f(x)$ weiß, daß die Gesamtheit der Stellen $\{x\}$, an denen die vorderen oberen Ableitungen (oder die vorderen unteren usw.) entweder nicht beide endlich, oder nicht beide einander gleich sind, höchstens eine abzählbare unendliche Menge P bildet, so ist im ganzen Intervall

$$F(x) = f(x) + C.$$

Wenn aber diese Gleichung besteht, so *sind* in Wirklichkeit *alle* Ableitungen einander gleich; deshalb ist die Formulierung, daß es Punkte geben soll, an denen die Ableitungen einander nicht gleich *sind*, genau genommen, unlogisch. Dies ist das eine, was zu ändern war. Es bleibt dann noch die Bedingung, daß die Ableitungen nicht beide endlich sind; daher erscheint im Bericht die Wendung, daß mindestens eine endlich ist, was damit äquivalent ist. Aber auch dies hat Scheeffer nicht sagen wollen, da es ja für den Beweis nicht vorausgesetzt wird. Es muß vielmehr in der Aussage des Satzes richtiger heißen, daß man weder über die Endlichkeit noch über die Gleichheit entsprechender Ableitungen in den Punkten von P etwas weiß. Der Satz muß also lauten:

Wenn bei den Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ die Punkte $\{x\}$, in denen über die Gleichheit oder Endlichkeit entsprechender Derivierten nichts bekannt ist, eine höchtens abzählbare Punktmenge bilden, so besteht der Fundamentalsatz.[2])

Der im Bericht geführte Beweis bezieht sich übrigens nur auf die vorderen oberen Ableitungen, was ersichtlich ist.

---

1) Acta math. 5 (1884) S. 282. An dieser ungenauen Formulierung leiden übrigens auch die anderen Scheefferschen Sätze.

2) Ich bemerke hierzu, daß man bei allen ähnlichen Problemen zwei Arten von Ausnahmepunkten zu unterscheiden hat; erstens solche, für die eine gewisse Eigenschaft entweder nicht besteht oder nicht zu bestehen braucht, und zweitens solche, in denen über das Bestehen einer Eigenschaft nichts bekannt zu sein braucht, in denen sie aber immer dann wirklich erfüllt ist, falls sie für die übrigen Punkte erfüllt ist.

B. Levi[1]) hat kürzlich zu dem im Fundamentalsatz enthaltenen Problem folgendes Theorem mitgeteilt. Seien $F(x)$ und $\Phi(x)$ solche zwei im Intervalle $a \ldots b$ stetige Funktionen, daß 1) $\Phi(x)$ in allen Punkten, höchstens mit Ausnahme einer Menge $\{\xi\}$ vom Inhalt Null, eine bestimmte rechte Ableitung besitzt, daß 2) von $F(x)$ nur bekannt ist, daß in allen diesen Punkten ihre rechte obere Ableitung gleich derjenigen von $F(x)$ ist, und daß 3) alle Ableitungen von F und Φ endlich sind, höchstens wieder mit Ausnahme einer Punktmenge, für welche die durch die Werte von $F - \Phi$ dargestellte Punktmenge den Inhalt Null hat, so können sich $F(x)$ und $\Phi(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden (vgl. auch noch § 5).

S. 216. Der hier erwähnte Fall, daß die Menge L der Ausnahmepunkte überalldicht ist, hatte bereits durch F. Lüroth eine Behandlung gefunden. Das Resultat ist das gleiche, wie im Fall des eben erörterten Scheefferschen Satzes IX. Ist die Menge L abzählbar, so ist sie belanglos. Auch der Beweis folgt dem Beweise dieses Satzes[2]).

§ 5. *Das Lebesguesche Integral.* Der ebenso einfache wie folgenreiche Grundgedanke von Lebesgue läuft darauf hinaus, als das bestimmte Integral einer eindeutigen Funktion $f(x)$ den *Inhalt der von allen ihren Ordinaten gebildeten Punktmenge* anzusehen, vorausgesetzt, daß sie *meßbar* ist (Kap. III, § 5). Funktionen, die in diesem Sinne ein Integral besitzen, nennt er *summierbar.* Dies gilt für geschränkte wie für nichtgeschränkte Funktionen. Daß für Funktionen, die teils positiv teils negativ sind, der Inhalt der positiven und negativen Ordinaten für sich in Betracht kommt, und zwar der erste positiv, der zweite negativ, bedarf kaum besonderer Erwähnung.

Ist $f(x)$ zunächst eine im Intervall $a \ldots b$ definierte *stetige geschränkte* Funktion, so ist die Übereinstimmung der Lebesgueschen Definition mit dem gewöhnlichen Integralbegriff leicht zu erkennen. Sie gilt aber auch für nicht stetige Funktionen. Insbesondere enthält sie auch das Riemannsche Integral als speziellen Fall und kann — was die Hauptsache ist — auch noch in solchen Fällen zu einem bestimmten Wert führen, in denen die Riemannsche Definition versagt.

Der methodische Kunstgriff, dessen sich Lebesgue zu diesem Zweck bedient, ist von der gleichen Einfachheit wie sein Grundgedanke; er besteht in dem in der ganzen Theorie der Punktmengen fundamentalen

---

1) Rend. Lincei (5) 15, 1 (1906) S. 558.

2) Vgl. die deutsche Ausgabe von Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen, 1892, S. 124.

Übergang vom *Endlichen* zum *Unendlichen*. Während sich nämlich die gewöhnliche Erzeugung des Integrals an Summen von Flächenstreifen anschließt, die der y-Achse parallel sind und mit einer *endlichen*, sich mehr und mehr verdichtenden Menge von Punkten des Intervalls $a \ldots b$ bestimmt werden, operiert Lebesgue von vornherein mit Ordinaten, die zu gewissen *unendlichen* Teilmengen des Intervalls $a \ldots b$ gehören, und zwar so, daß ihre Gesamtheit wieder das Intervall $a \ldots b$ ausmacht. Er zerlegt dazu die Ebene in Streifen, die *der x-Achse parallel* sind, und knüpft seine Schlüsse an solche im allgemeinen *unendliche* Teilmengen $X = \{x\}$ des Intervalls $a \ldots b$, für die die Endpunkte der Ordinaten diesen Parallelstreifen angehören.

Von derartigen Teilmengen $X = \{x\}$ des Intervalls $a \ldots b$ fassen wir insbesondere drei verschiedene Arten ins Auge. Sie sind so definiert, daß die Endpunkte der zugehörigen Ordinaten entweder auf eine Parallele zur x-Achse, oder innerhalb eines von zwei Parallelen gebildeten Streifens, oder aber in den von einer solchen Parallele abgeschnittenen Ebenenteil fallen. Wir bezeichnen sie durch

$$X_\eta = X(y = \eta), \quad X_i = X(y = y_i), \quad X_i^k = X(y_k > y > y_i), \quad X_\eta^\infty = X(y \geqq \eta).$$

Diese Mengen sollen nämlich alle diejenigen Punkte $\{x\}$ enthalten, für die

$$f(x) = \eta, \quad f(x) = y_i, \quad y_k > f(x) > y_i, \quad f(x) \geqq \eta$$

ist. Die Mengen X_η und X_i enthalten also solche Punkte x, für die die Endpunkte der Ordinaten auf die Gerade $y = \eta$ resp. $y = y_i$ fallen; X_i^k enthält diejenigen Punkte x, deren Ordinatenendpunkte *innerhalb* des von den Geraden $y = y_i$ und $y = y_k$ bestimmten Parallelstreifens fallen; endlich besteht X_η^∞ aus denen, deren Ordinaten auf oder oberhalb der Geraden $y = \eta$ endigen. Die Meßbarkeit dieser Mengen entscheidet über die Summierbarkeit der Funktion.

Für diese Mengen bestehen folgende unmittelbar einleuchtende Formeln. Sind

$$\{y'_\nu\} = y'_1 > y'_2 > \cdots > y'_\nu \cdots \quad \text{und} \quad \{y''_\nu\} = y''_1 < y''_2 \cdots < y''_\nu < \cdots$$

zwei Folgen, die gegen η konvergieren, so hat man[1])

$$X_\eta = \mathfrak{D}\{X(y'_\nu > \eta > y''_\nu\} \tag{2}$$

und ebenso ist, falls

$$\{\eta_\nu\} = \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_\nu \cdots$$

eine gegen η konvergierende Folge ist,

$$X_\eta^\infty = \mathfrak{D}\{X_{\eta_\nu}^\infty\}.$$

1) Man beachte, daß die Menge $\mathfrak{D}\{Q_\nu\}$ abgeschlossen ist, wenn alle Q_ν es sind; vgl. Bericht I S. 60.

Da sich nun gemäß Kap. III, § 5 die Meßbarkeit von $\{\nu\}$ auf ω überträgt, so kann man hieraus schließen, daß alle Mengen X_η meßbar sind, sobald es alle Mengen X_i^k sind.[1]) Ferner ist die letzte Bedingung wieder damit äquivalent, daß alle Mengen X_η^∞ meßbar sind; die eine ist eine Folge der andern.

Funktionen, für die *jede* Punktmenge X_i^k *meßbar* ist, bezeichnet Lebesgue als *meßbare Funktionen*. Alle Funktionen, die in den einzelnen Problemen bisher aufgetreten sind, gehören ihr an. Gemäß den Meßbarkeitssätzen von Kap. III, § 5 ist nämlich nicht allein jede endliche Summe beliebig vieler meßbarer Funktionen selbst meßbar, sondern auch jede unendliche, die als Grenze einer Folge meßbarer Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ definiert ist. Da nun offenbar jede lineare Funktion meßbar ist, so stellt auch jeder durch eine Gleichung der Form $y = f(x)$ darstellbare Streckenzug eine meßbare Funktion dar, und damit ist auch jede Funktion meßbar, die aus ihnen durch wiederholte Benutzung konvergenter Folgen entsteht. Zunächst also jede stetige Funktion, aber weiter auch jede Funktion einer der Klassen 1, 2, ... ν, ... α, ... im Sinn von Baire[2])

Es besteht nun der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine geschränkte Funktion summierbar ist, also ein Lebesguesches Integral besitzt, besteht darin, daß sie meßbar ist.

Es genügt, den Satz für eine nirgends negative Funktion $f(x)$ nachzuweisen. Wir bezeichnen wie in Kap. III, § 5 durch

$$M(Q), \quad M_a(P), \quad M_i(P)$$

den Inhalt einer meßbaren Menge Q, sowie den äußeren und inneren Inhalt einer beliebigen Menge P und betrachten eine gegen η konvergierende Folge $\{\eta_\nu\}$, so haben wir

$$(3) \qquad M_a\{X_\eta^\infty\} = \text{limes}\, M_a\{X_{\eta_\nu}^\infty\}; \quad M_i\{X_\eta^\infty\} = \text{limes}\, M_i\{X_{\eta_\nu}^\infty\}.[3])$$

Man kann daher $M_a(X_\eta^\infty)$ und $M_i(X_\eta^\infty)$ als Funktionen von y ansehen, die linksseitig stetig sind.

1) Man beachte, daß alle diese Mengen lineare Mengen sind, daß es sich hier also immer um die *lineare* Meßbarkeit handelt.

2) Ist $f(x)$ meßbar, so ist nach einem Satz von G. Vitali

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

wo $\varphi(x)$ höchstens von der Klasse 2 ist, und $\psi(x)$ überall Null, außer in einer Menge vom Inhalt Null. Rend. Ist. Lomb. (2) 38 (1905) S. 599.

3) Dieser Satz ist in Kap. III zwar nur für den Inhalt selbst bewiesen worden, er gilt aber auch für den äußeren und inneren Inhalt, da er auf der Benutzung unendlich vieler einschließender Intervalle beruht.

Angenommen nun, es gäbe irgendeine Teilmenge X_{η}^{∞}, die nicht meßbar ist, so hätte man

$$M_a(X_{\eta}^{\infty}) > M_i(X_{\eta}^{\infty}) + \sigma.$$

Da aber M_a und M_i, wie eben ausgeführt, linksseitig stetig sind, so gibt es auch einen Wert $\eta_1 < \eta$, so daß die obige Relation für alle Werte von y im Intervall $\eta_1 \ldots \eta$ und ein gewisses $\sigma' > 0$ besteht. Man betrachte nun diejenige Teilmenge H aller Ordinaten, die in dem durch η_1 und η bestimmten Parallelstreifen enthalten ist, so ist sie ersichtlicherweise ebenfalls summierbar. Denkt man sich also diese Menge H und ihre Komplementärmenge in der in Kap. III, § 5 genannten Weise in Quadrate $\{A_\nu\}$ und $\{B_\nu\}$ eingeschlossen, so kann die Gesamtfläche $\mathfrak{F}(C)$ der ihnen gemeinsamen Rechtecke unter jede Größe herabgedrückt werden, ebenso also auch die Gesamtlänge c' der Intervalle, in denen diese Fläche von irgendeiner Geraden $y = \eta'$ des Intervalls $\eta_1 \ldots \eta$ geschnitten wird. Nun liefert der Schnitt dieser Geraden mit den Bereichen $\{A_\nu\}$ und $\{B_\nu\}$ je eine Intervallmenge, die dem äußeren und dem inneren Inhalt der Menge $X_{\eta'}^{\infty}$ beliebig nahe kommt; man hat daher

$$c' \geqq M_a(X_{\eta'}^{\infty}) - M_i(X_{\eta'}^{\infty}).$$

Diese Relation besteht für jedes η' im Intervall $\eta_1 \ldots \eta$, und daher würde man auf Grund der obigen Annahme

$$\mathfrak{F}(C) > \sigma'(\eta - \eta_1)$$

erhalten, was einen Widerspruch darstellt.

Ich zeige nun, daß die Bedingung hinreichend ist. Dazu denken wir uns das Gesamtintervall $y_0 \ldots y_\nu$ durch die Werte y_i in ν Teilintervalle zerlegt, deren jedes kleiner als ε ist, und ziehen die Geraden $y = y_i$. Bezeichnet man nun mit Y_i und Y_i^{i+1} die Mengen der sämtlichen Ordinaten, die den Punkten von X_i und X_i^{i+1} entsprechen, und mit Y wieder die Gesamtmenge *aller* Ordinaten, so hat man

$$(4) \qquad Y = \sum_0^{\nu} Y_i + \sum_0^{\nu-1} Y_i^{i+1}.$$

Nun ist jede Menge Y_i meßbar; andererseits hat man offenbar

$$(5) \qquad M_a(Y_i^{i+1}) \leqq y_{i+1} M(X_i^{i+1}), \quad M_i(Y_i^{i+1}) \geqq y_i M(X_i^{i+1}),$$

und daraus folgt

$$(6) \qquad \begin{aligned} M_a(Y) &\leqq \sum_0^{\nu} M(Y_i) + \sum_0^{\nu-1} y_{i+1} M(X_i^{i+1}), \\ M_i(Y) &\geqq \sum_0^{\nu} M(Y_i) + \sum_0^{\nu-1} y_i M(X_i^{i+1}), \end{aligned}$$

mithin

$$M_a(Y) - M_i(Y) \leqq \varepsilon \sum_0^{\nu-1} M(X_i^{i+1}) = \varepsilon(b-a). \tag{7}$$

Daraus ist aber die Summierbarkeit von Y zu folgern.

Man hat hiermit zugleich einen das Integral definierenden Grenzwert gefunden, von dem man noch in bekannter Weise zeigen kann, daß er von der Art der gewählten Teilpunkte y unabhängig ist.[1])

Der so gefundene Grenzwert kann nun auch auf *nichtgeschränkte* Funktionen übertragen werden und für sie als *Definition des Integrals* dienen; eine nichtgeschränkte Funktion heißt also dann und nur dann *summierbar*, wenn die beiden in (6) enthaltenen Summen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. Während aber die geschränkten summierbaren Funktionen alle im gewöhnlichen Sinne integrierbaren Funktionen umfassen, ist dies für nichtgeschränkte Funktionen nicht der Fall. Es gibt nicht summierbare Funktionen, die im gewöhnlichen Sinne integrierbar sind.[2])

Auf diesen Integralbegriff lassen sich die allgemeinen Sätze und Rechnungsregeln der Integralrechnung ohne weiteres übertragen, was ich nicht näher ausführe. Auf eine seiner Eigenschaften soll hingewiesen werden. Da der Lebesguesche Integralbegriff nämlich ein *Inhalts*begriff ist, so gelten für ihn alle in Kap. III, § 5 erwähnten Sätze. Es ist also stets der Übergang von $\{\nu\}$ zu ω ausführbar. Insbesondere gestattet daher jede unendliche konvergente Reihe geschränkter summierbarer Funktionen die gliedweise Integration.[3]) Daher sind auch die Funktionen einer der Baireschen Klassen $0, 1, 2, \ldots \nu, \ldots \alpha, \ldots$ summierbar. Damit ist in der Tat gezeigt, daß eine Fülle nicht integrierbarer Funktionen summierbar ist.

---

1) Mit der Verallgemeinerung des Integralbegriffs hat sich auch H. W. Young eingehend beschäftigt; wie er angibt, ist er unabhängig von Lebesgue ebenfalls zu dessen Integralbegriff geführt worden (Proc. Lond. Math. Soc. (2) 2 (1904) S. 52.) Er geht von der Frage aus, welche Änderungen der Intervallteilung bei dem gewöhnlichen zum Integralbegriff führenden Verfahren gestattet sind, ohne die bezüglichen Grenzwerte (oberes, unteres und bestimmtes Integral) zu ändern. Er beginnt mit einer endlichen Zahl von Intervallen, geht alsdann zu unendlich vielen über und benutzt schließlich auch beliebige meßbare Punktmengen, in analoger Weise, wie es bei Lebesgue der Fall ist. Übrigens beschäftigt er sich vorwiegend mit den oberen und unteren Integralen und ihren Werten und gibt auch die Ableitung einiger Sätze von Lebesgue. Vgl. Phil. Trans. London 204 (1905) S. 221.

2) Lebesgue gibt folgendes Beispiel (a. a. O. S. 115)

$$f(x) = x^2 \sin {}^1/x^2, \quad \text{mit} \quad f(0) = 0.$$

3) Über die Ausdehnung dieser Tatsache auf den Fall, daß die Funktionen nicht sämtlich geschränkt sind, vgl. B. Levi, Rend. Ist. Lomb. (2) 39 (1906) S. 775.

Im einzelnen bestehen folgende Sätze[1]):

1) Das unbestimmte Integral einer summierbaren Funktion $f(x)$ ist eine Funktion geschränkter Schwankung.

2) Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Summierbarkeit einer der vier Derivierten einer Funktion $f(x)$, die (d. h. die Derivierte) überdies als *endlich* vorausgesetzt wird, besteht darin, daß $f(x)$ eine Funktion geschränkter Schwankung ist.[2])

3) Das unbestimmte Integral einer jeden summierbaren Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist wieder diese Funktion $f(x)$ selbst.

4) Das unbestimmte Integral einer *jeden* summierbaren Funktion hat diese Funktion als Ableitung, höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt Null.[3])

Die beiden letzten Sätze enthalten auch eine Antwort auf das im sogenannten Fundamentalsatz der Integralrechnung enthaltene Problem, und zwar in der Weise, daß sie die Frage beantworten, unter welchen Umständen die Grundoperationen der Analysis wirklich inverse Operationen sind. Die Antwort enthält zwar nichts, was sachlich über die obigen Sätze hinausgeht, möge aber doch eine Stelle finden. Man kann sie in doppelter Weise aussprechen:

1) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das unbestimmte Integral einer überall endlichen Derivierten $Df(x)$ einer Funktion $f(x)$ bis auf eine Konstante wieder die Funktion $f(x)$ gibt, ist die, daß $Df(x)$ summierbar ist. 2) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das unbestimmte Integral einer Derivierten $Df(x)$, die überall endlich ist, bis auf eine Konstante wieder die Funktion $f(x)$

1) Die ausführliche Darstellung dieser und weiterer Sätze findet man in den Leçons sur l'intégration, auf die ich hiermit verweise; besonders S. 120ff. Beweise der obigen Sätze hat auch B. Levi gegeben; Rend. Linc. (5) 15, 1 (1906) S. 433, 551 u. 674, sowie 15, 2 (1906) S. 358. Er hat zugleich darauf hingewiesen, daß die Darstellung von Lebesgue an einzelnen Stellen der Ergänzung bedarf; diese Ergänzung gab Lebesgue ebenda 15, 2 (1906) S. 3. Ein letzter Einwand, den B. Levi gegen die Gültigkeit der Lebesgueschen Beweise erhob (a. a. O. S. 358), ist jedoch gegenstandslos. Lebesgue operiert in seinen Beweisen vielfach mit unendlich vielen Intervallen, die ein gegebenes Intervall $a \,..\, b$ überalldicht erfüllen; es wird aber stets angenommen, daß diese Intervalle eine *abzählbare* abgeschlossene Punktmenge bestimmen. Diese Voraussetzung liegt den Lebesgueschen Begriffsbildungen überall zugrunde. Dies hatte B. Levi übersehen. Sieht man von ihr ab, so würden allerdings die Beweise versagen. Vgl. Rend. Linc. (5) 16, 1 (1907) S. 93. Man vgl. auch die verwandten Bemerkungen in Kap. VII S. 254, Anm.

2) Es braucht also nur die eine Derivierte endlich zu sein (nicht etwa geschränkt).

3) Die Stellen $\{\xi\}$, an denen eine unendlich große Ableitung auftritt, bilden daher ebenfalls eine Menge vom Inhalt Null.

ist, ist die, daß $f(x)$ von geschränkter Schwankung ist. Man kann hierzu endlich noch folgenden Satz fügen: 3) Jede Funktion $f(x)$ geschränkter Schwankung hat eine endliche Derivierte, höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge $\{x\}$ vom Inhalt Null. Es gibt daher auch in der Lebesgueschen Theorie stetige Funktionen geschränkter Schwankung, die nicht als unbestimmte Integrale darstellbar sind, wie z. B. die streckenweise konstanten Funktionen, deren Menge T nicht den Inhalt Null hat.

Es muß überdies auf einen Unterschied gegenüber dem S. 315 behandelten Problem hingewiesen werden. Dort wird die Integrierbarkeit der bezüglichen Ableitungen nicht vorausgesetzt, während sich die vorstehende Fragestellung ausschließlich auf die Integrierbarkeit bezieht.

Man kann dem Problem des Fundamentalsatzes endlich auch die Form geben, daß man sich auf die Frage beschränkt, unter welchen Bedingungen überhaupt eine irgendwie gegebene stetige Funktion, deren Derivierte für gewisse Werte von x auch einen unendlichen Wert haben können, durch das unbestimmte Integral einer ihrer vier Derivierten dargestellt werden kann, und zwar in der Weise, daß man nur die Werte beachtet, die endlich sind. Die Antwort lautet, daß dies immer und nur dann der Fall ist, wenn die Funktion überhaupt als unbestimmtes Integral darstellbar ist. Die Notwendigkeit der Bedingung ist evident; daß sie auch hinreichend ist, folgt aus dem Satz 4).

Die in ihm enthaltene Bedingung kann man noch in eine andere Form setzen und zu folgendem Satz gelangen. Damit eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $a \ldots b$ ein unbestimmtes Integral ist, ist notwendig und hinreichend, daß, wenn $\{\delta_\nu\}$ irgendeine Intervallmenge von $a \ldots b$ ist, und $\sum \delta_\nu = l$ ist, die diesen Intervallen entsprechende Summe der Funktionsschwankungen $\sum \delta f(x)$ mit l gleichmäßig gegen Null konvergiert Lebesgue spricht dies auch so aus, es müsse für jede inhaltlose Menge $\{x\}$ die Gesamtänderung der Funktion ebenfalls den Inhalt Null haben.[1])

1) Vgl. Rend. Lincei (5) 16, 1 (1907) S. 93 und Leçons, S. 129. B. Levi hat die obige Frage folgendermaßen beantwortet (Rend. Linc. (5) 15, 1 (1906) S. 679, u. 15, 2 (1906) S. 358 u. 410.) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $f(x)$ sich vom unbestimmten Integral einer ihrer Derivierten $Df(x)$ nur um eine Konstante unterscheidet, sei die folgende: 1) jeder inhaltloser Wertmenge $\{x\}$ muß eine inhaltlose Wertmenge $\{f(x)\}$ entsprechen; 2) unendlich große Werte der Ableitungen können sich nur für eine inhaltlose Wertmenge $\{\xi\}$ einstellen; und 3) falls von den Werten an den Stellen ξ abgesehen wird, muß $Df(x)$ ein Integral besitzen. Der Beweis beruht aber, wie Lebesgue hervorhebt, auf einer Voraussetzung, die nicht immer zutrifft. Sie besagt, daß, wenn für eine Menge $\{\xi\}$ die Wertmengen $\{f(\xi)\}$ und $\{\varphi(\xi)\}$ beide vom Inhalt Null sind, dies auch für die Wertmenge $\{f(\xi)+\varphi(\xi)\}$ der Fall ist. Lebesgue konstruiert ein Beispiel, in dem dies nicht zutrifft. Rend. Linc. (5) 16, 1 (1907) S. 285, Anm.

Die Erweiterung des Lebesgueschen Integrals auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ist ohne weiteres zulässig, da alle Prozesse, auf denen sie beruht, diese Erweiterung gestatten.[1])

§ 6. *Die Konvergenz der Reihen* (Bericht I S. 217—250).[2]) S. 225, Anm. 3. Die Behauptung, daß die hier zitierten Sätze von Arzelà irrig sind, trifft nicht zu; ich bemerke dazu folgendes.

Die Form, in die Arzelà seine Beweise gekleidet hatte, ist in der Tat nicht ganz frei von Fehlern[3]); zudem hatte er mit seinen Resultaten an anderer Stelle ein unrichtiges Resultat abgeleitet (vgl. Bericht I, S. 231). Überdies lag mir bei der Abfassung dieses Teils des Berichts in erster Linie daran, die Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz darzustellen; so erklärt es sich, daß ich von einer genaueren Prüfung der Arzeläschen Untersuchungen Abstand genommen habe.

Alles dies bestimmt mich, hier den Arzeläschen Sätzen einen breiteren Raum anzuweisen, zumal sie inzwischen auch sonst mehr in den Vordergrund getreten sind. Doch möchte ich die Bemerkung nicht zurückhalten, daß die Osgoodschen Sätze über die *Art*, in der eine Reihe stetiger Funktionen gegen eine stetige Funktion konvergiert, meines Erachtens mehr Licht verbreiten, als die Sätze von Arzelà. Für das Verständnis der besonderen Eigenart der Konvergenz scheint mir die Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz und im Zusammenhang damit die Lage der Maxima der gegen die Grenzfunktion $f_\omega(x)$ konvergierenden Funktionen $f_\nu(x)$ in erster Linie in Betracht zu kommen.

Andererseits können aber die Sätze von Arzelà auch für sich Interesse beanspruchen. Ihre Bedeutung liegt darin, daß sie *Endlichkeitssätze* sind. Bei ungleichmäßiger Konvergenz gibt es *keinen* für *alle* Werte von x zureichenden Wert von ν, der den Rest unter eine gegebene Größe σ herabdrückt; es gibt aber — und das ist das Arzeläsche Theorem — für jedes σ eine *endliche* Menge hierzu ausreichender Werte $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p$ von ν. Dies ist so zu verstehen, daß für jedes beliebige x *mindestens eine* dieser Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p$ die Eigenschaft hat, daß, wenn sie für ν gesetzt wird,

$$(1) \qquad |f_\omega(x) - f_\nu(x)| < \sigma$$

1) Severini hat nach der Methode von de la Vallée-Poussin (Bericht I, S. 187) die Ausdehnung auf uneigentliche Integrale ausgeführt; Atti Acc. Catania (4) 20 (1907) S. 1.

2) Die Approximation mittels Reihen von Funktionen besonderer Art liegt außerhalb des Rahmens dieses Berichtes.

3) Arzelà hat später eine berichtigende Darstellung der Beweise gegeben; vgl. Rend. Ist. Bologna (2) 7 (1903) S. 22.

ist; und zwar spaltet sich das Gesamtintervall so in p Teilintervalle, daß für alle Punkte eines dieser Intervalle je eine der Zahlen ν_i die Relation 1) bewirkt. Doch aber wird diese Relation, wenn sie für ein spezielles x und einen Wert ν_i besteht, für dieses x nicht notwendig durch *jedes* $\nu > \nu_i$ erfüllt; denn sonst wäre ja, wie leicht ersichtlich, die Konvergenz gleichmäßig. Es kann also immer wieder Werte $\nu > \nu_i$ geben, für die sie in bezug auf den gewählten Wert von x nicht erfüllt ist. Der Arzelàsche Satz lautet also:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine konvergente Folge im Intervall $a \leqq x < b$ stetiger Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ gegen eine stetige Funktion $f_\omega(x)$ konvergiert, besteht darin, daß es erstens eine endliche Zahl von Werten $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p$ von ν gibt, so daß für jedes x mindestens einer von ihnen ausreicht, um die Differenz $|f_\omega(x) - f_\nu(x)|$ unter eine Größe σ herabzudrücken, und daß zweitens die jedem Wert ν_i entsprechenden Punkte x je ein endliches Teilintervall des Gesamtintervalls ausmachen.

Um dies zu zeigen, schließt man sich zweckmäßig an die geometrische Einkleidung an, die Arzelà für den Beweis seiner Sätze benutzt. Dazu denken wir uns eine Reihe paralleler Geraden $y = y_\nu$, die gegen die Gerade $y = y_\omega$ konvergieren, und ersetzen die Funktion $f_\nu(x)$ durch eine auf dieser Geraden definierte Funktion $f(x, y_\nu)$.[1])

Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit der Bedingung, und geben den Eigenschaften der Stetigkeit und der Konvergenz zweckmäßig folgende Form. Die Stetigkeit von $f_\nu(x)$ drückt sich in den Relationen

$$(1) \qquad |f(x \pm \delta_\nu, y_\nu) - f(x, y_\nu)| < \sigma, \quad |f(x', y_\nu) - f(x'', y_\nu)| < 2\sigma$$

aus[2]); die erste gilt für *gegebenes* σ, *geeignetes* η_ν, *jedes* $\delta_\nu \leqq \eta_\nu$ und *jedes* x, die zweite ihr gleichwertige für irgend zwei Punkte x' und x'' *jedes* so bestimmten Intervalls $2\eta_\nu$[3]); und zwar ist η_ν von ν abhängig. Die Konvergenz drückt sich in der Relation

$$(2) \qquad |f(x, y_\omega) - f(x, y_\nu)| < \sigma$$

aus; sie gilt bei *gegebenem* x und *gegebenem* σ für *geeignetes* N und *jedes* $\nu > N$, und zwar ist N eine Funktion von x, was eine Folge der ungleichmäßigen Konvergenz ist. Da endlich nach Voraussetzung auch $f(x, y_\omega)$ stetig ist, so hat man auch

$$(3) \qquad |f(x \pm \delta_\omega, y_\omega) - f(x, y_\omega)| < \sigma, \quad |f(x', y_\omega) - f(x'', y_\omega)| < 2\sigma,$$

1) Vgl. auch Bericht I S. 224.

2) Ich werde bald die eine, bald die andere dieser beiden Relationen benutzen.

3) Das Intervall ist immer so gedacht, daß x seine Mitte ist, was die Beweisführung vereinfacht. Auch die Hinzufügung der zweiten Relation soll diesem Zweck dienen.

und zwar gilt die erste Relation wieder in der Weise, daß es bei *gegebenem* σ ein *geeignetes* η_ω gibt, so daß sie für *jedes* $\delta_\omega \leqq \eta_\omega$ und für *jedes* x erfüllt ist, und die zweite für irgend zwei Werte x' und x'' *jedes* so bestimmten Intervalls $2\eta_\omega$.

Werde nun σ beliebig, im übrigen aber fest angenommen, ein Punkt x des Intervalls $a \ldots b$ ausgewählt, und die ihm gemäß (2) zugehörige Zahl N bestimmt, so bestehen für diesen Wert x und für alle Werte $\nu > N$ die beiden Relationen (1) und (2) zugleich, und zwar in der Weise, daß die in die Relationen (1) eingehende Größe η_ν von ν abhängt. Für alle diese Werte ν haben die zugehörigen $\{\eta_\nu\}$ eine *obere* Grenze η, die nun nicht mehr von ν, sondern nur noch von x abhängt; sie ist dadurch gekennzeichnet, daß es *mindestens einen* Wert ν gibt, für den beide Ungleichungen (1) und (2) bestehen, falls $\delta_\nu < \eta$ gewählt wird. Ein derartiges Intervall der Länge 2η gehört also zu *jedem* Punkt x des Intervalls; nach dem Borelschen Theorem gibt es daher auch eine *endliche* Zahl solcher Intervalle, die alle Punkte des Intervalls $a \ldots b$ einschließen. Damit ist der Satz bereits im wesentlichen bewiesen.

Sei nämlich 2ϑ die Länge irgendeines dieser Intervalle und x der Punkt, zu dem es gehört, so gibt es dem Vorstehenden gemäß einen dem Intervall zugehörigen Wert ν' von ν, so daß für diesen Wert ν' und irgend zwei Punkte x' und x'' dieses Intervalls die beiden Relationen (1) und (2) gelten. Ist nun $\vartheta \leq \eta_\omega$, so gilt für diese Punkte x' und x'' und den Wert ν' auch die Relation (3), also auch die aus ihnen resultierende Relation

$$(4) \qquad |f(x', y_\omega) - f(x' y_\nu)| < 4\sigma,$$

wo also x' irgendein Punkt des Intervalls 2ϑ sein kann. Ist dagegen $\vartheta > \eta_\omega$, so kann man das Intervall 2ϑ in eine endliche Zahl von Teilintervallen zerlegen, deren jedes kleiner als $2\eta_\omega$ ist. Dann gelten für je zwei Punkte x' und x'' eines solchen Teilintervalls wiederum die Relationen (1), (2) und (3) zugleich, also auch die Relation (4).

Es zerfällt also das Gesamtintervall $a \ldots b$ in eine *endliche* Zahl von Teilintervallen, so daß jedem Teilintervall ein gewisser Wert ν' entspricht, der für *alle* ihm zugehörigen Punkte die Relation (4) nach sich zieht.

Die Umkehrung folgt unmittelbar. Denn aus den Relationen (1), (2) und (4) folgt eine Relation der Form (3). Andererseits gibt es eine *endliche* Zahl von Werten ν' von ν, für die die Relation (4) gilt; sie seien $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p$. Daher gibt es auch eine endliche Zahl von Werten $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$, die zu ihnen gemäß den Relationen (1) gehören.

Ferner gibt es eine endliche Zahl von Intervallen, die den Werten $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_p$ entsprechen und das Gesamtintervall $a \dots b$ ausmachen. Ist nun $2\varDelta$ das kleinste dieser Intervalle, und ist $\varDelta_0$ die kleinste aller Größen $\varDelta$ und δ_ν so bestehen alle Relationen (1), (2) und (4) für dieses $\varDelta_0$ und *jedes* x, also auch die Relationen (3). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Arzelà bezeichnet die hiermit nachgewiesene Eigenschaft als *streckenweise gleichmäßige Konvergenz.* Gehen wir nämlich zu den Geraden $y = y_\nu$ zurück, behalten diejenigen bei, die den Werten ν_i entsprechen, und markieren auf jeder dieser Geraden das zugehörige Intervall, so kann man sich alle diese Intervalle zu einem treppenartigen Linienzug verbunden denken.[1])

Arzelà hat den obigen Satz später auch auf Funktionen von zwei Variablen übertragen[2]); da das Borelsche Theorem die eigentliche Stütze des Beweises ausmacht, so kann die Übertragung ohne weiteres erfolgen.

Im Anschluß an den Begriff der streckenweise gleichmäßigen Konvergenz hat Arzelà auch die gliedweise Integrierbarkeit einer konvergenten Reihe erörtert. Sein Resultat knüpft sich an die Bedingung, daß die streckenweise gleichmäßige Konvergenz *im allgemeinen* erfüllt ist, d. h. bis auf eine endliche Zahl von Intervallen von beliebig kleiner Intervallsumme. Werden also σ und ε beliebig vorgegeben, so muß es eine endliche Menge von Zahlen $N_1, N_2, \dots N_p$ geben, so daß für *jeden* Wert von x, höchstens mit Ausnahme solcher, die in gewissen Intervallen $\tau', \tau'', \dots \tau^{(\nu)}$ liegen, für den Rest eine Relation

$$| R_{N_i}(x) | < \sigma; \quad \tau' + \tau'' + \cdots + \tau^{(\nu)} < \varepsilon$$

besteht. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend.[3])

S. 225. Hobson und H. W. Young haben die Sätze von Osgood über die Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz und die gliedweise Integration der Reihen auf solche Reihen ausgedehnt, deren Glieder punktweise unstetig resp. integrierbar sind. Sätze und Beweise gestatten eine unmittelbare Übertragung[4]); Hobson gibt auch einen Beweis für die von Arzelà stammende ebengenannte Formulierung des Satzes über die gliedweise Integration in seinem allgemeinsten Fall.[5])

1) Eine Anwendung dieser Resultate findet sich in Arzelàs Arbeit über den zweiten Mittelwertsatz für Doppelintegrale; Mem. Ist. Bologna (5) 10 (1902) S. 5. Vgl. auch E. Gera, Rend. Ist. Lomb. (2) 37 (1904) S. 997.

2) Rend. Ist. Bologna (1887, 1888) S. 24.

3) Vgl. besonders Memorie Ist. Bologna (5) 8 (1900) S. 5 und Rend. Ist. Bologna 1906, S. 32.

4) Proc. Lond. M. S. 34 (1902) S. 45 und (2) 1 (1904) S. 89.

5) Proc. Lond. M. S. (2) 1 (1904) S. 373.

S. 233. Für die Baireschen Sätze sind verschiedene neue Beweise gegeben worden, sowohl von Baire selbst wie auch von Borel und Lebesgue.[1]) Sie haben überdies eine Ausdehnung auf Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen gefunden. Im einzelnen erwähne ich noch folgenden Satz von Lebesgue: Damit eine Funktion $f(x, y)$ in einem Gebiet T von der Klasse ν sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie erstens auf allen stetigen Kurven ihres Gebietes höchstens von der Klasse ν sei, und zweitens mindestens auf einer wirklich von der Klasse ν.[2])

S. 239. Die hier erwähnte Darstellung von Funktionen der Baireschen Klasse 2 geschieht durch Doppelfolgen mit nicht vertauschbarem Grenzübergang. Im Anschluß hieran hat Fréchet folgenden Satz bewiesen.

Sei $f_\nu^{(p)}(x)$ eine Doppelfolge, so daß für jedes ν

$$f_\nu(x) = \lim_{p=\infty} f_\nu^{(p)}(x), \quad f(x) = \lim_{\nu=\infty} f_\nu(x) \quad .$$

ist. Wenn es nun keine Zahlen ν_λ, p_λ gibt, so daß für jedes x die Gleichung

$$f(x) = \lim_{\lambda=\infty} f_{\nu_\lambda}^{(p_\lambda)}(x)$$

besteht, so kann man Zahlen ν_λ, p_λ dieser Art doch stets so wählen, daß die vorstehende Gleichung bis auf eine Menge $X = \{x\}$ vom Inhalt Null erfüllt ist.[3])

Da nun jede Funktion einer der Baireschen Klassen mittels wiederholter Benutzung von Folgen entsteht, so folgt aus Kap. III, § 5, daß jede solche Funktion für alle Werte x bis auf diejenigen einer Menge vom Inhalt Null als Grenze einer Reihe von stetigen Funktionen, insbesondere also auch von Polynomen angesehen werden kann.[4])

§ 7. *Zusätze zum Bericht II.* S. 27. Im Interesse größerer Deutlichkeit möge noch auf folgende Analogie mit den gewöhnlichen ganzen Zahlen hingewiesen werden. Die Gesamtheit aller der Größe nach geordneten positiven ganzen Zahlen stellt meines Erachtens einen wohldefinierten widerspruchslosen Begriff dar, in ihm vermag ich nichts

---

1) Baire, Bull. Soc. Math. 28 (1900) S. 173; Borel, C. R. 137 (1903) S. 903; Lebesgue, Bull. Soc. Math. 32 (1904) S. 229 und Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 139. Man vgl. auch die S. 302 genannten Monographien von Baire und Borel.

2) Der Begriff der stetigen Kurve wird hier allerdings in seinem allgemeinsten Sinne gebraucht, so daß er die Peanosche Kurve umfaßt. Einen analogen Satz spricht Lebesgue für Funktionen beliebig vieler Variablen aus.

3) Rend. Palermo 22 (1906) S. 15.

4) Dies folgt auch auf Grund des Lebesgueschen Integralbegriffes; vgl. S. 318.

widerspruchsvolles zu entdecken. Dasselbe muß daher auch für die Gesamtheit aller der Größe nach geordneten Ordnungszahlen gelten; die Analogie ist eine durchaus vollständige. Wie aber die Gesamtheit aller der Größe nach geordneten ganzen Zahlen keine ganze Zahl darstellt oder bestimmt, so stellt auch die Gesamtheit aller der Größe nach geordneten Ordnungszahlen keine Ordnungszahl dar. In der Tat beginnen die widerspruchsvollen Folgerungen im Gebiet der gewöhnlichen ganzen Zahlen, wie im Gebiet der Ordnungszahlen dann und nur dann, wenn man diesen Gesamtheiten die Eigenschaften der ganzen Zahlen oder der Ordnungszahlen beizulegen beginnt; auch hier besteht volle Analogie. Die Widersprüche treten nämlich in beiden Fällen darin zutage, daß man zu Folgerungen gelangen würde, die gegen die logische Unmöglichkeit einer größten ganzen Zahl oder einer größten Ordnungszahl verstoßen. Beide Gesamtheiten sind sozusagen *nicht abgeschlossen.*

S. 29. Der Vollständigkeit halber setze ich noch die Richardsche Vorschrift für die Bildung dieser Dezimalbrüche hierher. Er bildet kombinatorisch alle Definitionen, die der Reihe nach $1, 2, \ldots \nu \ldots$ Worte enthalten, und ordnet sie nach der Zahl der in sie eingehenden Worte oder Buchstaben.

Übrigens kann es sich bei meiner Zurückweisung der Richardschen Argumente einzig und allein darum handeln, dies in *formaler* Weise zu tun, d. h. also so, daß ich dieselben Begriffe als wohldefiniert ansehe, wie er selbst und wie Poincaré, und auf Grund dessen zeige, daß sein Schluß einen formalen Fehler enthält. Dies ist ebenso notwendig wie hinreichend. Auf eine materielle Erörterung der von ihm und König benutzten Begriffe brauche ich zu diesem Zweck nicht einzugehen.[1])

S. 33. Nach Lebesgue ist die in Zermelos Wohlordnungsbeweis vorausgesetzte Zuordnung für jede beliebige Menge durch analytisch definierbare Funktionen, d. h. solche einer der Baireschen Klassen endlicher oder abzählbarer Ordnung, nicht realisierbar.[2]) Übrigens wird alsbald ein neuer Beweis des Wohlordnungssatzes von Zermelo erscheinen.[3])

S. 58. Hausdorff hat seine allgemeinen Untersuchungen in der Weise fortgesetzt, daß er die verschiedenen Gattungen überalldichter

1) Übrigens vermag ich in dem Begriff der endlichen Definierbarkeit nichts zu finden, was zu Bedenken Veranlassung gibt. Man darf nur nicht glauben, damit eine *besondere* Gattung mathematischer Objekte definiert zu haben. Vgl. S. 28 dieses Berichts II.

2) Bull. Soc. Math. 35 (1907) S. 212.

3) Math. Ann. 65 (1908) Heft 1. In Bd. 65 wird Zermelo auch eine Arbeit über die Grundlagen der Mengenlehre veröffentlichen.

Typen und ihre Klassifizierung auch für den Fall in Betracht gezogen hat, daß sie Reihen beliebiger Mächtigkeit enthalten.[1])

S. 59. Hier hatte ich in Anm. 1 bereits auf eine Menge hingewiesen, für die sich die Meßbarkeit nicht entscheiden läßt. Lebesgue kommt in der ebengenannten Arbeit zu folgenden Resultaten: 1) Es gibt Mengen, die nicht meßbar sind; 2) es gibt Mengen, die nebst ihrer Komplementärmenge in jedem Intervall von der zweiten Kategorie sind. Er erwähnt überdies, daß die Existenz nicht meßbarer Mengen in einer mir nicht mehr zugänglichen Arbeit von Vitali bewiesen ist.[2])

S. 94. O. Janzen hat auf Grund des Borel-Lebesgueschen Inhaltsbegriffs auf folgende Weise einen *Längeninhalt* und einen *Oberflächeninhalt* für ebene und räumliche Punktmengen definiert.[3])

Sei P zunächst eine ebene Menge, die in einem Quadrat Q enthalten ist, so zerlege man Q in ν^2 kongruente Teilquadrate und projiziere in jedem Teilquadrat q_i die in ihm enthaltene Punktmenge P_i auf seine Seiten. Sind dann X_i und Y_i diese Projektionen, sind $M(X_i)$ und $M(Y_i)$ ihre Inhalte, und wird

$$M_\nu = \sum \sqrt{M(X_i)^2 + M(Y_i)^2}$$

gesetzt, so definiert er $\lim M_\nu$ als den *Längeninhalt* der ebenen Menge P. Für stetige Kurven $y = f(x)$ stimmt dieser Inhalt mit der Bogenlänge überein. Analog verfährt er im Raum.

Ebenso läßt sich ein *Oberflächeninhalt* definieren, falls man von einer räumlichen Menge P ausgeht, den Würfel W, in dem sie enthalten ist, in ν^3 Teilwürfel w_i zerlegt, die in w_i enthaltene Menge P_i auf seine drei Flächen projiziert, die Inhalte $M(X_i)$, $M(Y_i)$, $M(Z_i)$ dieser Projektionen bestimmt und dann wieder zum Grenzwert von

$$M_\nu = \sum \sqrt{M(X_i)^2 + M(Y_i)^2 + M(Z_i)^2}$$

übergeht. Janzen weist nach, daß dieser Grenzwert sicher in dem Falle die Oberflächenzahl einer durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ dargestellten Fläche liefert, daß die beiden ersten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ endlich und stetig sind.

[Nachträglicher Zusatz: E. Jacobsthal behandelt vertauschbare Ordnungszahlen (Math. Ann. 64 (1907) S. 475); er gibt die Lösungen der Gleichungen

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha, \quad \alpha^\beta = \beta^\alpha.]$$

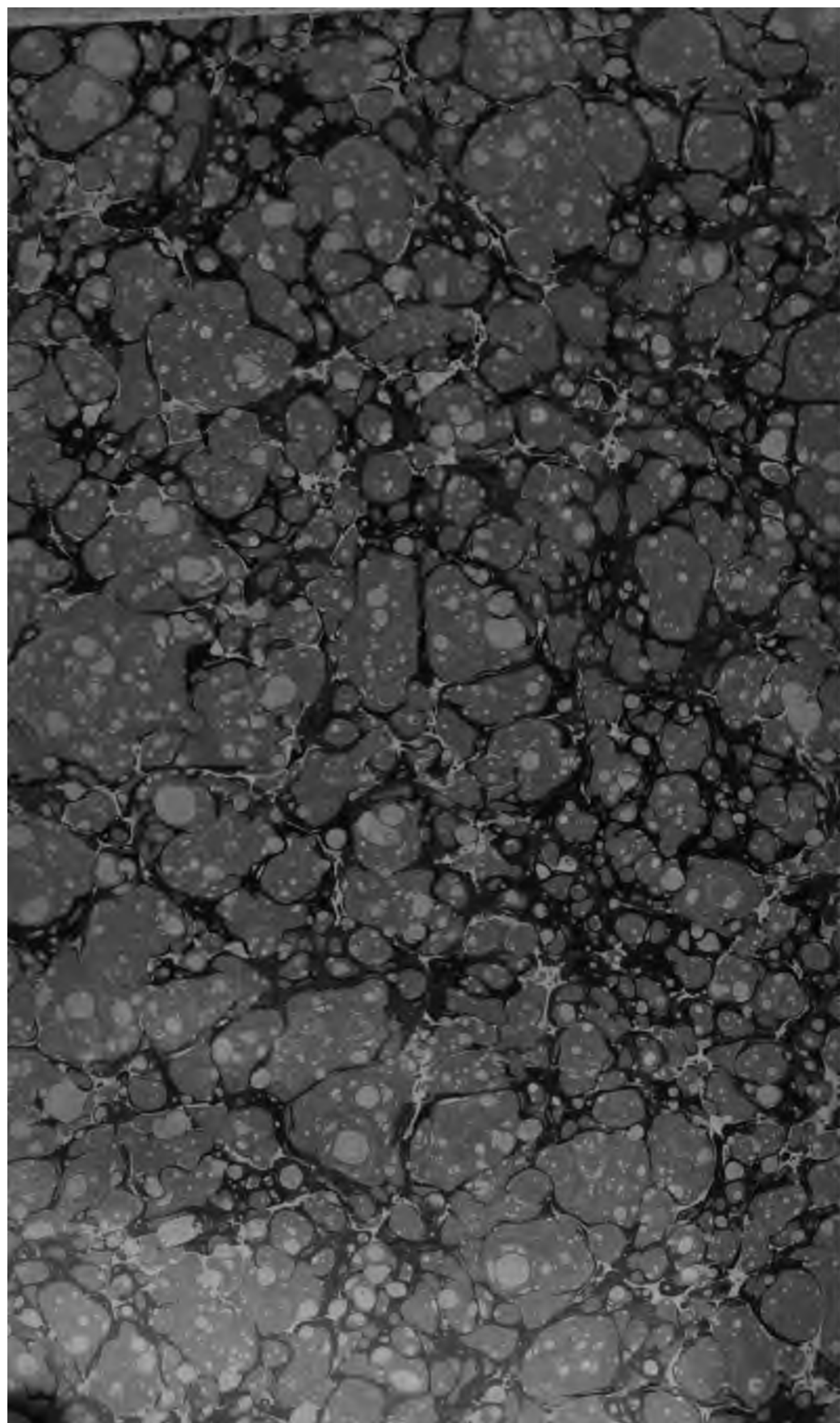
---

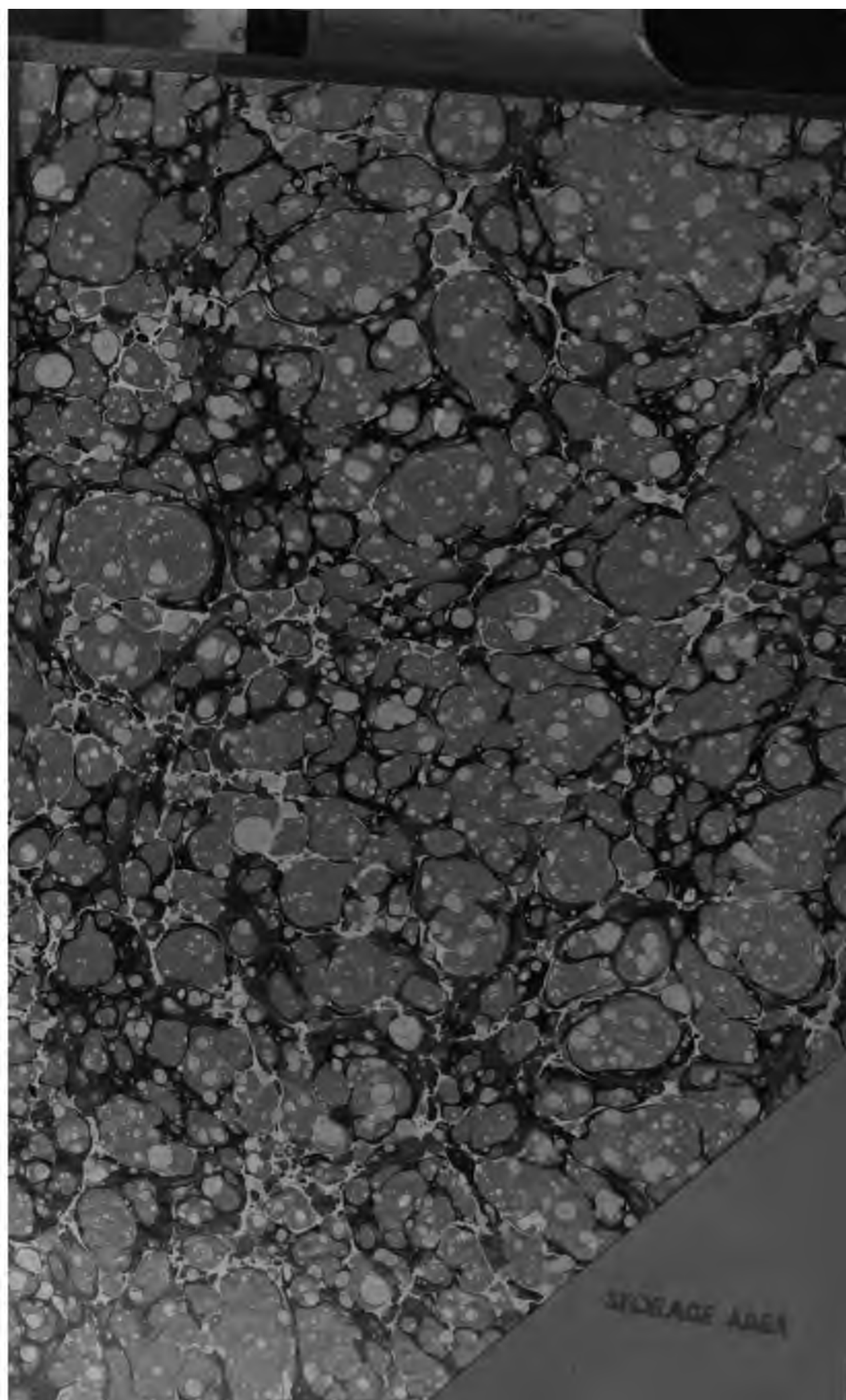
1) Dies. Jahresb. 16 (1907) S. 541. Die Arbeit wird in den Math. Ann. erscheinen.

2) Vgl. die letzte Anmerkung der S. 330 zitierten Arbeit.

3) In seiner S. 225 Anm. 1 genannten Dissertation.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.




STORAGE AREA